

# Sobre l'objectivitat de les matemàtiques

Artur Travesa

Febrer de 2026

## Contingut

<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>1 Objectivitat i matemàtiques</b>	<b>2</b>
1.1 Objectivitat . . . . .	2
1.2 Matemàtiques . . . . .	2
1.3 Els axiomes . . . . .	2
1.4 Les definicions . . . . .	2
1.5 Els teoremes . . . . .	2
1.6 Les demostracions . . . . .	3
1.7 Les conjectures . . . . .	3
1.8 Els enunciats indecidibles . . . . .	3
1.9 La primera accepció no s'hi aplica . . . . .	3
<b>2 Què és objectiu en matemàtiques?</b>	<b>3</b>
2.1 Les demostracions no són objectives . . . . .	4
2.2 Subjectivitat . . . . .	4
2.3 Mètodes de demostració . . . . .	4
2.4 El teorema d'Euclides . . . . .	4
2.5 Una primera demostració del teorema d'Euclides . . . . .	5
2.6 Una segona demostració del teorema d'Euclides . . . . .	5
2.7 L'estètica de les dues demostracions . . . . .	5
2.8 Els nombres de Fermat . . . . .	5
2.9 Una altra demostració del teorema d'Euclides . . . . .	5
2.10 Hem provat un resultat més fort . . . . .	6
2.11 Conclusió . . . . .	6
2.12 Resum . . . . .	6
<b>Cronologia</b>	<b>6</b>
<b>Referències</b>	<b>6</b>

## Introducció

Molt sovint sentim a dir que les matemàtiques són objectives i, fins i tot algunes vegades, que són l'única ciència objectiva. Fins a quin punt és certa aquesta afirmació? L'objectiu d'aquesta reflexió és donar-ne una visió més acurada i justificar una resposta negativa a la qüestió.

I si volem parlar amb precisió, convé començar per donar una definició dels termes que volem discutir: matemàtiques i objectiu.

# 1 Objectivitat i matemàtiques

## 1.1 Objectivitat

El *Diccionari essencial de la llengua catalana* proporciona, per al mot *objectiu*, les dues definicions següents (cf. [DELC, objectiu]) entre altres clarament no aplicables al cas.

- (a) D'una banda, *[Realitat, atribut, fet, coneixement] que existeix independentment del pensament;*
- (b) i de l'altra, *[Judici, anàlisi, decisió] que atén els fets i s'escapa de les reflexions, els sentiments i els prejudicis personals de l'observador.*

Se'm fa evident que, si parlem amb precisió, cap de les dues definicions no es pot aplicar a les matemàtiques. Intentaré desenvolupar planerament una justificació del perquè.

Respecte de la primera de les dues, podem dir que les matemàtiques sí que són coneixement; però aquest coneixement no existeix independentment del pensament.

## 1.2 Matemàtiques

Efectivament, de les matemàtiques podem dir, d'una manera simplificada, i ampliant-ne la definició del *Diccionari de la llengua catalana* (cf. [DLC, matemàtica])<sup>1</sup>, que són un coneixement que s'estructura en una col·lecció d'enunciats (els **axiomes**, les **definicions**, i els **teoremes**) sobre objectes ideals representats per signes d'un llenguatge lògic.

## 1.3 Els axiomes

Els **axiomes** són enunciats dels quals es predica la seva veritat (lògica) i són un punt de partida per als teoremes; la veritat de les conclusions dels teoremes de la matemàtica deriva, doncs, de la veritat d'aquests axiomes. En conseqüència, si se'n dedúís algun enunciat fals, o sigui, contradictori, això significaria que algun dels axiomes no és acceptable i caldria suprimir-lo, o canviar-lo, a fi de mantenir la consistència (pretesa) de les matemàtiques.

## 1.4 Les definicions

Les **definicions** són enunciats que permeten simplificar l'exposició lògica dels teoremes, i sense els quals seria molt feixuga, si no gairebé impossible, la tasca d'escriure (i entendre!) les matemàtiques. Acostumen a ser enunciats del tipus “una operació binària,  $*$  (llegim “asterisc”), en un conjunt  $A$ , s'anomena *commutativa* si per a tots els elements  $a, b$  de  $A$  se satisfà que  $a * b = b * a$ ”. Notem que en aquesta definició ja hi apareixen altres termes que han hagut de ser definits prèviament (conjunt, operació binària, element) i un enunciat construït a partir del símbol lògic d'igualtat: la frase “ $a$  asterisc  $b$  és igual a  $b$  asterisc  $a$ ” (notem la presència del verb de la frase en “és igual a”). Per a l'objectiu d'aquesta reflexió, no cal que ens entremenguem a dir quina és la manera vàlida de construir aquests enunciats simbòlics; és suficient dir que han de ser construïts d'acord amb certes regles perfectament determinades.

## 1.5 Els teoremes

I a partir dels axiomes i les definicions, es fan els teoremes, que són el corpus principal de les matemàtiques. Els **teoremes** són enunciats sobre objectes ideals definits prèviament i dels quals se n'ha de proporcionar alguna **demostració**. Un enunciat sense demostració no és cap teorema i, per tant, no és una veritat matemàtica.

---

<sup>1</sup> Ciència que tracta de la quantitat i de la forma tot estudiant-ne, des del punt de vista lògic, les seves relacions i estructures, la qual ha evolucionat des de pràctiques elementals de comptar i de mesurar i descriure formes d'objectes fins a un grau elevat d'idealització i d'abstracció que permet aplicar les seves tècniques a la resolució d'un nombre cada vegada més gran de problemes científics i tecnològics.

## 1.6 Les demostracions

Finalment, podem dir que les **demostracions** són successions d'enunciats que componen raonaments lògics fets amb els modes de raonament de la lògica deductiva (essencialment, el *modus ponendo ponens*, però també els altres), en les quals només hi intervenen els axiomes, les hipòtesis, i altres teoremes ja demostrats prèviament, i que permeten assegurar la validesa lògica de l'enunciat que es demostra.

## 1.7 Les conjetures

De fet, els matemàtics també tractem sovint amb **conjetures**. Les conjetures són enunciats que es creuen veritables, però dels quals no se n'ha trobat cap demostració (encara). Sovint, les conjetures es poden fer servir com a hipòtesis per a altres teoremes. Però, llavors, les conclusions del teorema no tenen per què ser veritat; ho seran si es demostra prèviament la conjetura, o si es demostren d'alguna altra manera independent de conjetures.

Per exemple, el febrer de 2026, l'enunciat següent és una conjetura, coneguda com a *hipòtesi de Riemann*.

*Els únics zeros no trivials de la funció zeta de Riemann estan a la recta vertical sobre el punt  $1/2$ .*

Òbviament, cal definir prèviament la funció zeta de Riemann, què són els zeros de la funció, dir quins en són els zeros trivials, i què vol dir “la recta vertical sobre el punt  $1/2$ ”.

No podem assegurar, perquè encara no s'ha demostrat, que “els únics zeros no trivials de la funció zeta de Riemann estiguin a la recta vertical sobre el punt  $1/2$ ”; això pot ser fals, i significaria que la hipòtesi de Riemann no seria cap veritat matemàtica. Doncs, aquest enunciat no és un teorema.

## 1.8 Els enunciats indecidibles

Encara podem considerar un altre tipus d'enunciats. D'acord amb el (primer) teorema d'incompletesa de Gödel, si un sistema axiomàtic és prou potent per a poder definir-hi el conjunt dels nombres naturals, hi ha enunciats del sistema dels quals no es pot demostrar ni la seva veritat ni la veritat de la seva negació; són enunciats anomenats **indecidibles** en el sistema axiomàtic. Entrar en aquest tema ens portaria molt lluny de la reflexió que pretenem i, per tant, el deixem aquí.

## 1.9 La primera accepció no s'hi aplica

Per tant, les matemàtiques no són independents del pensament; són, essencialment, un seguit de raonaments. La primera definició del diccionari sobre objectivat, doncs, no s'hi pot aplicar. En tot cas, la descripció que n'hem fet fa veure que les matemàtiques tenen un component d'objectivitat que les fa essencialment diferents de les altres ciències o àrees de coneixement.

## 2 Què és objectiu en matemàtiques?

Efectivament, allò que en les matemàtiques és **objectiu** és *si una demostració és o no és correcta*, perquè qualsevol pot comprovar que els raonaments utilitzats en una demostració són ben fets i que no s'hi fan servir intuïcions ni hipòtesis no demostrades. Però la demostració *és objectiva?*

No.

Aquí caldria aplicar la segona de les definicions del diccionari. Vegem que tampoc no s'hi pot aplicar.

## 2.1 Les demostracions no són objectives

Molt sovint hi ha demostracions diferents d'un mateix enunciat, que depenen de la *subjectivitat* de qui les fa. Diferents causes porten a demostracions diferents; per exemple, el públic a qui va dirigida, la formació prèvia de l'autor, la formació que se suposa que té el públic receptor, i també, en gran mesura, els gustos personals de l'autor.

I això darrer ha determinat el desenvolupament de les matemàtiques. Per què uns estudiem aritmètica, altres geometria, altres topologia, o càlcul numèric, o teoria de funcions, o equacions diferencials, per exemple, i no altres temes?

I per què aquells que estudiem aritmètica ho fem de manera algebraica, o geomètrica, o analítica, o computacional, o ... ?

I anàlogament, qui estudia altres branques de la matemàtica, per què les estudia en la forma en què ho fa i no en una altra?

A tall de resum:

- (a) Per què els matemàtics estudiem uns problemes i no uns altres?
- (b) Per què ho fem d'una determinada manera i no d'una altra?
- (c) I com triem els problemes que estudiem?

## 2.2 Subjectivitat

L'única resposta raonable que se m'acut és “per la pròpia *subjectivitat* de cadascú”: els gustos, els sentiments, la preparació i els prejudicis propis ens impulsen a fer, o a transmetre, les matemàtiques d'una determinada manera i no d'una altra. En posaré un exemple personal, que desitjo que ajudi a entendre aquesta reflexió sobre la *subjectivitat* de les matemàtiques.

## 2.3 Mètodes de demostració

Un dels mètodes vàlids de demostració és el mètode *per reducció a l'absurd*, en el qual se suposa que l'enunciat és fals i es prova que això implica una contradicció. Aquesta contradicció fa que l'enunciat no pugui ser fals, de manera que és vertader, com es vol provar. Sovint se'l confon amb el modus *tollendo tollens*, també anomenat demostració *per contradicció*, o *per pas al contrarecíproc*, que suposa vàlida la negació de la tesi d'una implicació i prova la negació de la hipòtesi. Des del punt de vista formal, no hi ha res a dir; són dos tipus vàlids de demostració i s'empren sovint.

Tot i que jo, de vegades, també els faig servir, m'estimo més fer un altre tipus de raonament, si m'és possible (o en sé). Més avall diré per què em semblen poc *estètics* i, algunes vegades, millorables.

## 2.4 El teorema d'Euclides

Dono per descomptat que hom coneix quins són els nombres naturals, i que un nombre natural és primer si és més gran que 1 i només és divisible per 1 i per ell mateix.

I dono per conegut el teorema fonamental de l'Aritmètica, que assegura que *tot nombre natural més gran que 1 és un producte de nombres primers, i que aquest producte només es pot fer d'una manera, si ordenem de manera creixent els nombres primers que hi apareixen*.

El teorema d'Euclides es pot enunciar com segueix.

**Teorema 2.1** (Euclides). *El conjunt dels nombres naturals primers és infinit.*

## 2.5 Una primera demostració del teorema d'Euclides

DEMOSTRACIÓ (1). Una demostració habitual (no pas la demostració d'Euclides), per reducció a l'absurd, es pot fer en els termes següents.

Notem que 2 és un nombre primer, de manera que el conjunt de nombres primers és no buit. Suposem que aquest conjunt fos finit, anomenem  $p_1 = 2, p_2, \dots, p_n$  tots els seus elements, i sigui  $N := p_1 \cdots p_n + 1$ . Aquest nombre és estrictament més gran que 1, de manera que descompon com a producte de nombres primers. Si  $p$  és un nombre primer que divideix  $N$ , llavors  $p$  hauria de ser un dels nombres  $p_1, \dots, p_n$ , perquè aquests són tots. Però, llavors,  $p$  dividiria alhora  $N$  i el producte  $N - 1 = p_1 \cdots p_n$ , de manera que dividiria la seva diferència,  $1 = N - (N - 1)$ ; absurd, perquè 1 no és divisible per cap nombre primer.

Aquest absurd demostra que la suposició que hem fet no pot ser veritat, de manera que, efectivament, el conjunt dels nombres primers és infinit.  $\square$

## 2.6 Una segona demostració del teorema d'Euclides

És molt senzill convertir aquesta demostració, per reducció a l'absurd, en una demostració que no fa servir ni la contradicció ni la reducció a l'absurd (essencialment, i saltant-nos la distància temporal i escrivint-la en llenguatge actual, la demostració d'Euclides). Vegem-ho.

DEMOSTRACIÓ (2). Refarem alguns arguments de la demostració anterior. Comencem de la mateixa manera: notem que 2 és un nombre primer, de manera que el conjunt de nombres primers és no buit. Ara, no suposo que el conjunt de nombres primers és finit, sinó que considero un subconjunt finit qualsevol (no buit) de nombres primers, que anomeno, com abans,  $p_1, \dots, p_n$ , i considero el nombre  $N := p_1 \cdots p_n + 1$ . Com abans, també, el nombre és més gran estrictament que 1, de manera que és divisible per un nombre primer,  $p$ , que no pot ser cap dels nombres primers  $p_1, \dots, p_n$ , perquè cadascun d'aquests  $p_i$  divideix el producte  $p_1 \cdots p_n$  i, per tant, no divideix  $p_1 \cdots p_n + 1 = N$ . Per tant, per a cada conjunt finit de nombres primers hi ha un altre conjunt més gran de nombres primers. Això és dir que la quantitat de nombres primers (el cardinal del conjunt) és més gran que qualsevol nombre natural; és a dir, infinit.  $\square$

## 2.7 L'estètica de les dues demostracions

Notem que, en aquesta darrera demostració, el càlcul que fem és el mateix, però no ho és l'argument. I té un avantatge sobre l'anterior. Allò que assegurem en la primera demostració després de suposar veritat la negació de la tesi, no té per què ser veritat, perquè estem usant una hipòtesi falsa. En canvi, no hi ha falsedats a la segona demostració. A mi em sembla, estèticament, més bonica i, en aquest cas, no és més complicada.

Es poden donar altres demostracions, en funció del públic, o de la importància que es vol donar a aquest o a algun altre resultat. En posaré un exemple que sovint he fet servir a classe.

## 2.8 Els nombres de Fermat

Suposem que prèviament hem demostrat que *els nombres de Fermat són coprimers dos a dos*; és a dir, que dos de diferents no tenen cap divisor primer comú. (Això es pot demostrar molt fàcilment a partir de la fórmula  $F_{n+1} - 2 = F_0 \cdots F_n$ ,  $n \geq 0$ , on  $F_k := 2^{2^k} + 1$ ,  $k \geq 0$ , són els nombres de Fermat, que, alhora, es prova immediatament, per exemple, per inducció.)

## 2.9 Una altra demostració del teorema d'Euclides

Podem fer una tercera demostració del teorema d'Euclides a partir d'aquest resultat (i que, òbviament, és molt posterior a Euclides).

DEMOSTRACIÓ (3). Com que hi ha una infinitat de nombres de Fermat i cadascun és divisible per algun nombre primer, i com que si un nombre primer divideix un nombre de Fermat, no en divideix cap altre, tenim que el conjunt dels nombres primers és infinit.  $\square$

## 2.10 Hem provat un resultat més fort

No només hem provat el teorema d'Euclides, sinó que hem provat un resultat més fort: *el conjunt dels nombres primers que divideixen algun nombre de Fermat és infinit*.

I això obre la porta a preguntes diverses sobre el tema. Per exemple: És cert que tot nombre primer, llevat del 2, divideix algun nombre de Fermat?

O, més generalment, en lloc de preguntar-nos si el conjunt dels nombres primers que no divideixen cap nombre de Fermat és el conjunt format únicament pel nombre 2, podem preguntar-nos: aquest conjunt, és finit?, o és infinit?

Així, segons com sigui una demostració, ens permet fer preguntes noves sobre el tema. Per a mi, doncs, i segurament per a molts matemàtics, la fa molt més interessant.

## 2.11 Conclusió

Acabo la reflexió. Alguna de les demostracions és *objectiva*? No. Cadascuna depèn de les reflexions, els sentiments o els prejudicis personals de qui la fa i, fins i tot, de qui la llegeix, perquè a cadascú n'hi pot semblar millor una que una altra. Hi ha, doncs, un component *estètic* que les allunya de l'objectivitat.

Això sí, qualsevol pot adonar-se que les tres propostes són demostracions vàlides del teorema d'Euclides; és a dir, el teorema d'Euclides sí que és una veritat matemàtica **objectiva**.

## 2.12 Resum

Com a resum, doncs, podríem dir que els teoremes de la matemàtica sí que són veritats matemàtiques objectives, però que les matemàtiques, com a tals, no ho són. I deixeu-me afegir, per sort!

## Cronologia

**Euclides** (Εὐκλείδης) d'Alexandria (Alexandria, Egipte, aprox. 323 a.C.; Alexandria, Egipte, aprox. 285 a.C.)

Pierre de **Fermat** (Beaumont de Lomagne, França, 17 d'agost de 1601; Castres, França, 12 de gener de 1665)

Kurt Friedrich **Gödel** (Brno, Imperi austrohongarès, 28 d'abril de 1906; Princeton, Nova Jersey, Estats Units, 14 de gener de 1978)

## Referències

- [DLC] Institut d'Estudis Catalans: *Diccionari de la llengua catalana*. Institut d'Estudis Catalans. Barcelona. Segona edició; des de 2007, s'actualitza sovint. Recurs en línia, consultable en <https://dlc.iec.cat/>
- [DELIC] Institut d'Estudis Catalans: *Diccionari essencial de la llengua catalana*. Institut d'Estudis Catalans. Barcelona. Des de 2005, s'actualitza sovint. Recurs en línia, consultable en <https://deiec.iec.cat/>
- [Termcat] Termcat: *Cercaterm*. Termcat, Centre de terminologia. Departament de Política Lingüística, Generalitat de Catalunya. Barcelona (1985). El recurs en línia *Cercaterm*, s'actualitza sovint i és consultable en <https://www.termcat.cat/ca/cercaterm/>