

STNB 2026
39a edició



Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC)

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
26 al 30 de gener de 2026

Divertiment aritmètic (cloenda)

Artur Travesa

Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC)
30 de gener de 2026

Divertiment aritmètic

Dedicat a **Pilar Bayer**,

en el seu proper 80è aniversari

Per molts anys!

Expressions en base b

Posem $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, el nombre auri. Hem vist que tot nombre real positiu $x > 0$ admet una expressió en base b ; és a dir, una expressió de la forma

$$x = \sum_{-\infty < m \leq n} k_m \cdot b^m, \quad k_m \in \{0, 1\}.$$

I també hem fet notar que l'expressió no és única.

Expressions en base b

Posem $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, el nombre auri. Hem vist que tot nombre real positiu $x > 0$ admet una expressió en base b ; és a dir, una expressió de la forma

$$x = \sum_{-\infty < m \leq n} k_m \cdot b^m, \quad k_m \in \{0, 1\}.$$

I també hem fet notar que l'expressió no és única.

Com és habitual, escriurem les successions de xifres amb “la més significativa” a l'esquerra; és a dir, en ordre decreixent de potències de b , i amb una coma després de les “unitats”.

Expressions en base b

Posem $b := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, el nombre auri. Hem vist que tot nombre real positiu $x > 0$ admet una expressió en base b ; és a dir, una expressió de la forma

$$x = \sum_{-\infty < m \leq n} k_m \cdot b^m, \quad k_m \in \{0, 1\}.$$

I també hem fet notar que l'expressió no és única.

Com és habitual, escriurem les successions de xifres amb “la més significativa” a l'esquerra; és a dir, en ordre decreixent de potències de b , i amb una coma després de les “unitats”.

Direm que dues expressions en base b són equivalents si representen el mateix nombre.

Expressions en base b (cont.)

Proposició = Reducció.

Qualsevol expressió **finita** en base b és equivalent a una en què no hi ha dues xifres consecutives iguals a 1.

Expressions en base b (cont.)

Proposició = Reducció.

Qualsevol expressió **finita** en base b és equivalent a una en què no hi ha dues xifres consecutives iguals a 1.

Demostració = Algoritme de reducció.

Com que, per a tot $n \in \mathbb{Z}$, se satisfà que $b^n + b^{n+1} = b^{n+2}$, una (sub)successió de xifres $(?, 0, 1, 1)$ es pot canviar per la (sub)successió $(?, 1, 0, 0)$ i les dues expressions representen el mateix nombre.

Expressions en base b (cont.)

Proposició = Reducció.

Qualsevol expressió finita en base b és equivalent a una en què no hi ha dues xifres consecutives iguals a 1.

Demostració = Algoritme de reducció.

Com que, per a tot $n \in \mathbb{Z}$, se satisfà que $b^n + b^{n+1} = b^{n+2}$, una (sub)successió de xifres $(?, 0, 1, 1)$ es pot canviar per la (sub)successió $(?, 1, 0, 0)$ i les dues expressions representen el mateix nombre.

Notem que la quantitat de xifres 1 de la segona expressió ha disminuït en una unitat; per tant, podem reiterar el procés fins que a la successió de xifres no n'hi hagi cap de la forma $(1, 1)$.



Expressions en base b (cont.)

Notem que la quantitat de xifres significatives pot augmentar en una unitat: $(0, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$.

Expressions en base b (cont.)

Notem que la quantitat de xifres significatives pot augmentar en una unitat: $(0, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$.

La successió de xifres no s'allarga per la dreta.

Expressions en base b (cont.)

Notem que la quantitat de xifres significatives pot augmentar en una unitat: $(0, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$.

La successió de xifres no s'allarga per la dreta.

En suprimir una parella consecutiva de xifres 1 en pot aparèixer una de nova, fins i tot, si aquella era la primera. Per exemple:

$$(? , 0, 1, 0, 1, 1, ??) \rightarrow (? , 0, 1, 1, 0, 0, ??) \rightarrow (? , 1, 0, 0, 0, 0, ??).$$

Expressions àuriques

Definició

Anomenaré *expressió àurica* qualsevol expressió **finita** en base b que no contingui dues xifres 1 consecutives.

L'algoritme de reducció permet assegurar que qualsevol expressió finita en base b és equivalent a una expressió àurica.

Expressions àuriques

Definició

Anomenaré *expressió àurica* qualsevol expressió **finita** en base b que no contingui dues xifres 1 consecutives.

L'algoritme de reducció permet assegurar que qualsevol expressió finita en base b és equivalent a una expressió àurica.

Corol·lari

Tot nombre de Fibonacci admet una expressió àurica. $\square$

Observacions

- La quantitat d'expressions finites en base b és numerable i, per tant, **la majoria** dels nombres reals positius **no** admeten expressions àuriques.

Observacions

- La quantitat d'expressions finites en base b és numerable i, per tant, **la majoria** dels nombres reals positius **no** admeten expressions àuriques.
- De fet, totes les expressions àuriques representen nombres positius de l'anell dels enters, $\mathbb{Z}[b]$, de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Observacions

- La quantitat d'expressions finites en base b és numerable i, per tant, **la majoria** dels nombres reals positius **no** admeten expressions àuriques.
- De fet, totes les expressions àuriques representen nombres positius de l'anell dels enters, $\mathbb{Z}[b]$, de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Qüestió

És cert que les expressions àuriques es corresponen exactament amb els nombres **positius** de $\mathbb{Z}[b]$?

Observacions

- La quantitat d'expressions finites en base b és numerable i, per tant, **la majoria** dels nombres reals positius **no** admeten expressions àuriques.
- De fet, totes les expressions àuriques representen nombres positius de l'anell dels enters, $\mathbb{Z}[b]$, de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Qüestió

És cert que les expressions àuriques es corresponen exactament amb els nombres **positius** de $\mathbb{Z}[b]$?

Deixo a l'aire una resposta a aquesta qüestió.

Expressions àuriques (cont.)

- Algunes expressions en base b amb una infinitat de xifres no nul·les són equivalents a expressions àuriques.

Per exemple, tenim que per a qualsevol nombre enter n ,

$$\sum_{m \geq n} b^{-m} = \frac{b^{-n}}{1 - b^{-1}} = b^{-n+2},$$

perquè $1 - b^{-1} = b^{-2}$.

Expressions àuriques (cont.)

- Algunes expressions en base b amb una infinitat de xifres no nul·les són equivalents a expressions àuriques.

Per exemple, tenim que per a qualsevol nombre enter n ,

$$\sum_{m \geq n} b^{-m} = \frac{b^{-n}}{1 - b^{-1}} = b^{-n+2},$$

perquè $1 - b^{-1} = b^{-2}$.

Per exemple, el cas $n = -2$ es pot escriure en la forma

$$0,011111 \dots = 1.$$

Observacions (cont.)

Anàlogament, i també perquè $1 - b^{-2} = b^{-1}$,

$$\sum_{m \geq n} b^{-2m} = \frac{b^{-2n}}{1 - b^{-2}} = b^{-2n+1}.$$

i l'expressió de l'esquerre no conté dues xifres 1 consecutives.

Observacions (cont.)

Anàlogament, i també perquè $1 - b^{-2} = b^{-1}$,

$$\sum_{m \geq n} b^{-2m} = \frac{b^{-2n}}{1 - b^{-2}} = b^{-2n+1}.$$

i l'expressió de l'esquerre no conté dues xifres 1 consecutives.

Per exemple, el cas $n = -1$ es pot escriure en la forma

$$0,01010101 \cdots = 0,1.$$

Suma d'expressions àuriques

Proposició

Per a tot nombre enter $n \in \mathbb{Z}$ és $2b^n = b^{n+1} + b^{n-2}$.

Suma d'expressions àuriques

Proposició

Per a tot nombre enter $n \in \mathbb{Z}$ és $2b^n = b^{n+1} + b^{n-2}$.

DEMOSTRACIÓ

Tenim que $b + b^{-2} = b^0 + b^{-1} + b^{-2} = b^0 + b^0 = 2b^0$;
multipliquem per b^n . $\square$

Suma d'expressions àuriques

Proposició

Per a tot nombre enter $n \in \mathbb{Z}$ és $2b^n = b^{n+1} + b^{n-2}$.

DEMOSTRACIÓ

Tenim que $b + b^{-2} = b^0 + b^{-1} + b^{-2} = b^0 + b^0 = 2b^0$;
multipliquem per b^n . $\square$

Aquesta propietat senzilla permet descriure un algoritme iteratiu per a la suma d'una expressió d'una única xifra no nul·la a una expressió àurica qualsevol. De l'algoritme en direm **Suma d'una xifra**.

Suma d'expressions àuriques

Proposició

Per a tot nombre enter $n \in \mathbb{Z}$ és $2b^n = b^{n+1} + b^{n-2}$.

DEMOSTRACIÓ

Tenim que $b + b^{-2} = b^0 + b^{-1} + b^{-2} = b^0 + b^0 = 2b^0$;
multipliquem per b^n . $\square$

Aquesta propietat senzilla permet descriure un algoritme iteratiu per a la suma d'una expressió d'una única xifra no nul·la a una expressió àurica qualsevol. De l'algoritme en direm **Suma d'una xifra**.

I en iterar aquest algoritme per a tots els sumands no nuls, b^n , d'una expressió àurica, obtenim un **algoritme de la suma**, per a la suma de dues expressions àuriques qualssevol.

Suma d'una xifra

Sigui $x := \sum_m k_m \cdot b^m$ una expressió àurica, i sigui $n \in \mathbb{Z}$ un nombre enter qualsevol. Volem calcular l'expressió àurica de $x + b^n$; és a dir, volem sumar a x un nombre d'una sola xifra.

Suma d'una xifra

Sigui $x := \sum_m k_m \cdot b^m$ una expressió àurica, i sigui $n \in \mathbb{Z}$ un nombre enter qualsevol. Volem calcular l'expressió àurica de $x + b^n$; és a dir, volem sumar a x un nombre d'una sola xifra. Distingim els dos casos $k_n = 0$ i $k_n = 1$. En el primer, canviem k_n per 1, apliquem l'algoritme de reducció, i hem acabat.

Suma d'una xifra

Sigui $x := \sum_m k_m \cdot b^m$ una expressió àurica, i sigui $n \in \mathbb{Z}$ un nombre enter qualsevol. Volem calcular l'expressió àurica de $x + b^n$; és a dir, volem sumar a x un nombre d'una sola xifra. Distingim els dos casos $k_n = 0$ i $k_n = 1$. En el primer, canviem k_n per 1, apliquem l'algoritme de reducció, i hem acabat.

En el segon, $k_n = 1$, com que l'expressió de x és àurica, tenim que $k_{n-1} = k_{n+1} = 0$. Llavors, canviem la suma $x + b^n$ per les dues sumes $((x - b^n) + b^{n+1}) + b^{n-2}$, on $x - b^n$ és l'expressió que s'obté de x en canviar $k_n = 1$ per 0 (notem que això és **restar** b^n d'una successió àurica que conté aquest sumand).

Suma d'una xifra

Sigui $x := \sum_m k_m \cdot b^m$ una expressió àurica, i sigui $n \in \mathbb{Z}$ un nombre enter qualsevol. Volem calcular l'expressió àurica de $x + b^n$; és a dir, volem sumar a x un nombre d'una sola xifra. Distingim els dos casos $k_n = 0$ i $k_n = 1$. En el primer, canviem k_n per 1, apliquem l'algoritme de reducció, i hem acabat.

En el segon, $k_n = 1$, com que l'expressió de x és àurica, tenim que $k_{n-1} = k_{n+1} = 0$. Llavors, canviem la suma $x + b^n$ per les dues sumes $((x - b^n) + b^{n+1}) + b^{n-2}$, on $x - b^n$ és l'expressió que s'obté de x en canviar $k_n = 1$ per 0 (notem que això és **restar** b^n d'una successió àurica que conté aquest sumand).

La primera suma, ja la sabem fer; i per a la segona, podem iterar, perquè $n - 2 < n$, el nombre de xifres no nul·les de x és finit, i el nombre de xifres per la dreta no augmenta en la reducció de la suma anterior. $\square$

Suma d'expressions àuriques (cont.)

Ara, un algoritme per a sumar expressions àuriques és immediat: sumem a una expressió àurica un a un els sumands no nuls de la segona expressió (podríem dir que sumem “amb els dits”).

Suma d'expressions àuriques (cont.)

Ara, un algoritme per a sumar expressions àuriques és immediat: sumem a una expressió àurica un a un els sumands no nuls de la segona expressió (podríem dir que sumem “amb els dits”).

Observació: Notem que, en cap cas, es pretén que l'algoritme sigui eficient; simplement, demostrar que es pot sumar algorítmicament.

Resta d'expressions àuriques

Òbviament, només podrem restar una expressió àurica d'una altra si la que volem restar és menor o igual que l'altra.

I, també òbviament, podem iterar si sabem restar una xifra.

I ja hem ensenyat a restar una xifra b^n d'una expressió que conté aquest sumand: simplement, el treiem.

Resta aprendre a restar b^n d'una expressió àurica més gran que no contingui aquest sumand.

I podem usar la igualtat $b^n = b^{n+1} - b^{n-1}$: restar b^n és sumar b^{n-1} i, després, restar b^{n+1} . I, després, aplicar l'algoritme de reducció.

Finalment, com que, per hipòtesi, podem fer la resta, i com que fem córrer les xifres cap a l'esquerre, alguna resta serà trivial i acabarem.

Multiplicació d'expressions àuriques

La dificultat que tenim en la suma d'expressions àuriques no la tenim en la multiplicació, i és el mateix algoritme “de l'escola”.

Multiplicació d'expressions àuriques

La dificultat que tenim en la suma d'expressions àuriques no la tenim en la multiplicació, i és el mateix algoritme “de l'escola”.

Efectivament, multiplicar per b^n és “fer córrer” els coeficients n llocs cap a l'esquerre; per tant, immediat.

I multiplicar x per un nombre y de més xifres és sumar, un a un, els productes de x per b^n per als valors de n tals que el seu coeficient en y sigui 1. (Com a l'escola, però la suma és més complicada.)

Expressions àuriques amb signe

De la mateixa manera que per a representar en una base entera un nombre real negatiu, x , fem servir el signe $-$ seguit de l'expressió de $-x$, podem fer això amb les expressions àuriques; tindrem les **expressions àuriques amb signe**.

Expressions àuriques amb signe

De la mateixa manera que per a representar en una base entera un nombre real negatiu, x , fem servir el signe $-$ seguit de l'expressió de $-x$, podem fer això amb les expressions àuriques; tindrem les **expressions àuriques amb signe**.

I els algoritmes anteriors de suma, resta, i multiplicació, juntament amb la regla dels signes, ens permeten sumar i multiplicar qualssevol dues **expressions àuriques amb signe**.

Conclusió

Teorema

Les expressions àuriques amb signe són exactament els elements de l'anell d'enters algebraics $\mathbb{Z}[b]$.

Conclusió

Teorema

Les expressions àuriques amb signe són exactament els elements de l'anell d'enters algebraics $\mathbb{Z}[b]$.

DEMOSTRACIÓ

Com que

- (a) 0 i 1 i b són expressions àuriques (amb signe),
- (b) l'oposat d'una expressió àurica amb signe és una expressió àurica amb signe,
- (c) la suma i el producte d'expressions àuriques amb signe són expressions àuriques amb signe,

el conjunt de les expressions àuriques amb signe és un subanell de $\mathbb{R}$ que conté 1 i b ; per tant, conté $\mathbb{Z}[b]$.

I ja hem vist fa molta estona que l'altra inclusió també se satisfà. $\square$

Corol·lari

Les expressions àuriques són exactament els elements positius de $\mathbb{Z}[b]$. $\square$

Cloenda

Corol·lari

Les expressions àuriques són exactament els elements positius de $\mathbb{Z}[b]$. $\square$

Teorema

Tot element de $\mathbb{Z}[b]$ és suma d'una quantitat finita d'unitats diferents. $\square$

teori
adeno
mbres

u
b
•
u
a
b
•
u
p
c