



Darrera lliçó (primera part)

Artur Travesa

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
27 de maig de 2026

Què vol dir calcular?

D'acord amb el *Diccionari de la llengua catalana* de l'IEC,

calcular

és

determinar (un valor numèric) per un procés matemàtic.

Què vol dir calcular?

D'acord amb el *Diccionari de la llengua catalana* de l'IEC,

calcular

és

determinar (un valor numèric) per un procés matemàtic.

I segons el *Cercaterm* del TERMCAT (i també el diccionari),

càlcul

és

procés matemàtic que permet determinar un valor numèric partint de certes dades.

Què vol dir calcular? (cont.)

També s'hauria pogut dir

calcular: *l'objectiu del càlcul* o bé *l'acció del càlcul*,
i **càlcul:** *l'efecte de calcular*;

i tapoc no diríem gaire res.

Què vol dir calcular? (cont.)

També s'hauria pogut dir

calcular: l'objectiu del càlcul o bé l'acció del càlcul,
i *càlcul*: l'efecte de calcular;

i tapoc no diríem gaire res.

Intentaré precisar, des d'un punt de vista matemàtic, què volem dir quan diem *calcular*.

Què vol dir calcular? (cont.)

També s'hauria pogut dir

calcular: *l'objectiu del càlcul* o bé *l'acció del càlcul*,
i *càlcul*: *l'efecte de calcular*;

i tapoc no diríem gaire res.

Intentaré precisar, des d'un punt de vista matemàtic, què volem dir quan diem *calcular*.

Els matemàtics no calculem només nombres, sinó també, per exemple, grups de Galois, grups d'isotropia, òrbites d'accions, espais, derivades, integrals, homotopies, homologies, etcètera. Em limitaré al concepte de *calcular nombres*; i, encara més, al concepte de

calcular nombres enters.

La successió de Fibonacci

Per a exemplificar la reflexió, faré servir la successió de Fibonacci. Recordem-la.

Definició

Anomenarem successió de Fibonacci la successió de nombres enters (naturals) donada per

$$S : \quad s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 3, \quad s_5 = 5, \quad \dots,$$

$$s_{n+2} = s_{n+1} + s_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

És, doncs, un exemple de successió recursiva d'ordre 2.

La successió original de Fibonacci

La successió original de Fibonacci (cf. **[Fi 1202]**), que apareix com a resposta a un problema de conills, és la successió de nombres naturals, $Z = \{z_n\}_{n \geq 0}$, determinada per la relació de recurrència $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$, $n \geq 0$, a partir de $z_0 = 1$, i $z_1 = 2$; és a dir, la successió

$$z_0 = 1, z_1 = 2, z_2 = 3, z_3 = 5, z_4 = 8, z_5 = 13, z_6 = 21, \dots$$

De fet, Fibonacci necessitava, per a començar, almenys una parella reproductora. Actualment, se sol canviar l'inici de la successió pels dos termes 0, 1 (i hom oblida el problema dels conills). Notem, doncs, que la successió original de Fibonacci és la successió $\{z_n := s_{n+2}\}_{n \geq 0}$.

La successió de Fibonacci (cont.)

Si ens atenim a la definició del Diccionari, podríem dir que **ja hem *calculat*** tots els termes de la successió de Fibonacci, perquè els tenim ***determinats unívocament*** per la definició de la successió. Però, segurament, no és això què volem entendre per calcular-los.

La successió de Fibonacci (cont.)

Si ens atenim a la definició del Diccionari, podríem dir que **ja hem calculat** tots els termes de la successió de Fibonacci, perquè els tenim **determinats unívocament** per la definició de la successió. Però, segurament, no és això què volem entendre per calcular-los.

En efecte, si es demana *calcular* el terme desè de la successió de Fibonacci, o sigui, s_{10} o z_8 , no es pretén que la resposta sigui que “**és el terme que s’obté en aplicar la definició per a $n = 10$** ”, sinó que es pretén saber la quantitat de parelles de conills que hauríem d’alimentar d’ací a 8 mesos!

La successió de Fibonacci (cont.)

Si ens atenim a la definició del Diccionari, podríem dir que **ja hem calculat** tots els termes de la successió de Fibonacci, perquè els tenim **determinats unívocament** per la definició de la successió. Però, segurament, no és això que volem entendre per calcular-los.

En efecte, si es demana *calcular* el terme desè de la successió de Fibonacci, o sigui, s_{10} o z_8 , no es pretén que la resposta sigui que “és el terme que s’obté en aplicar la definició per a $n = 10$ ”, sinó que es pretén saber la quantitat de parelles de conills que hauríem d’alimentar d’ací a 8 mesos!

Es pretén, doncs, una resposta del tipus “**cinquanta-cinc**” (o bé, tot i que no és gaire freqüent, **cinc desenes i mitja**).

Per tant, *calcular* vol dir alguna cosa diferent? O, potser, més precisa?

La successió de Fibonacci (cont.)

No és difícil demostrar (ni molt menys, comprovar-ho), que per als termes de la successió de Fibonacci se satisfà la fórmula tancada, no recursiva,

$$s_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \quad n \geq 0, \quad (1)$$

on les operacions ho són de nombres reals. Podríem dir, doncs, que aquesta fórmula també *calcula* els termes de la successió de Fibonacci, perquè en dóna una expressió unívoca i inequívoca per a cadascun.

I si es fan les operacions per a $n = 10$ s'obté (naturalment!) que s_{10} val cinquanta-cinc, cosa que escrivim en la forma $s_{10} = 55$.

Què vol dir calcular? (cont.)

Sembla, doncs, que el resultat de *calcular* el terme desè sigui el nombre 55. Però, *calcular*, és exactament això?

Què vol dir calcular? (cont.)

Sembla, doncs, que el resultat de *calcular* el terme desè sigui el nombre 55. Però, *calcular*, és exactament això?

(Pausa)

Què vol dir calcular? (cont.)

Sembla, doncs, que el resultat de *calcular* el terme desè sigui el nombre 55. Però, *calcular*, és exactament això?

(Pausa)

(Reflexió)

Què vol dir calcular? (cont.)

Sembla, doncs, que el resultat de *calcular* el terme desè sigui el nombre 55. Però, *calcular*, és exactament això?

(Pausa)

(Reflexió)

No!

Què vol dir calcular? (cont.)

De fet, allò que desitgem és *una expressió decimal* del nombre s_{10} . O potser, una expressió binària o hexadecimal, o en una base diferent de numeració.

Què vol dir calcular? (cont.)

De fet, allò que desitgem és *una expressió decimal* del nombre s_{10} . O potser, una expressió binària o hexadecimal, o en una base diferent de numeració.

Doncs, podríem dir que *calcular un nombre enter* és *donar-ne una expressió en una base determinada de numeració*; usualment, la decimal, però també les binària o hexadecimal (o altres).

Què vol dir calcular? (cont.)

De fet, allò que desitgem és *una expressió decimal* del nombre s_{10} . O potser, una expressió binària o hexadecimal, o en una base diferent de numeració.

Doncs, podríem dir que *calcular un nombre enter* és *donar-ne una expressió en una base determinada de numeració*; usualment, la decimal, però també les binària o hexadecimal (o altres).

És a dir, *donar-ne la successió de xifres que el representa* (en la base triada). I per a posar de manifest la base, podem dir *calcular un nombre en base b* . I també, com és habitual, ometre la base quan parlem de l'expressió decimal.

Podem calcular-ne els termes?

És possible calcular **qualsevol** terme de la successió de Fibonacci, o sigui, **donar-ne l'expressió decimal** (o binària, o hexadecimal, o ...)?

Podem calcular-ne els termes?

És possible calcular **qualsevol** terme de la successió de Fibonacci, o sigui, **donar-ne l'expressió decimal (o binària, o hexadecimal, o ...)**?

Canviem el terme s_{10} pel terme s_{101} . Si utilitzem la fórmula tancada (1), amb paciència (cent sumes) o, millor, amb l'ús d'un algoritme binari d'exponenciació, (en tenim prou si fem 18 multiplicacions, una resta i una simplificació), obtenim que

$$s_{101} = 573\ 147844\ 013817\ 084101,$$

un nombre de vint-i-una xifres decimals

Podem calcular-ne els termes?

És possible calcular **qualsevol** terme de la successió de Fibonacci, o sigui, **donar-ne l'expressió decimal (o binària, o hexadecimal, o ...)**?

Canviem el terme s_{10} pel terme s_{101} . Si utilitzem la fórmula tancada (1), amb paciència (cent sumes) o, millor, amb l'ús d'un algoritme binari d'exponenciació, (en tenim prou si fem 18 multiplicacions, una resta i una simplificació), obtenim que

$$s_{101} = 573\ 147844\ 013817\ 084101,$$

un nombre de vint-i-una xifres decimals (al cap de 99 mesos, o sigui, 8 anys i 3 mesos, **moltes parelles de conills!**).

Podem calcular-ne els termes?

Ens proposem “justificar” que, en general, no és *físicament* factible el càlcul de l'expressió decimal (ni binària, ni hexadecimal) de *qualsevol* terme de la successió.

Podem calcular-ne els termes?

Ens proposem “justificar” que, en general, no és *físicament* factible el càlcul de l'expressió decimal (ni binària, ni hexadecimal) de *qualsevol* terme de la successió.

És fàcil demostrar que cada dos termes de la successió el nombre de xifres binàries augmenta, com a mínim, en una unitat. De fet, tenim un creixement exponencial de base

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \sqrt{2} (> 1).$$

Podem calcular-ne els termes?

Ens proposem “justificar” que, en general, no és *físicament* factible el càlcul de l'expressió decimal (ni binària, ni hexadecimal) de *qualsevol* terme de la successió.

És fàcil demostrar que cada dos termes de la successió el nombre de xifres binàries augmenta, com a mínim, en una unitat. De fet, tenim un creixement exponencial de base $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \sqrt{2} (> 1)$. Si tenim en compte que una estimació *física* del nombre de partícules elementals de l'univers n'aproxima la quantitat pel nombre 10^{80} , **no podem assignar una partícula elemental a cadascuna de les xifres binàries de cap terme de la successió que en tingui més de 10^{80}** ; per tant, és *físicament impossible* donar l'expressió binària dels termes de la successió més enllà, per exemple, del terme $2 \cdot 10^{80}$ -èsim (de fet, ni molt abans).

La “granja” de Fibonacci

Exercici

Si Fibonacci hagués pogut posar en pràctica la granja en les condicions enunciades, quantes parelles de conills hauria hagut d'alimentar quan es va morir, quaranta-vuit anys més tard?

La “granja” de Fibonacci

Exercici

Si Fibonacci hagués pogut posar en pràctica la granja en les condicions enunciades, quantes parelles de conills hauria hagut d'alimentar quan es va morir, quaranta-vuit anys més tard?

Solució

La resposta és el nombre de 121 xifres decimals,

$F_{12 \cdot 48} = S_{12 \cdot 48 + 2} = S_{578} = 2\ 788502\ 654934\ 314115\ 214901$
 $056869\ 862215\ 023259\ 562288\ 282318\ 173443\ 845537$
 $555504\ 066971\ 990229\ 791673\ 629864\ 620577\ 714101$
 $111120\ 681089$, molt més gran que el nombre estimat de partícules elementals de l'univers!

La “granja” de Fibonacci (cont.)

L'expressió binària d'aquest nombre (primerament, la xifra “més significativa”) és la successió de les 401 xifres:

1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1,
0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1,
0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0,
1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0,
0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1,
0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 1.

La “granja” de Fibonacci (cont.)

l'expressió hexadecimal és la successió de les 101 xifres (de nou, primerament la xifra més significativa):

1, 1, 4, 7, 2, 9, 3, 5, 4, 14, 6, 10, 4, 3, 13, 9, 1, 9, 6, 11, 9, 1,
7, 15, 7, 3, 1, 11, 14, 11, 0, 14, 13, 14, 3, 12, 1, 9, 0, 9, 7, 1,
4, 2, 5, 2, 2, 15, 12, 4, 15, 8, 1, 3, 1, 4, 1, 13, 11, 6, 2, 15,
13, 15, 4, 0, 4, 3, 2, 2, 14, 6, 8, 2, 11, 6, 11, 14, 3, 10, 8, 10,
10, 13, 11, 9, 9, 0, 4, 15, 5, 15, 14, 7, 1, 15, 3, 5, 8, 8, 1;

o, en la notació estàndard,

1, 1, 4, 7, 2, 9, 3, 5, 4, e, 6, a, 4, 3, d, 9, 1, 9, 6, b, 9, 1, 7,
f, 7, 3, 1, b, e, b, 0, e, d, e, 3, c, 1, 9, 0, 9, 7, 1, 4, 2, 5, 2,
2, f, c, 4, f, 8, 1, 3, 1, 4, 1, d, b, 6, 2, f, d, f, 4, 0, 4, 3, 2,
2, e, 6, 8, 2, b, 6, b, e, 3, a, 8, a, a, d, b, 9, 9, 0, 4, f, 5, f,
e, 7, 1, f, 3, 5, 8, 8, 1.

La “granja” de Fibonacci (cont.)

Notem que cap d'aquestes expressions (decimal, binària, o hexadecimal) mostra un patró; com a mínim, no un patró senzill.

La “granja” de Fibonacci (cont.)

Notem que cap d'aquestes expressions (decimal, binària, o hexadecimal) mostra un patró; com a mínim, no un patró senzill.

Ara bé, per a la successió de Fibonacci, hi ha una base de numeració que permet (d)escriure la successió de xifres en aquesta base per a **qualsevol** dels seus termes. Aquesta base **no és**, però, **entera**.

Observem primerament els dos resultats següents.

Base de numeració

Proposició

Fixem un nombre real $b > 1$, qualsevol. Per a tot nombre real positiu $x > 0$, existeixen un nombre enter $n \in \mathbb{Z}$ i un únic nombre natural $k \in \mathbb{N}$ per als quals se satisfan les propietats

$$0 \leq k < b, \quad k \cdot b^n \leq x < (k + 1)b^n,$$

o sigui, $0 \leq x - k \cdot b^n < b^n$.

Dels nombres naturals k tals que $0 \leq k < b$ en podem dir *xifres en base b* . I notem que, com que $b > 1$, com a mínim hi ha les xifres 0 i 1.

Base de numeració (cont.)

DEMOSTRACIÓ

Com que $b > 1$, existeix un nombre enter $n \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x < b^{n+1}$.

L'interval $[0, b^{n+1})$ es pot pensar dins de la reunió disjunta, per als valors naturals de $k < b$, dels intervals $[k \cdot b^n, (k+1)b^n)$, tots de longitud b^n .

Així, x pertany a un (únic) interval d'aquests, i això determina k , de manera que x és més gran o igual que l'origen de l'interval, $k \cdot b^n$, i la distància de l'origen a x és menor que la longitud de l'interval, b^n .

Aquestes són les propietats que volíem demostrar. \square

Base de numeració (cont.)

Corol·lari

Fixem un nombre real $b > 1$, qualsevol. Per a tot nombre real positiu $x > 0$, sigui $n \in \mathbb{Z}$ el nombre enter tal que $b^n \leq x < b^{n+1}$. Llavors, existeix una família de xifres en base b , $\{k_m : k_m \in \mathbb{N}, 0 \leq k_m < b, m \in \mathbb{Z}, m \leq n\}$, tal que

$$x = \sum_{-\infty < m \leq n} k_m \cdot b^m \quad (\text{expressió de } x \text{ en base } b).$$

Base de numeració (cont.)

DEMOSTRACIÓ

La proposició anterior ens ensenya l'existència de la xifra k_n , per a un valor de n tal que $0 \leq x < b^{n+1}$, i que per al nombre $x - k_n \cdot b^n$ es té la mateixa propietat però per a $n - 1$ en lloc de n , i que per al nombre $x - k_n \cdot b^n - k_{n-1} \cdot b^{n-1}$ es té la mateixa propietat però per a $n - 2$ en lloc de n , etcètera. Així, doncs, la família es construeix recursivament, de manera decreixent: $k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, \dots$

I com que la successió $\{b^n\}_{n < 0}$ té límit 0, la diferència entre x i les successives sumes finites,

$$\sum_{n-i < m \leq n} k_m \cdot b^m, \quad i \geq 0,$$

tendeix a zero, quan i tendeix a infinit; és a dir, la suma de la família coincideix amb el valor de x , com calia veure. \square

Base de numeració (cont.)

El cas $b = 10$ és l'expressió decimal de qualsevol nombre real positiu, amb xifres 0, 1, 2, ..., 9.

El cas $b = 2$ és l'expressió binària, amb xifres 0, 1.

I el cas $b = 16$ és s'expressió hexadecimal, amb xifres 0, 1, 2, 3, ..., 15, on les 10, 11, ..., 15 es representen usualment per a , b , c , d , e i f .

Base de numeració (cont.)

El cas $b = 10$ és l'expressió decimal de qualsevol nombre real positiu, amb xifres $0, 1, 2, \dots, 9$.

El cas $b = 2$ és l'expressió binària, amb xifres $0, 1$.

I el cas $b = 16$ és s'expressió hexadecimal, amb xifres $0, 1, 2, 3, \dots, 15$, on les $10, 11, \dots, 15$ es representen usualment per a, b, c, d, e i f .

Notem que en Aritmètica elemental l'expressió d'un nombre **natural** en una base entera sovint es construeix a la inversa, és a dir, començant per la xifra menys significativa, per divisions successives per la base.

Una bona base de numeració per als nombres de Fibonacci

Per a l'expressió dels termes de la successió de Fibonacci, és convenient utilitzar la base $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Per les seves propietats, aquest nombre s'acostuma a anomenar el **nombre auri** (o nombre d'or).

Notem que, com que $1 < b < 2$, les xifres en aquesta base són 0 i 1.

El resultat següent descriu la successió de xifres en aquesta base per a qualsevol terme de la successió de Fibonacci.

Expressió dels nombres de Fibonacci

Teorema

Considerem la successió de Fibonacci, i sigui $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Se satisfà que $s_0 = 0$, i, per a $n \geq 1$,

$$s_n = \begin{cases} b^{n-2} + b^{n-6} + \dots + b^{-n+4} + b^{-n+1}, & \text{si } n \text{ és senar,} \\ b^{n-2} + b^{n-6} + \dots + b^{-n+2}, & \text{si } n \text{ és parell.} \end{cases}$$

Així, la successió de xifres en base b per al terme s_n de la successió, $n \geq 1$, només té xifres diferents de zero en els llocs $n - 2, n - 6, \dots, -n + 4, i -n + 1$, si n és senar (notem que el darrer salt en l'índex és de -3 unitats, en lloc de -4), o en els llocs $n - 2, n - 6, \dots, -n + 6, -n + 2$, si n és parell; i en aquests llocs, la xifra és 1.

Examples

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = b^0$$

$$s_2 = b^0$$

$$s_3 = b + b^{-2}$$

$$s_4 = b^2 + b^{-2}$$

$$s_5 = b^3 + b^{-1} + b^{-4}$$

$$s_6 = b^4 + b^0 + b^{-4}$$

$$s_7 = b^5 + b + b^{-3} + b^{-6}$$

$$s_8 = b^6 + b^2 + b^{-2} + b^{-6}$$

$$s_9 = b^7 + b^3 + b^{-1} + b^{-5} + b^{-8}$$

Demostració del teorema

Notem que $b^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, que $b + b^{-1} = \sqrt{5}$, i que $b^2 - 1 = b$, i recordem l'expressió (1) de s_n donada més amunt, de manera que $s_n = \frac{b^n + (-1)^{n+1}b^{-n}}{b + b^{-1}}$.

Considerem primerament el cas en què n és senar, i posem $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. Com que $s_1 = 1 = b^0$, que ja és una expressió en base b , només cal considerar el cas en què $m \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Tenim que } s_{2m+1} &= \frac{b^{2m+1} + b^{-(2m+1)}}{b + b^{-1}} \\ &= b^{2m} - b^{2m-2} + b^{2m-4} - \dots + (-1)^s b^{2m-2s} + \dots + b^{-2m}, \end{aligned}$$

una suma de $2m + 1$ termes, $0 \leq s \leq 2m$. Notem que hi ha m diferències $b^{2m-4r} - b^{2m-4r-2}$, per a $0 \leq r \leq m - 1$, i un terme final, b^{-2m} . (I que això també val per a $m = 0$.)

Demostració del teorema (cont.)

Si en cadascuna de les diferències de dos termes consecutius fem servir que $b^2 - 1 = b$, tenim que

$$\begin{aligned} b^{2m-4r} - b^{2m-4r-2} &= b^{2m-4r-2}(b^2 - 1) \\ &= b^{2m-4r-2} \cdot b = b^{2m-4r-1}, \end{aligned}$$

per a $0 \leq r \leq m - 1$, de manera que, en substituir en l'expressió anterior per a s_{2m+1} , obtenim que, per a $m \geq 0$, és

$$s_{2m+1} = b^{2m-1} + b^{2m-5} + b^{2m-9} + \dots + b^{-2m+3} + b^{-2m},$$

una suma de $m + 1$ termes, tots amb coeficient 1. Doncs, la successió de xifres en base b és la donada a l'enunciat.

Demostració del teorema (cont.)

Estudiem, ara, el cas en què n és parell, posem $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$; i com que $s_0 = 0$, que ja és una expressió en base b , només cal considerar el cas en què $m \geq 1$.

Podem utilitzar que ja coneixem l'expressió dels termes d'índex senar i que se satisfà que $s_{2m} = s_{2m+1} - s_{2m-1}$.

Així, doncs, per a $m \geq 1$ tenim que

$$s_{2m-1} = b^{2m-3} + b^{2m-7} + \dots + b^{-2m+5} + b^{-2m+2}$$

i, per tant, $s_{2m} = s_{2m+1} - s_{2m-1} =$

$$\begin{aligned} &= b^{2m-1} + b^{2m-5} + \dots + b^{-2m+7} + b^{-2m+3} + b^{-2m} \\ &- (b^{2m-3} + b^{2m-7} + \dots + b^{-2m+5} + b^{-2m+2}) \\ &= \left(b^{2m-3} + b^{2m-7} + \dots + b^{-2m+5} \right) (b^2 - 1) \\ &\quad + b^{-2m+3} - b^{-2m}(b^2 - 1) = \dots \end{aligned}$$

Demostració del teorema (cont.)

$$\begin{aligned}S_{2m} &= S_{2m+1} - S_{2m-1} = \\&= \left(b^{2m-3} + b^{2m-7} + \dots + b^{-2m+5} \right) (b^2 - 1) \\&\quad + b^{-2m+3} - b^{-2m} (b^2 - 1) \\&= \left(b^{2m-3} + b^{2m-7} + \dots + b^{-2m+5} \right) \cdot b \\&\quad + b^{-2m+3} - b^{-2m} \cdot b \\&= \left(b^{2m-2} + b^{2m-6} + \dots + b^{-2m+6} \right) + b^{-2m+3} - b^{-2m+1} \\&= \left(b^{2m-2} + b^{2m-6} + \dots + b^{-2m+6} \right) + b^{-2m+1} (b^2 - 1) \\&= \left(b^{2m-2} + b^{2m-6} + \dots + b^{-2m+6} \right) + b^{-2m+1} \cdot b \\&= b^{2m-2} + b^{2m-6} + \dots + b^{-2m+6} + b^{-2m+2},\end{aligned}$$

que proporciona la successió de xifres enunciada. \square

Exemple

La successió de xifres en la base $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ del nombre de Fibonacci s_{578} conté un 1 en cadascuna de les 289 posicions 576, 572, 568, \dots , -568 , -572 , -576 , i un 0 en totes les altres.

Notem que és més senzill descriure aquesta expressió, de 289 elements diferents de 0 (o, si es vol, dels 1153 zeros i uns), que qualsevol de les expressions binària, decimal o hexadecimal donades més amunt, encara que la decimal i l'hexadecimal siguin més curtes.

Observació

Les expressions de nombres reals positius en aquesta base no tenen per què ser úniques, com succeeix amb les successions en una base entera qualsevol. Per exemple, les dues expressions $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ (en ordre decreixent d'exponents, com és habitual) ho són del mateix nombre, perquè $b^{k+2} = b^{k+1} + b^k$.

Conclusió

Així, doncs, encara que segurament no podem calcular l'expressió decimal, binària o hexadecimal de qualsevol terme de la successió de Fibonacci, **sí que en podem *calcular* l'expressió en base el nombre auri.** Per a cadascun dels termes de la successió de Fibonacci, hi ha una quantitat finita de xifres diferents de 0, que són 1, i podem dir exactament a quin lloc de la successió de xifres estan.

Aquest fet és semblant al fet que, segurament, no podem escriure l'expressió decimal de qualsevol nombre de Fermat ni de qualsevol nombre de Mersenne. Però, òbviament, sí que en podem (d)escriure l'expressió binària!

Cronologia

Leonardo Pisano **Fibonacci** (Pisa, setembre? 1170; Pisa, 1250)

Marin **Mersenne** (Oizé, Maine, França, 8 de setembre de 1588; París, França, 1 de setembre de 1648)

Pierre de **Fermat** (Beaumont de Lomagne, França, 17 d'agost de 1601; Castres, França, 12 de gener de 1665)

Laurence Edward **Sigler** (Tulsa, Oklahoma, Estats Units, 26 d'agost de 1928; Lewinsburg, Pennsylvania, Estats Units, 15 d'octubre de 1997)(?)

Referències

[Fi 1202] Fibonacci, L.: *Liber abacci*, Pisa, Itàlia, 1202. Traducció a llengua anglesa de Laurence E. Sigler: *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*; Springer Verlag, New York (2002), ISBN: 978-0-387-40737-1.

[DLC] Institut d'Estudis Catalans: *Diccionari de la llengua catalana*. Institut d'Estudis Catalans. Barcelona. Segona edició; des de 2007, s'actualitza sovint. Recurs en línia, consultable en <https://dlc.iec.cat/>

[Termcat] Termcat: *Cercaterm*. Termcat, Centre de terminologia. Departament de Política Lingüística, Generalitat de Catalunya. Barcelona (1985). El recurs en línia *Cercaterm*, s'actualitza sovint i és consultable en <https://www.termcat.cat/ca/cercaterm/>

