



Darrera lliçó  
(segona part)

Artur Travesa

Facultat de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona  
27 de maig de 2026

# Expressions en base $b$

Posem  $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , el nombre auri. Hem vist que tot nombre real positiu  $x > 0$  admet una expressió en base  $b$ ; és a dir, una expressió de la forma

$$x = \sum_{-\infty < m \leq n} k_m \cdot b^m, \quad k_m \in \{0, 1\}.$$

I també hem fet notar que l'expressió no és única.

# Expressions en base $b$

Posem  $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , el nombre auri. Hem vist que tot nombre real positiu  $x > 0$  admet una expressió en base  $b$ ; és a dir, una expressió de la forma

$$x = \sum_{-\infty < m \leq n} k_m \cdot b^m, \quad k_m \in \{0, 1\}.$$

I també hem fet notar que l'expressió no és única.

Com és habitual, escriurem les successions de xifres amb “la més significativa” a l'esquerra; és a dir, en ordre decreixent de potències de  $b$ , i amb una coma després de les “unitats”.

# Expressions en base $b$

Posem  $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , el nombre auri. Hem vist que tot nombre real positiu  $x > 0$  admet una expressió en base  $b$ ; és a dir, una expressió de la forma

$$x = \sum_{-\infty < m \leq n} k_m \cdot b^m, \quad k_m \in \{0, 1\}.$$

I també hem fet notar que l'expressió no és única.

Com és habitual, escriurem les successions de xifres amb “la més significativa” a l'esquerra; és a dir, en ordre decreixent de potències de  $b$ , i amb una coma després de les “unitats”.

Direm que dues expressions en base  $b$  són equivalents si representen el mateix nombre.

# Expressions en base $b$ (cont.)

## **Proposició = Reducció.**

Qualsevol expressió **finita** en base  $b$  és equivalent a una en què no hi ha dues xifres consecutives iguals a 1.

# Expressions en base $b$ (cont.)

## **Proposició = Reducció.**

Qualsevol expressió **finita** en base  $b$  és equivalent a una en què no hi ha dues xifres consecutives iguals a 1.

## **Demostració = Algoritme de reducció.**

Com que, per a tot  $n \in \mathbb{Z}$ , se satisfà que  $b^n + b^{n+1} = b^{n+2}$ , una (sub)successió de xifres  $(?, 0, 1, 1)$  es pot canviar per la (sub)successió  $(?, 1, 0, 0)$  i les dues expressions representen el mateix nombre.

# Expressions en base $b$ (cont.)

## Proposició = Reducció.

Qualsevol expressió **finita** en base  $b$  és equivalent a una en què no hi ha dues xifres consecutives iguals a 1.

## Demostració = Algoritme de reducció.

Com que, per a tot  $n \in \mathbb{Z}$ , se satisfà que  $b^n + b^{n+1} = b^{n+2}$ , una (sub)successió de xifres  $(?, 0, 1, 1)$  es pot canviar per la (sub)successió  $(?, 1, 0, 0)$  i les dues expressions representen el mateix nombre.

Notem que la quantitat de xifres 1 de la segona expressió ha disminuït en una unitat; per tant, podem reiterar el procés fins que a la successió de xifres no n'hi hagi cap de la forma  $(1, 1)$ .

□

## Expressions en base $b$ (cont.)

Notem que la quantitat de xifres significatives pot augmentar en una unitat:  $(0, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$ .

## Expressions en base $b$ (cont.)

Notem que la quantitat de xifres significatives pot augmentar en una unitat:  $(0, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$ .

La successió de xifres no s'allarga per la dreta.

## Expressions en base $b$ (cont.)

Notem que la quantitat de xifres significatives pot augmentar en una unitat:  $(0, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$ .

La successió de xifres no s'allarga per la dreta.

En suprimir una parella consecutiva de xifres 1 en pot aparèixer una de nova, fins i tot, si aquella era la primera. Per exemple:

$$(? , 0, 1, 0, 1, 1, ??) \rightarrow (? , 0, 1, 1, 0, 0, ??) \rightarrow (? , 1, 0, 0, 0, 0, ??).$$

# Expressions àuriques

## Definició

Anomenaré *expressió àurica* qualsevol expressió **finita** en base  $b$  que no contingui dues xifres 1 consecutives.

L'algoritme de reducció permet assegurar que qualsevol expressió finita en base  $b$  és equivalent a una expressió àurica.

# Expressions àuriques

## Definició

Anomenaré *expressió àurica* qualsevol expressió **finita** en base  $b$  que no contingui dues xifres 1 consecutives.

L'algoritme de reducció permet assegurar que qualsevol expressió finita en base  $b$  és equivalent a una expressió àurica.

## Corol·lari

*Tot nombre de Fibonacci admet una expressió àurica.*  $\square$

# Observacions

- La quantitat d'expressions finites en base  $b$  és numerable i, per tant, **la majoria** dels nombres reals positius **no** admeten expressions àuriques.

# Observacions

- La quantitat d'expressions finites en base  $b$  és numerable i, per tant, **la majoria** dels nombres reals positius **no** admeten expressions àuriques.
- De fet, totes les expressions àuriques representen nombres positius de l'anell dels enters,  $\mathbb{Z}[b]$ , de  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

# Observacions

- La quantitat d'expressions finites en base  $b$  és numerable i, per tant, **la majoria** dels nombres reals positius **no** admeten expressions àuriques.
- De fet, totes les expressions àuriques representen nombres positius de l'anell dels enters,  $\mathbb{Z}[b]$ , de  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

## Qüestió

És cert que les expressions àuriques es corresponen exactament amb els nombres **positius** de  $\mathbb{Z}[b]$ ?

# Observacions

- La quantitat d'expressions finites en base  $b$  és numerable i, per tant, **la majoria** dels nombres reals positius **no** admeten expressions àuriques.
- De fet, totes les expressions àuriques representen nombres positius de l'anell dels enters,  $\mathbb{Z}[b]$ , de  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

## Qüestió

És cert que les expressions àuriques es corresponen exactament amb els nombres **positius** de  $\mathbb{Z}[b]$ ?

Deixo a l'aire una resposta a aquesta qüestió.

## Expressions àuriques (cont.)

- Algunes expressions en base  $b$  amb una infinitat de xifres no nul·les són equivalents a expressions àuriques.

Per exemple, tenim que per a qualsevol nombre enter  $n$ ,

$$\sum_{m \geq n} b^{-m} = \frac{b^{-n}}{1 - b^{-1}} = b^{-n+2},$$

perquè  $1 - b^{-1} = b^{-2}$ .

## Expressions àuriques (cont.)

- Algunes expressions en base  $b$  amb una infinitat de xifres no nul·les són equivalents a expressions àuriques.

Per exemple, tenim que per a qualsevol nombre enter  $n$ ,

$$\sum_{m \geq n} b^{-m} = \frac{b^{-n}}{1 - b^{-1}} = b^{-n+2},$$

perquè  $1 - b^{-1} = b^{-2}$ .

Per exemple, el cas  $n = 2$  es pot escriure en la forma

$$0,011111 \dots = 1.$$

## Observacions (cont.)

Anàlogament, i també perquè  $1 - b^{-2} = b^{-1}$ ,

$$\sum_{m \geq n} b^{-2m} = \frac{b^{-2n}}{1 - b^{-2}} = b^{-2n+1}.$$

i l'expressió de l'esquerre no conté dues xifres 1 consecutives.

## Observacions (cont.)

Anàlogament, i també perquè  $1 - b^{-2} = b^{-1}$ ,

$$\sum_{m \geq n} b^{-2m} = \frac{b^{-2n}}{1 - b^{-2}} = b^{-2n+1}.$$

i l'expressió de l'esquerre no conté dues xifres 1 consecutives.

Per exemple, el cas  $n = 1$  es pot escriure en la forma

$$0,0101010101 \dots = 0,1.$$

# Suma d'expressions àuriques

## Proposició

*Per a tot nombre enter  $n \in \mathbb{Z}$  és  $2b^n = b^{n+1} + b^{n-2}$ .*

# Suma d'expressions àuriques

## Proposició

Per a tot nombre enter  $n \in \mathbb{Z}$  és  $2b^n = b^{n+1} + b^{n-2}$ .

## DEMOSTRACIÓ

Tenim que  $b + b^{-2} = b^0 + b^{-1} + b^{-2} = b^0 + b^0 = 2b^0$ ;  
multipliquem per  $b^n$ .  $\square$

# Suma d'expressions àuriques

## Proposició

Per a tot nombre enter  $n \in \mathbb{Z}$  és  $2b^n = b^{n+1} + b^{n-2}$ .

## DEMOSTRACIÓ

Tenim que  $b + b^{-2} = b^0 + b^{-1} + b^{-2} = b^0 + b^0 = 2b^0$ ;  
multipliquem per  $b^n$ .  $\square$

Aquesta propietat senzilla permet descriure un algoritme iteratiu per a la suma d'una expressió d'una única xifra no nul·la a una expressió àurica qualsevol. De l'algoritme en direm **Suma d'una xifra**.

# Suma d'expressions àuriques

## Proposició

Per a tot nombre enter  $n \in \mathbb{Z}$  és  $2b^n = b^{n+1} + b^{n-2}$ .

## DEMOSTRACIÓ

Tenim que  $b + b^{-2} = b^0 + b^{-1} + b^{-2} = b^0 + b^0 = 2b^0$ ;  
multipliquem per  $b^n$ .  $\square$

Aquesta propietat senzilla permet descriure un algoritme iteratiu per a la suma d'una expressió d'una única xifra no nul·la a una expressió àurica qualsevol. De l'algoritme en direm [Suma d'una xifra](#).

I en iterar aquest algoritme per a tots els sumands no nuls,  $b^n$ , d'una expressió àurica, obtenim un [algoritme de la suma](#), per a la suma de dues expressions àuriques qualssevol.

## Suma d'una xifra

Sigui  $x := \sum_m k_m \cdot b^m$  una expressió àurica, i sigui  $n \in \mathbb{Z}$  un nombre enter qualsevol. Volem calcular l'expressió àurica de  $x + b^n$ ; és a dir, volem sumar a  $x$  un nombre d'una sola xifra.

## Suma d'una xifra

Sigui  $x := \sum_m k_m \cdot b^m$  una expressió àurica, i sigui  $n \in \mathbb{Z}$  un nombre enter qualsevol. Volem calcular l'expressió àurica de  $x + b^n$ ; és a dir, volem sumar a  $x$  un nombre d'una sola xifra. Distingim els dos casos  $k_n = 0$  i  $k_n = 1$ . En el primer, canviem  $k_n$  per 1, apliquem l'algoritme de reducció, i hem acabat.

## Suma d'una xifra

Sigui  $x := \sum_m k_m \cdot b^m$  una expressió àurica, i sigui  $n \in \mathbb{Z}$  un nombre enter qualsevol. Volem calcular l'expressió àurica de  $x + b^n$ ; és a dir, volem sumar a  $x$  un nombre d'una sola xifra. Distingim els dos casos  $k_n = 0$  i  $k_n = 1$ . En el primer, canviem  $k_n$  per 1, apliquem l'algoritme de reducció, i hem acabat.

En el segon,  $k_n = 1$ , com que l'expressió de  $x$  és àurica, tenim que  $k_{n-1} = k_{n+1} = 0$ . Llavors, canviem la suma  $x + b^n$  per les dues sumes  $((x - b^n) + b^{n+1}) + b^{n-2}$ , on  $x - b^n$  és l'expressió que s'obté de  $x$  en canviar  $k_n = 1$  per 0 (notem que això és **restar**  $b^n$  d'una successió àurica que conté aquest sumand).

## Suma d'una xifra

Sigui  $x := \sum_m k_m \cdot b^m$  una expressió àurica, i sigui  $n \in \mathbb{Z}$  un nombre enter qualsevol. Volem calcular l'expressió àurica de  $x + b^n$ ; és a dir, volem sumar a  $x$  un nombre d'una sola xifra. Distingim els dos casos  $k_n = 0$  i  $k_n = 1$ . En el primer, canviem  $k_n$  per 1, apliquem l'algoritme de reducció, i hem acabat.

En el segon,  $k_n = 1$ , com que l'expressió de  $x$  és àurica, tenim que  $k_{n-1} = k_{n+1} = 0$ . Llavors, canviem la suma  $x + b^n$  per les dues sumes  $((x - b^n) + b^{n+1}) + b^{n-2}$ , on  $x - b^n$  és l'expressió que s'obté de  $x$  en canviar  $k_n = 1$  per 0 (notem que això és **restar**  $b^n$  d'una successió àurica que conté aquest sumand).

La primera suma, ja la sabem fer; i per a la segona, podem iterar, perquè  $n - 2 < n$ , el nombre de xifres no nul·les de  $x$  és finit, i el nombre de xifres per la dreta no augmenta en la reducció de la suma anterior.  $\square$

## Suma d'expressions àuriques (cont.)

Ara, un algoritme per a sumar expressions àuriques és immediat: sumem a una expressió àurica un a un els sumands no nuls de la segona expressió (podríem dir que sumem “amb els dits”).

## Suma d'expressions àuriques (cont.)

Ara, un algoritme per a sumar expressions àuriques és immediat: sumem a una expressió àurica un a un els sumands no nuls de la segona expressió (podríem dir que sumem “amb els dits”).

**Observació:** Notem que no es pretén, en cap cas, que l'algoritme sigui eficient; simplement, demostrar que es pot sumar algorítmicament.

# Resta d'expressions àuriques

Òbviamment, només podrem restar una expressió àurica d'una altra si la que volem restar és menor o igual que l'altra.

I, també òbviamment, podem iterar si sabem restar una xifra.

I ja hem ensenyat a restar una xifra  $b^n$  d'una expressió que conté aquest sumand: simplement, el treiem.

Resta aprendre a restar  $b^n$  d'una expressió àurica més gran que no contingui aquest sumand.

I podem usar la igualtat  $b^n = b^{n+1} - b^{n-1}$ : restar  $b^n$  és sumar  $b^{n-1}$  i, després, restar  $b^{n+1}$ . I, després, aplicar l'algoritme de reducció.

Finalment, com que, per hipòtesi, podem fer la resta, i com que fem córrer les xifres cap a l'esquerre, alguna resta serà trivial i acabarem.

# Multiplicació d'expressions àuriques

La dificultat que tenim en la suma d'expressions àuriques no la tenim en la multiplicació, i és el mateix algoritme “de l'escola”.

# Multiplicació d'expressions àuriques

La dificultat que tenim en la suma d'expressions àuriques no la tenim en la multiplicació, i és el mateix algoritme “de l'escola”.

Efectivament, multiplicar per  $b^n$  és “fer córrer” els coeficients  $n$  llocs cap a l'esquerre; per tant, immediat.

I multiplicar  $x$  per un nombre  $y$  de més xifres és sumar, un a un, els productes de  $x$  per  $b^n$  per als valors de  $n$  tals que el seu coeficient en  $y$  sigui 1. (Com a l'escola, però la suma és més complicada.)

# Expressions àuriques amb signe

De la mateixa manera que per a representar en una base entera un nombre real negatiu,  $x$ , fem servir el signe  $-$  seguit de l'expressió de  $-x$ , podem fer això amb les expressions àuriques; tindrem les **expressions àuriques amb signe**.

# Expressions àuriques amb signe

De la mateixa manera que per a representar en una base entera un nombre real negatiu,  $x$ , fem servir el signe  $-$  seguit de l'expressió de  $-x$ , podem fer això amb les expressions àuriques; tindrem les **expressions àuriques amb signe**.

I els algoritmes anteriors de suma, resta, i multiplicació, juntament amb la regla dels signes, ens permeten sumar i multiplicar qualssevol dues **expressions àuriques amb signe**.

# Conclusió

## Teorema

*Les expressions àuriques amb signe són exactament els elements de l'anell d'enters algebraics  $\mathbb{Z}[b]$ .*

# Conclusió

## Teorema

*Les expressions àuriques amb signe són exactament els elements de l'anell d'enters algebraics  $\mathbb{Z}[b]$ .*

## DEMOSTRACIÓ

Com que

- (a) 0 i 1 i  $b$  són expressions àuriques (amb signe),
- (b) l'oposat d'una expressió àurica amb signe és una expressió àurica amb signe,
- (c) la suma i el producte d'expressions àuriques amb signe són expressions àuriques amb signe,

el conjunt de les expressions àuriques amb signe és un subanell de  $\mathbb{R}$  que conté 1 i  $b$ ; per tant, conté  $\mathbb{Z}[b]$ .

I ja hem vist fa molta estona que l'altra inclusió també se satisfà.  $\square$

# Cloenda

## Corol·lari

*Les expressions àuriques són exactament els elements positius de  $\mathbb{Z}[b]$ .  $\square$*

# Cloenda

## Corol·lari

*Les expressions àuriques són exactament els elements positius de  $\mathbb{Z}[b]$ .  $\square$*

## Teorema

*Tot element de  $\mathbb{Z}[b]$  és suma d'una quantitat finita d'unitats diferents.  $\square$*



# UNIVERSITAT DE BARCELONA