Capítol 25

Canvis de base

Artur Travesa Sessió 2a. del dia 12 de març de 1997

El contingut d'aquest capítol és, essencialment, el de l'exposició oral que, en el Seminari de Teoria de Nombres (UB–UAB–UPC) del curs 1996-97, es va dedicar als canvis de base per a $\mathbf{GL}(2)$. No s'ha entrat a considerar els detalls de la majoria dels resultats que s'hi expliquen; de fet, només es pretén donar els resultats i algunes referències per a la seva demostració.

Concretament, la primera secció conté, a manera d'introducció motivadora, els canvis de base per al cas abelià; és a dir, els canvis de base per a $\mathbf{GL}(1)$. La segona secció conté les definicions de les funcions L i dels factors ε en el cas abelià, i la prova de les propietats del canvi de base en aquest cas. A continuació, es dóna la definició del canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en els casos dels L-grups, local i global, sense entrar en les demostracions dels resultats, que fan servir la fórmula de les traces, que és objectiu del capítol 24, i les representacions dels grups de Weil, que són objectiu del capítol 26. Així, doncs, la tercera secció conté la definició dels canvis de base per als L-grups, que han estat introduïts en el capítol 20; i les dues darreres contenen les definicions dels canvis de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en els casos local i global, respectivament, i l'enunciat de les propietats fonamentals que ens interessen.

§1. Canvi de base per a GL(1)

Sigui F un cos local o bé un cos global. Usarem les mateixes notacions que en el capítol 23; en particular, posarem G_F per a indicar el grup de

Galois absolut de F, i $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ designarà el grup de Weil per a $\overline{F}|F$. En aquesta secció, considerarem una extensió cíclica $E|F$ de grau primer, $[E:F] = \ell$; siguin, a més a més, $\Gamma := \mathrm{Gal}(E|F)$ el seu grup de Galois, i σ un generador de Γ.

El canvi de base per a $\mathbf{GL}(1)$ estableix una relació entre les representacions de dimensió 1 del grup de Weil W_F i les del grup de Weil W_E. Comencem per establir el resultat següent.

1.1. Lema. *Existeix un diagrama commutatiu amb les files exactes:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 1 & \longrightarrow & W_E & \longrightarrow & W_F & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{=} & & \\ 1 & \longrightarrow & C_E^{1-\sigma} & \longrightarrow & C_E & \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} & C_F & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1\,. \end{array}$$

Demostració. Per a l'extensió finita $E|F$, l'estudi dels grups de Weil ens proporciona un diagrama commutatiu (cf. la proposició **3.6** del capítol 23)

$$\begin{array}{ccc} W_E^{ab} & \xrightarrow{\text{incl}} & W_F^{ab}\,, \\ {\scriptstyle r_E,\,\simeq}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle r_F,\,\simeq} \\ C_E & \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} & C_F\,, \end{array}$$

a partir del qual es construeix el diagrama que cerquem de la manera següent. En primer lloc, considerem els inversos dels isomorfismes r_E i r_F i fem la composició amb les projeccions $W_E \xrightarrow{\text{proj}} W_E^{ab}$, $W_F \xrightarrow{\text{proj}} W_F^{ab}$; obtenim el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} W_E & \xrightarrow{\text{incl}} & W_F \\ {\scriptstyle \text{proj}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{proj}} \\ W_E^{ab} & \xrightarrow{\text{incl}} & W_F^{ab} \\ {\scriptstyle r_E^{-1},\,\simeq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_F^{-1},\,\simeq} \\ C_E & \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} & C_F\,. \end{array}$$

En virtut del teorema 90 de Hilbert, el morfisme induït per la norma, $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$, té nucli el subgrup $C_E^{1-\sigma}$ format pels elements de C_E de la forma $\dfrac{z}{\sigma(z)}$, amb $z \in C_E$; cal calcular, doncs, el conucli dels dos morfismes $W_E \xrightarrow{\text{incl}} W_F$ i $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$.

El diagrama anterior es pot completar al diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc}
W_E & \xrightarrow{\text{incl}} & W_F & \xrightarrow{\text{proj}} & W_F/W_E & \xrightarrow{\varphi,\,\simeq} & G_F/G_E \\
{\scriptstyle\text{proj}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{proj}} & & & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
W_E^{ab} & \xrightarrow{\text{incl}} & W_F^{ab} & \xrightarrow{\varphi} & G_F^{ab} & \xrightarrow{\text{proj}} & \mathrm{Gal}(E|F) \\
{\scriptstyle r_E^{-1},\simeq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_F^{-1},\simeq} & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
C_E & \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} & C_F & \xrightarrow{\varphi\circ r_F} & G_F^{ab} & \xrightarrow{\text{proj}} & \Gamma;
\end{array}$$

aquesta commutativitat dóna automàticament la definició dels morfismes que resten en el diagrama que volem, l'exactitud de la primera fila, i la commutativitat. En particular, el morfisme $C_F \longrightarrow G_F^{ab}$ és el morfisme llei de reciprocitat de la teoria de cossos de classes; és a dir, el símbol nòrmic.

D'altra banda, resta comprovar l'exactitud de la segona fila en C_F i en Γ. L'exhaustivitat de $C_F \longrightarrow \Gamma$ es dedueix trivialment de l'exhaustivitat de $W_F \longrightarrow \Gamma$; per tant, només cal veure que el nucli de $C_F \longrightarrow \Gamma$ és la imatge de $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$. Ara bé, si tenim en compte que $W_F^{ab} \xrightarrow{r_F^{-1}} C_F$ és un isomorfisme i que la primera fila és exacta, veiem que el nucli del morfisme $C_F \longrightarrow \Gamma$ és la imatge de $W_E \longrightarrow C_F$; i, com que $W_E \longrightarrow C_E$ és exhaustiu, el nucli que cerquem és la imatge de $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$. Aixo acaba la prova. □

Recordem que, donat un grup topològic G, una representació (complexa) de G és un morfisme continu de grups $G \xrightarrow{\rho} \mathbf{GL}(V)$, on V és un espai vectorial complex de dimensió finita. I un quasicaràcter de G és una representació de dimensió 1; és a dir, un morfisme continu de grups $G \longrightarrow \mathbb{C}^*$. D'altra banda, és evident que els quasicaràcters de G es poden identificar amb els quasicaràcters de G^{ab}. En particular, i en virtut de l'isomorfisme $W_F^{ab} \simeq C_F$, tenim que:

1.2. Corol·lari. *Les representacions de dimensió* 1 *del grup de Weil* W_F *s'identifiquen amb els quasicaràcters de* C_F. □

Designem per $\mathcal{A}(F)$, $\mathcal{A}(E)$ els conjunts de quasicaràcters de C_F, C_E, respectivament.

1.3. Definició. S'anomena aixecament de canvi de base per a l'extensió $E|F$ l'aplicació $\mathcal{A}(F) \to \mathcal{A}(E)$ definida per $\eta \mapsto \eta_{E|F} := \eta \circ \mathrm{N}_{E|F}$, on $\mathrm{N}_{E|F}$ és l'aplicació norma $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$.

El grup de Galois Γ actua de manera natural en C_E; escriurem $\gamma(z)$ per a indicar l'acció d'un element qualsevol $\gamma \in \Gamma$ en un element $z \in C_E$. Això ens permet definir una acció natural de Γ en el conjunt $\mathcal{A}(E)$ per la fórmula $\theta^\gamma(z) := \theta(\gamma z)$, per a $\gamma \in \Gamma$, $\theta \in \mathcal{A}(E)$, i $z \in C_E$, ja que l'aplicació $z \mapsto \theta(\gamma z)$ és un quasicaràcter de C_E. Així, $\mathcal{A}(E)$ és un Γ-mòdul.

Sigui $\hat{\Gamma} := \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ el conjunt dels quasicaràcters (= caràcters) de Γ. Com que $\Gamma \simeq C_F/\mathrm{N}_{E|F}\, C_E$, $\hat{\Gamma}$ es pot identificar amb el conjunt dels quasicaràcters de C_F que són trivials en $\mathrm{N}_{E|F}\, C_E$. D'aquesta manera, $\hat{\Gamma}$ actua en $\mathcal{A}(F)$ per multiplicació; en efecte, si pensem en un element $\zeta \in \hat{\Gamma}$ com un quasicaràcter de C_F (trivial en $\mathrm{N}_{E|F}\, C_E$), i si $\eta \in \mathcal{A}(F)$ és un quasicaràcter qualsevol, el producte $\eta\zeta$ també és un quasicaràcter de C_F. Així, $\mathcal{A}(F)$ és un $\hat{\Gamma}$-mòdul.

1.4. Teorema. *L'aixecament de canvi de base $\eta \mapsto \eta_{E|F}$ defineix una bijecció del conjunt $\mathcal{A}(F)/\hat{\Gamma}$, fomat per les òrbites per l'acció de $\hat{\Gamma}$ en $\mathcal{A}(F)$, en el conjunt $\mathcal{A}(E)^\Gamma$, format pels elements de $\mathcal{A}(E)$ que són invariants per a l'acció de Γ.*

Demostració. Anomenem momentàniament f l'aixecament de canvi de base $\mathcal{A}(F) \xrightarrow{f} \mathcal{A}(E)$; és a dir, $f(\eta) := \eta_{E|F}$, per a $\eta \in \mathcal{A}(F)$. Observem, en primer lloc, que per a tot element $\eta \in \mathcal{A}(F)$, la imatge $f(\eta)$ és invariant per a l'acció de Γ en $\mathcal{A}(E)$; en efecte, si $\gamma \in \Gamma$ i $z \in C_E$, se satisfà la igualtat $\eta^\gamma_{E|F}(z) = \eta_{E|F}(\gamma z) = \eta(\mathrm{N}_{E|F}(\gamma z)) = \eta(\mathrm{N}_{E|F}(z)) = \eta_{E|F}(z)$, perquè $\mathrm{N}_{E|F}(\gamma z) = \mathrm{N}_{E|F}(z)$. A més a més, si pensem $\zeta \in \hat{\Gamma}$ com un quasicaràcter de C_F que és trivial en $\mathrm{N}_{E|F}\, C_E$, se satisfà la igualtat $f(\eta\zeta) = (\eta\zeta)\circ\mathrm{N}_{E|F} = (\eta\circ\mathrm{N}_{E|F})(\zeta\circ\mathrm{N}_{E|F}) = (\eta\circ\mathrm{N}_{E|F}) = f(\eta)$; és a dir, dos elements de $\mathcal{A}(F)$ que pertanyen a la mateixa òrbita per a l'acció de $\hat{\Gamma}$ tenen la mateixa imatge en $\mathcal{A}(E)^\Gamma$. Per tant, f defineix, per pas al quocient, una aplicació del conjunt $\mathcal{A}(F)/\hat{\Gamma}$ en el conjunt $\mathcal{A}(E)^\Gamma$.

La injectivitat d'aquesta aplicació és immediata: siguin $\eta, \eta' \in \mathcal{A}(F)$ tals que $f(\eta) = f(\eta')$; llavors, $\eta^{-1}\eta'$ és un quasicaràcter de C_F que és trivial en $\mathrm{N}_{E|F}C_E$; per tant, és un element de $\hat{\Gamma}$, i $\eta' = \eta(\eta^{-1}\eta')$; és a dir, η i η' pertanyen a la mateixa òrbita de $\mathcal{A}(F)$ per a l'acció de $\hat{\Gamma}$.

Resta veure l'exhaustivitat de l'aplicació $\mathcal{A}(F)/\hat{\Gamma} \to \mathcal{A}(E)^{\Gamma}$. Considerem $\theta \in \mathcal{A}(E)^{\Gamma}$; és a dir, θ és un quasicaràcter de C_E invariant per a l'acció de Γ; cal veure que existeix $\eta \in \mathcal{A}(F)$ tal que $\theta = \eta_{E|F}$.

El fet que θ sigui invariant per a l'acció de Γ ens diu que θ és un morfisme de grups $\theta : C_E \to \mathbb{C}^*$ trivial en $C_E^{1-\sigma}$; ara, si tenim en compte l'isomorfisme $C_E/C_E^{1-\sigma} \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F},\, \simeq} \mathrm{N}_{E|F}C_E$, veiem que existeix un quasicaràcter $\eta' : \mathrm{N}_{E|F}C_E \to \mathbb{C}^*$ tal que $\theta = \eta' \circ \mathrm{N}_{E|F}$. Es tracta d'estendre aquest morfisme a tot el grup C_F. Per a això, considerem la representació induïda $\mathrm{Ind}_{\mathrm{N}_{E|F}C_E}^{C_F}(\eta')$; és una representació de C_F de dimensió $[C_F : \mathrm{N}_{E|F}C_E] = \#C_F/\mathrm{N}_{E|F}C_E = \#\Gamma = \ell$, ja que, en virtut del lema anterior, es té un isomorfisme $C_F/\mathrm{N}_{E|F}C_E \simeq \Gamma$; com que C_F és commutatiu, aquesta representació induïda no és irreductible. La fórmula de reciprocitat de Frobenius ens permet afirmar que existeix un quasicaràcter $\eta : C_F \to \mathbb{C}^*$, component de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{N}_{E|F}C_E}^{C_F}(\eta')$, la restricció del qual a $\mathrm{N}_{E|F}C_E$ és el quasicaràcter η'. Llavors, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ i $\eta_{E|F} = \eta \circ \mathrm{N}_{E|F} = \eta' \circ \mathrm{N}_{E|F} = \theta$, fet que demostra l'exhaustivitat de l'aplicació $\mathcal{A}(F)/\hat{\Gamma} \to \mathcal{A}(E)^{\Gamma}$. $\square$

1.5. Observació. En la demostració d'aquest resultat s'han usat resultats que no són trivials; sobretot, els que fan referència a la inducció de representacions. Per a una millor comprensió, es recomana la lectura de la secció segona de [**Ta 79**].

Així, doncs, si $E|F$ és cíclica de grau primer ℓ, i si $\Gamma := \mathrm{Gal}(E|F)$ és el seu grup de Galois, obtenim una bijecció entre les representacions de dimensió 1 del grup de Weil W_F, mòdul l'acció de $\hat{\Gamma}$, i les representacions de dimensió 1 del grup de Weil W_E invariants per a l'acció de Γ.

§2. Quasicaràcters, funcions L i factors èpsilon

Per a veure les propietats més importants del canvi de base per a $\mathbf{GL}(1)$, cal tenir presents les definicions de les funcions L i dels factors ε associats a les representacions de dimensió 1 dels grups de Weil; és a dir, als quasicaràcters de C_F. Recordem que s'anomena quasicaràcter d'un grup topològic G tot morfisme continu de grups $G \to \mathbb{C}^*$.

Fixem, en primer lloc, un cos local F; després estudiarem el cas global. Per a tot nombre complex s, sigui $C_F \xrightarrow{\omega_s} \mathbb{C}^*$ el quasicaràcter definit per $z \mapsto |z|^s$, on $|z|$ indica, en cada cas, el valor absolut de $z \in C_F$. Alguns autors anomenen aquests quasicaràcters els quasicaràcters principals (cf. [**La 70**]).

2.1. Observació. En el cas global, també es defineixen els quasicaràcters principals de la mateixa manera; és a dir, si F és un cos global, sigui $C_F \xrightarrow{\omega_s} \mathbb{C}^*$ el quasicaràcter definit per $z \mapsto |z|^s$, on $|z|$ indica el valor absolut de $z \in C_F$.

La proposició següent ens proporciona tots els quasicaràcters de C_F en el cas en què F és un cos local arquimedià.

2.2. Proposició. *Si $F = \mathbb{R}$, els quasicaràcters de $C_F = \mathbb{R}^*$ són els $X^{-N}\omega_s$, on $\mathbb{R} \xrightarrow{X} \mathbb{C}$ és la immersió, $N \in \{0, 1\}$, i $s \in \mathbb{C}$. Si $F = \mathbb{C}$, els quasicaràcters de $C_F = \mathbb{C}^*$ són els $X^{-N}\omega_s$, on $\mathbb{C} \xrightarrow{X} \mathbb{C}$ és qualsevol de les dues immersions (la identitat i la conjugació complexa, c), $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 0$, i $s \in \mathbb{C}$.*

Demostració. Evidentment, les aplicacions escrites a l'enunciat són quasicaràcters de C_F en cada cas; veiem que tot quasicaràcter de C_F és un d'aquests. Comencem pel cas en què $F = \mathbb{R}$.

Sigui $\eta : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ un quasicaràcter qualsevol. Per composició amb el valor absolut usual de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* \xrightarrow{|\ |} \mathbb{R}_{>0}$, obtenim un morfisme continu de grups $|\eta| : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_{>0}$. Considerem un nombre real positiu, $x_0 > 0$, $x_0 \neq 1$, i definim el nombre $s_1 \in \mathbb{R}$ per la igualtat $|\eta(x_0)| = x_0^{s_1}$. Per continuïtat, per a totes les potències d'exponent racional, x_0^q, $q \in \mathbb{Q}$, és $|\eta(x_0^q)| = |x_0^q|^{s_1}$; com que aquestes potències formen un subgrup dens de $\mathbb{R}_{>0}$, obtenim que la restricció a $\mathbb{R}_{>0}$ de $|\eta|$ és el morfisme continu donat per l'assignació $r \mapsto |r|^{s_1}$. D'altra banda, com que $|\eta(-1)|^2 = |\eta((-1)^2)| = |\eta(1)| = 1$, ha de ser $|\eta(-1)| = 1$, de manera que per a tot nombre real positiu r és $|\eta(-r)| = |\eta(-1)|\,|\eta(r)| = |-r|^{s_1}$; en conseqüència, $|\eta| = |\ |^{s_1} = \omega_{s_1}$.

Així, el quasicaràcter $|\eta|\omega_{-s_1}$ és el trivial; si es vol, el quasicaràcter $\eta\omega_{-s_1}$ és un caràcter (té imatge inclosa en $\mathbf{U}(1)$); per tant, podem definir $\theta : \mathbb{R}^* \to \mathbf{U}(1) \subseteq \mathbb{C}^*$ per la fórmula $r \mapsto \dfrac{\eta(r)}{|r|^{s_1}}$ i obtenim un caràcter de $\mathbb{R}^*$. La restricció a $\mathbb{R}_{>0}$ d'aquest caràcter és un caràcter $\theta' : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbf{U}(1)$. Ara, si definim $s_2 \in \mathbb{R}$ per la igualtat $\theta'(x_0) = x_0^{is_2}$, obtenim, també per continuïtat i per densitat, que $\theta'(r) = |r|^{is_2}$, per a tot $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Això ens diu que la restricció del quasicaràcter η a $\mathbb{R}_{>0}$ és de la forma $\eta(r) = |r|^s$, on $s := s_1 + is_2 \in \mathbb{C}$. Com que $\eta(-1) = \pm 1$, això proporciona dues possibilitats per a la restricció de l'aplicació η a $\mathbb{R}_{<0}$: si $\eta(-1) = 1$, obtenim que $\eta(r) = |r|^s$, per a tot $r \in \mathbb{R}^*$; i si $\eta(-1) = -1$, obtenim que $\eta(-r) = -|r|^s = \dfrac{1}{-r}|-r|^{s+1}$, i que $\eta(r) = \dfrac{1}{r}|r|^{s+1}$, per a tot $r > 0$; per tant, el quasicaràcter η és de la forma $\eta(r) = r^{-N}\omega^s$, per a $s \in \mathbb{C}$ i $N \in \{0,1\}$; és a dir, $\eta = X^{-N}\omega_s$, com volíem provar.

Estudiem ara el cas en què $F = \mathbb{C}$. Suposem que $\eta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ és un quasicaràcter; com que $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbf{U}(1)$, via l'assignació $z \mapsto (|z|, \dfrac{z}{|z|})$, podem pensar η com el producte d'un quasicaràcter de $\mathbb{R}_{>0}$ i un quasicaràcter (=caràcter) de $\mathbf{U}(1)$. Pel que hem vist fa un moment, els quasicaràcters de $\mathbb{R}_{>0}$ són (les restriccions a $\mathbb{R}_{>0}$ de) els ω_s, $s \in \mathbb{C}$; per tant, resta estudiar els caràcters de $\mathbf{U}(1)$. Ara bé, un morfisme continu $\mathbf{U}(1) \to \mathbb{C}^*$ és una representació de dimensió $\mathbf{1}$ del tor $\mathbb{T} = \mathbf{U}(1)$; per tant, té imatge inclosa en $\mathbf{U}(1)$ i és de la forma $z \mapsto z^N$, amb $N \in \mathbb{Z}$ (cf. el teorema **2.12** del capítol 5).

En conseqüència, η és de la forma $\eta(rz) = |r|^s z^N$, per a $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $z \in \mathbf{U}(1)$, $s \in \mathbb{C}$ i $N \in \mathbb{Z}$. Si ara tenim en compte que, si $N > 0$, és $z^N = c(z)^{-N}$, per a $z \in \mathbf{U}(1)$, obtenim que, efectivament, η és de la forma $\eta = X^{-N}\omega_s$, amb $s \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 0$, i $X : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la identitat o bé la conjugació complexa, com volíem demostrar. □

2.3. Exemples. • En el cas en què $F = \mathbb{R}$, la inclusió $\mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ és el quasicaràcter $X^{-1}\omega_2$, on X és la inclusió de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

• En el cas $F = \mathbb{C}$, la identitat $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ és el quasicaràcter $c^{-1}\omega_2$, on c és la conjugació complexa. I la conjugació complexa, $c : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, és el quasicaràcter $X^{-1}\omega_2$, on X és la identitat.

A continuació, es tracta de determinar els quasicaràcters de $C_F = F^*$ en el cas en què F és un cos local no arquimedià; és a dir, un cos extensió finita del cos $\mathbb{Q}_p$ dels nombres p-àdics, per a algun nombre primer p.

Comencem per fixar les notacions: $\mathcal{O} := \mathcal{O}_F$ designarà l'anell dels enters de F, $U = U_F$, el grup de les unitats de $\mathcal{O}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F$, l'ideal maximal de $\mathcal{O}$, i $\pi := \pi_F$ un generador de $\mathfrak{p}$. Indicarem per $|\ |$ el valor absolut de F, normalitzat de manera que $|\pi| = \dfrac{1}{\mathrm{N}_{F|\mathbb{Q}_p}\,\mathfrak{p}}$. (Recordem que $\mathrm{N}_{F|\mathbb{Q}_p}\,\mathfrak{p} =: q$ és el cardinal del cos residual $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$.)

2.4. Proposició. *Sigui $\eta : F^* \to \mathbb{C}^*$ un quasicaràcter de $C_F = F^*$. Existeixen un caràcter $\chi : U \to \mathbf{U}(1)$ i un nombre complex $s \in \mathbb{C}$, definit mòdul $\dfrac{2\pi i}{\log(\mathrm{N}_{F|\mathbb{Q}_p}\,\mathfrak{p})}$, tals que per a tot $x = u\pi^n \in F^*$, $u \in U$, $n \in \mathbb{Z}$, és $\eta(x) = \chi(u)|x|^s$; o sigui, $\eta = \chi\omega_s$, per a l'extensió trivial de χ a F^*. Els caràcters $\chi : U \to \mathbf{U}(1)$ són els morfismes continus de grups, i tots tenen imatge finita.*

Demostració. Comencem per recordar que $F^* \simeq U \times \langle\pi\rangle$; en efecte, tot element $x \in F^*$ s'escriu de manera única en la forma $x = u\pi^n$, amb $u \in U$, $n \in \mathbb{Z}$. Com a conseqüència, tot morfisme continu de grups $\eta : F^* \to \mathbb{C}^*$ s'obté de la multiplicació de dos morfismes continus de grups: $\chi : U \to \mathbb{C}^*$, i $\eta' : \langle\pi\rangle \to \mathbb{C}^*$. Ara, un morfisme continu de grups $\chi : U \to \mathbb{C}^*$ és un caràcter de U; en efecte, U és un grup compacte i $\mathbf{U}(1)$ és el subgrup compacte maximal de $\mathbb{C}^*$; per tant, χ té imatge inclosa en $\mathbf{U}(1)$. A més a més, com que els subgrups $1 + \mathfrak{p}^n \subseteq U$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, són subgrups compactes infinits propis, i tot subgrup compacte propi de $\mathbf{U}(1)$ és finit, el morfisme $\chi : U \to \mathbf{U}(1)$ no pot ser injectiu; això implica que el nucli de χ és un subgrup compacte no trivial de U; i, com que els subgrups $1 + \mathfrak{p}^n$, $n \geq 0$, formen un sistema fonamental d'entorns compactes de 1, el nucli de χ ha de contenir algun d'aquests subgrups; en conseqüència, el nucli de χ és un subgrup d'índex finit de U; és a dir, la imatge de χ és un subgrup finit de $\mathbf{U}(1)$.

Resta estudiar els quasicaràcters $\eta' : \langle\pi\rangle \to \mathbb{C}^*$. Com que π genera el grup $\langle\pi\rangle$, qualsevol morfisme de grups $\langle\pi\rangle \to G$, on G és un grup qualsevol, és determinat per la imatge de π. En particular, el valor absolut de η' és un morfisme continu de grups $|\eta'| : \langle\pi\rangle \to \mathbb{R}^{>0}$, de manera que existeix un nombre real $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|\eta'(\pi)| = |\pi|^{s_1}$; per tant, $|\eta'(\pi^n)| = |\pi^n|^{s_1}$, per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Ara, el morfisme $\frac{\eta}{|\ |^{s_1}} : \langle\pi\rangle \to \mathbb{C}^*$ té imatge inclosa en $\mathbf{U}(1)$; per tant, existeix un nombre real $s_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\eta(\pi^n)}{|\pi^n|^{s_1}} = |pi^n|^{is_2}$, per a tot $n \in \mathbb{Z}$. En conseqüència, per a $s := s_1 + is_2$ i per a tot $n \in \mathbb{Z}$ és $\eta(\pi^n) = |\pi^n|^s$. Només resta veure que s és determinat mòdul $\frac{2\pi i}{\log(\mathrm{N}_{F|\mathbb{Q}_p}\mathfrak{p})}$; és a dir, que s_2 és determinat mòdul $\frac{2\pi}{\log q}$; però això és immediat, perquè $|\pi| = q^{-1} = e^{-\log(q)}$. $\square$

Convé recordar, ara, la definició de les funcions L associades als quasicaràcters en el cas local.

2.5. Definició. Sigui F un cos local qualsevol. Donat un quasicaràcter $\eta \in \mathcal{A}(F)$, es defineix la funció L sobre η de la manera següent:

$$L(\eta) = \begin{cases} L(X^{-N}\omega_s) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), & \text{si } F = \mathbb{R}; \\ L(X^{-N}\omega_s) := \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s), & \text{si } F = \mathbb{C}; \end{cases}$$

$$L(\eta) = \begin{cases} (1 - \eta(\pi))^{-1}, & \text{si } F \text{ és no arquimedià i } \eta \text{ és no ramificat;} \\ 1, & \text{si } F \text{ és no arquimedià i } \eta \text{ és ramificat.} \end{cases}$$

D'aquesta manera, L és una funció $\mathcal{A}(F) \xrightarrow{L} \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$; és a dir, assigna a cada quasicaràcter de F un nombre complex (o bé ∞).

2.6. Observació. Recordem que un quasicaràcter $\eta : F^* \to \mathbb{C}^*$ s'anomena no ramificat si, i només si, la seva restricció a U és el caràcter trivial; en cas contrari, s'anomena ramificat.

2.7. Observació. Tot quasicaràcter $\eta \in \mathcal{A}(F)$ és un producte de la forma $\eta = \chi\omega_s$, per a un nombre complex s i un caràcter $\chi : F^* \to \mathbf{U}(1)$. Així, donat un quasicaràcter qualsevol $\eta : F^* \to \mathbb{C}^*$, podem considerar la funció de variable complexa $L(\eta,\ ) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cap \{\infty\}$ donada per $s \mapsto L(\eta, s) := L(\eta\omega_s)$. D'aquesta manera, per a tot quasicaràcter η, la funció $s \mapsto L(\eta, s)$ és una funció meromorfa de s que no té zeros, determinada essencialment a partir de qualsevol caràcter $\chi : F^* \to \mathbf{U}(1)$ tal que $\eta = \chi\omega_s$, per a algun nombre complex $s \in \mathbb{C}$. Si es vol, determinada essencialment a partir de l'únic caràcter $\chi : U \to \mathbf{U}(1)$ tal que $\eta = \chi\omega_s$, per a algun nombre complex $s \in \mathbb{C}$, on $U = \{\pm 1\}$, si $F = \mathbb{R}$, $U = \mathbf{U}(1)$, si $F = \mathbb{C}$, i U el grup de les unitats de $\mathcal{O}$, si F és no arquimedià. (Observem que U és el subgrup compacte maximal de F^*.)

A continuació, es tracta de definir els factors ε en el cas local. Més concretament, es tracta de definir nombres complexos $\varepsilon(\eta, \psi, dx)$, associats a tota mesura de Haar de F, dx, tot quasicaràcter $\eta \in \mathcal{A}(F)$, i tot caràcter additiu i no trivial de F, $F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1) \subseteq \mathbb{C}^*$.

La definició d'aquests factors ε està íntimament relacionada amb l'equació funcional que lliga les funcions L. (Per a una descripció completa de les equacions funcionals i la demostració dels resultats hom pot veure, per exemple, [**La 70**, Chap. XIV, §3] o [**We 74**, Chap. VII, §5]; també pot ser útil le referència [**Ta 79**, §3], però no conté les demostracions.)

En general, si d^*x denota la mesura $d^*x := \dfrac{dx}{|x|}$ de F^*, i si $\hat{f}(y) := \displaystyle\int_F f(x)\psi(xy)dx$ és la "transformada de Fourier" de la funció $f(x)$, se satisfà una equació funcional de la forma

$$\frac{\int_{F^*} \hat{f}(x)\omega_1\eta^{-1}(x)d^*x}{L(\omega_1\eta^{-1})} = \varepsilon(\eta, \psi, dx)\frac{\int_{F^*} f(x)\eta(x)d^*x}{L(\eta)},$$

on $\varepsilon(\eta, \psi, dx) \in \mathbb{C}^*$ és un cert nombre complex no nul que no depèn de les funcions f per a les quals els dos membres de la igualtat tinguin sentit. En particular, existeixen tals funcions, de manera que els factors $\varepsilon(\eta, \psi, dx)$ estan definits. A més a més, de les relacions que ens diuen com la transformada de Fourier $\hat{f}$ depèn de ψ i dx, es dedueixen les relacions següents per als factors ε:

$$(*) \qquad \varepsilon(\eta, \psi, r dx) = r\varepsilon(\eta, \psi, dx), \qquad \text{per a tot } r \in \mathbb{R}_{>0};$$

$$(*) \qquad \varepsilon(\eta, \psi(ax), dx) = \eta(a)|a|^{-1}\varepsilon(\eta, \psi, dx), \qquad \text{per a tot } a \in \mathbb{F}^*.$$

Els càlculs de la tesi de Tate, fets en cada cas, i que també es poden veure en [**La 70**, Chap. XIV, §3], en [**We 74**, Chap. VII, §5], o en [**Ca-Fr 67**], ens permeten donar una definició explícita d'aquests nombres.

Comencem pel cas arquimedià, en el qual els quasicaràcters η són els $\eta = X^{-N}\omega_s$ donats més amunt. Sigui dx la mesura de Haar usual de F; és a dir, dx si $F=\mathbb{R}$, i $dx := i\,dz \wedge d\bar{z} = 2da\,db$, si $x = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. I sigui ψ_0 el caràcter additiu donat per

$$\psi_0(x) := \begin{cases} \exp(2\pi i x), & \text{si } F = \mathbb{R}, \\ \exp(2\pi i \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} x), & \text{si } F = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Llavors, per a un quasicaràcter qualsevol $\eta = X^{-N}\omega_s$, el factor $\varepsilon(\eta, \psi_0, dx)$ és donat per la igualtat $\varepsilon(X^{-N}\omega_s, \psi_0, dx) := i^N$. (Observem que no depèn de $s \in \mathbb{C}$; és a dir, només depèn del caràcter X^{-N}.)

Això i les relacions (*) determinen els factors $\varepsilon(\eta, \psi, dx)$ en els casos $F = \mathbb{R}$ i $F = \mathbb{C}$, per a tots els caràcters additius i no trivials ψ, totes les mesures de Haar dx, i tots els quasicaràcters η. En efecte, per als caràcters additius se satisfà el resultat següent, la demostració del qual es deixa com a exercici per al lector.

2.8. Lema. *Sigui $F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu no trivial. Llavors, existeix $a \in F$, $a \neq 0$, tal que per a tot $x \in F$ és $\psi(x) = \psi_0(ax)$.* $\square$

Anem a definir, ara, els factors ε en el cas local no arquimedià. Siguin, doncs, F un cos local no arquimedià, $F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu i no trivial de F, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ un quasicaràcter de C_F, i dx una mesura de Haar de F. Associats a aquestes dades, posem

$$\begin{aligned} n(\psi) &:= \max\{n \in \mathbb{Z} : \ \pi^{-n}\mathcal{O} \subseteq \operatorname{Ker} \psi\}, \\ a(\eta) &:= \text{l'exponent del conductor de } \eta; \end{aligned}$$

és a dir, $a(\eta) = 0$, si η és no ramificat, i $a(\eta) = \min\{m \in \mathbb{Z} : \ \text{per a tot } z \in 1 + \mathfrak{p}^m \text{ és } \eta(z) = 1\}$, si η és ramificat. (Observem que si $\eta = \chi\omega_s$, per a un caràcter χ, el conductor del quasicaràcter η és el conductor del caràcter χ.) Finalment, sigui $c \in F^*$ un element qualsevol de valoració $n(\psi) + a(\eta)$.

Amb aquestes notacions, els factors locals $\varepsilon(\eta, \psi, dx)$ són donats per les igualtats (*) i les fórmules

$$\varepsilon(\eta, \psi, dx) = \begin{cases} \dfrac{\eta(c)}{|c|} \displaystyle\int_{\mathcal{O}} dx, & \text{si } \eta \text{ és no ramificat}, \\ \displaystyle\int_{F^*} \eta^{-1}(x)\psi(x)dx, & \text{si } \eta \text{ és ramificat}. \end{cases}$$

En particular, es té que $\varepsilon(\eta, \psi, dx) = 1$, en el cas en què η és no ramificat i se satisfan simultàneament les igualtats $\int_{\mathcal{O}} dx = 1$ (la mesura de Haar és normalitzada) i $n(\psi) = 0$ (podríem dir, si el caràcter additiu ψ és de "conductor" 0, o bé "no ramificat"?); i, també, es tenen les fórmules:

$$\varepsilon(\eta, \psi, dx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\pi^n U} \eta^{-1}(x)\pi(x)dx = \int_{c^{-1}U} \eta^{-1}(x)\pi(x)dx,$$

en el cas en què η és ramificat. A més a més, per a tot quasicaràcter η i tot quasicaràcter no ramificat, ω, és $\varepsilon(\eta\omega, \psi, dx) = \varepsilon(\eta, \psi, \omega)\omega(\pi^{n(\psi)+a(\eta)})$. Aquestes fórmules, juntament amb les relacions (*), determinen els factors ε completament.

Amb tots aquests ingredients, podem enunciar les propietats bàsiques del canvi de base per a $\mathbf{GL}(1)$ en el cas local. L'exactitud de la segona fila del diagrama del lema **1.1** permet provar que se satisfan les relacions següents entre les funcions L i la normalització de Langlands dels factors ε associats a aquestes representacions (cf. Ta79, §3.6).

2.9. Proposició. *Siguin F un cos local, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ un quasicaràcter qualsevol, i $F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu i no trivial de F. Posem $\psi_{E|F} := \psi \circ \mathrm{Tr}_{E|F}$ el caràcter additiu de E definit a partir de ψ per composició amb la traça $\mathrm{Tr}_{E|F} : E \to F$. Llavors,*

$$L(\eta_{E|F}) = \prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}} L(\eta\zeta),$$
$$\varepsilon(\eta_{E|F}, \psi_{E|F}) = \lambda_{E|F}(\psi)^{-1} \prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}} \varepsilon(\eta\zeta, \psi),$$

on $\lambda_{E|F}(\psi)$ és un factor local associat a ψ, que depèn de la normalització dels factors ε. $\square$

A continuació tractarem el cas global. Siguin, doncs, F un cos global, $\psi : \mathbb{A}_F/F \to \mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu, i dx una mesura de Tamagawa de $\mathbb{A}_F$; és a dir, una mesura de Haar tal que $\int_{\mathbb{A}_F/F} dx = 1$. Per a cada plaça v de F, posem ψ_v el component local en v de ψ, i considerem qualsevol factorització de la mesura dx com a producte de mesures locals, $dx = \prod_v dx_v$, tal que per a quasi tota plaça v sigui $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$. I per a tot quasicaràcter $\eta : C_F \to \mathbb{C}^*$, sigui $\eta_v : C_{F_v} \to \mathbb{C}^*$ el component local en v de η.

Definim la funció L i el factor ε globals per les fórmules

$$L(\eta, s) := \prod_v L(\eta_v, s),$$
$$\varepsilon(\eta, s) := \prod_v \varepsilon(\eta_v \omega_s, \psi_v, dx_v).$$

Aquest darrer producte no depèn de la descomposició de la mesura dx en mesures locals. A més a més, el producte és convergent en algun semiplà $\Re(s) >> 0$, i defineix una funció meromorfa de tot el pla complex que satisfà l'equació funcional

$$L(\eta, s) = \varepsilon(\eta, s) L(\eta^*, 1 - s),$$

on η^* és el dual de η (cf. [**Ta 79**, thm. 3.5.3]).

Anàlogament al cas local, l'exactitud de la segona fila del diagrama del lema **1.1** en el cas global permet provar que se satisfan les relacions següents entre les funcions L i els factors ε:

2.10. Proposició. *Siguin F un cos global, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ un quasicaràcter qualsevol, i $\mathbb{A}_F/F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu i no trivial de $\mathbb{A}_F/F$. Posem $\psi_{E|F} := \psi \circ \mathrm{Tr}_{E|F}$ el caràcter additiu de $\mathbb{A}_E/E$ definit a partir de ψ per composició amb el morfisme deduït de la traça $\mathrm{Tr}_{E|F} : E \to F$. Llavors,*

$$L(\eta_{E|F}, s) = \prod_{\zeta \in \hat{\Gamma}} L(\eta\zeta, s),$$
$$\varepsilon(\eta_{E|F}, s) = \prod_{\zeta \in \hat{\Gamma}} \varepsilon(\eta\zeta, s). \ \square$$

§3. Canvi de base per a GL(2) en els L-grups

En aquesta secció, F és un cos local o bé global, $E|F$ una extensió cíclica de grau primer $[E : F] = \ell$, i σ un generador de $\Gamma := \mathrm{Gal}(E|F)$. Com en el capítol 20, indicarem els L-grups per ${}^L G$. A partir d'ara, $G := G_{|F} :=$

$\mathbf{GL}(2)_{|F}$ indicarà el grup (esquema en grups) $\mathbf{GL}(2)$ definit sobre F, $G_{|E} := \mathbf{GL}(2)_{|E}$ el grup $\mathbf{GL}(2)$ definit sobre E, i $G_{E|F}$ el grup (definit sobre F) que s'obté per la restricció d'escalars $F \to E$ a partir del grup $G_{|E}$; en particular, i a nivell de punts, és $G_{E|F}(F) = \mathbf{GL}(2, E)$, mentre que $G(F) = \mathbf{GL}(2, F)$.

3.1. Proposició. *El grup $G_{E|F}$ és quasidescompost i existeix una aplicació natural*

$$^{L}G = \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) \times \Gamma_F \to {}^{L}G_{E|F} = \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})^{\Gamma} \rtimes \Gamma_F,$$

on $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})^{\Gamma}$ és el conjunt de les aplicacions de Γ en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$, $\Gamma_F :=$ $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ el grup de Galois absolut, i Γ_F actua en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})^{\Gamma}$ per permutació de les coordenades.

Demostració. Restricció d'escalars. (Cf. [**Ge-La 79**, §3], [**Bo 79**, §5, §15, ex.]) □

3.2. Definició. Considerem, ara, els conjunts $\Phi(G)$ i $\Phi(G_{E|F})$. Recordem que $\Phi(G)$ és el conjunt de classes d'equivalència (mòdul automorfismes interns definits per elements de $^{L}G^{0}$) de morfismes admissibles $W_F' \to {}^{L}G$ sobre Γ_F, on W_F' és el grup de Weil-Deligne de $\overline{F}|F$ (cf. el capítol 26 i [**Ta 79**§4]). En particular, si $F = \mathbb{R}$ o bé $F = \mathbb{C}$, o bé F és un cos global, llavors el grup de Weil-Deligne W_F' coincideix amb el grup de Weil W_F, per definició. El conjunt $\Phi(G_{E|F})$ es defineix anàlogament i es pot identificar amb el conjunt $\Phi(G_{|E})$; a més a més, l'aplicació anterior ens permet definir una aplicació

$$\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F}) = \Phi(G_{|E}),$$

que s'anomena l'aixecament de canvi de base, de la manera següent. Sigui $W_F' \xrightarrow{\rho} {}^{L}G$ un representant d'un element de $\Phi(G)$; llavors, per restricció de ρ a $W_E' \subseteq W_F'$ i composició amb l'aplicació anterior, obtenim una aplicació

$$\rho_{E|F} : W_E' \to W_F' \xrightarrow{\rho} {}^{L}G \to {}^{L}G_{E|F}.$$

Aquesta aplicació defineix un element de $\Phi(G_{E|F})$. L'aixecament de canvi de base és l'asignació $\rho \mapsto \rho_{E|F}$.

3.3. Exemple. Suposem que F és un cos local no arquimedià i que l'extensió $E|F$ és no ramificada. Sigui $\mathrm{Fr}_F \in \Gamma_F$ un element de Frobenius;

llavors, $\mathrm{Fr}_E := \mathrm{Fr}_F^\ell \in \Gamma_E$ és un element de Frobenius. Si la representació ρ és no ramificada i definida per l'assignació $\mathrm{Fr}_F \mapsto s$, on $s \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ és un element semisimple, llavors $\rho_{E|F}$ també és no ramificada i definida per $\mathrm{Fr}_E \mapsto s^\ell$.

Pel que fa a les funcions L i els factors ε, la definició de les quals es pot veure en [**Ta 79**, §3.3, §3.4, §3.5], se satisfà el resultat següent.

3.4. Proposició. *Sigui $\rho \in \Phi(G)$ un element qualsevol. En el cas en què F és un cos local, sigui $F \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^*$ un caràcter additiu i no trivial de F. Llavors,*

$$\begin{aligned} L(\rho_{E|F}) &= \prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}} L(\rho\otimes\zeta), & \\ \varepsilon(\rho_{E|F}) &= \prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}} \varepsilon(\rho\otimes\zeta), & \textit{si } F \textit{ global,} \\ \varepsilon(\rho_{E|F},\psi_{E|F}) &= \lambda_{E|F}(\psi)^{-2}\prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}} \varepsilon(\rho\otimes\zeta,\psi), & \textit{si } F \textit{ local,} \end{aligned}$$

on $\psi_{E|F} := \psi\circ\mathrm{Tr}_{E|F}$ és el caràcter additiu de E definit a partir de ψ per composició amb la traça $\mathrm{Tr}_{E|F}$, i $\lambda_{E|F}(\psi)$ és un factor local associat a ψ, com en la darrera proposició de la secció anterior.

Demostració. (Cf. [**Ta 79**, §3.3, §3.4, §3.5.]). □

A més a més, a partir de la classificació de les representacions admissibles de dimensió 2 del grup de Weil-Deligne W'_F (cf. [**Ge-La 79**, prop. 2 i Appendix A]), es pot demostrar el resultat següent.

3.5. Proposició.

(a) L'aplicació de canvi de base $\Phi(G)\to\Phi(G_{E|F})$ té imatge el conjunt $\Phi(G_{E|F})^\Gamma$ format pels elements invariants per a l'acció de Γ.

(b) En cadascun dels casos següents (respectivament, cíclic, diedral, també diedral i especial), l'aixecament de canvi de base és donat per:

$$\begin{aligned} (\mu\oplus\nu)_{E|F} &= \mu_{E|F}\oplus\nu_{E|F}, & \\ (\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_F}\theta)_{E|F} &= \mathrm{Ind}_{W_{KE}}^{W_E}\theta_{KE|K}, & \textit{per a } E\neq K, \\ (\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_F}\theta)_{E|F} &= \theta\oplus{}^\sigma\theta, & \textit{per a } E=K \textit{ i } 1\neq\sigma\in\Gamma, \\ (\eta\otimes\mathrm{sp}(2))_{E|F} &= \eta_{E|F}\otimes\mathrm{sp}(2), & \textit{per a } F \textit{ no arquimedià.} \end{aligned}$$

Aquí, μ, ν són representacions de W_F de dimensió 1 (és a dir, quasicaràcters de C_F), $K|F$ és una extensió quadràtica i $\theta \in \mathcal{A}(K)$ un quasicaràcter, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ un quasicaràcter, i $\mathrm{sp}(2)$ la representació de W'_F (que només es dóna en el cas en què F és un cos local no arquimedià) definida per

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad w \in W_F \mapsto \begin{bmatrix} |w| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) *La fibra a què pertany un element $\rho \in \Phi(G)$ indescomponible està formada pels $\rho \otimes \zeta$, per a $\zeta \in \hat{\Gamma}$.*

(d) *La fibra a què pertany un element $\rho = \lambda \oplus \mu \in \Phi(G)$ està formada pels $\lambda\zeta \oplus \mu\zeta'$, per a $\zeta, \zeta' \in \hat{\Gamma}$.*

DEMOSTRACIÓ. (Cf. **[Ge-La 79**, Apèndix A]). □

3.6. Observació. A part d'aquestes representacions, de dimensió 2 també hi ha les de tipus excepcional: (tetraèdric) A_4, i (octaèdric) S_4 que només apareixen en el cas global i en el cas local no arquimedià de característica residual 2, i (icosaèdric) A_5, que només apareix en el cas global. D'aquestes no se'n diu res. (De totes maneres, cf. els capítols 26, 27, 31 i 32.)

§4. Canvi de base per a GL(2) en el cas local

Suposem, ara, que F és un cos local i mantinguem les notacions de la secció anterior. En particular, siguin $G := \mathbf{GL}(2)_{|F}$, i $G_{E|F}$ la restricció a F del grup $G_{|E}$. Designem per $\Pi(G)$ el conjunt de classes de representacions admissibles irreductibles del grup de punts $G(F)$.

4.1. Motivació de la definició. El canvi de base a nivell de L-grups és entre "representants de classes de representacions" d'esquemes en grups. Convé recordar en aquest punt que $\Phi(G)$ està format per (classes) de "representants de classes de representacions" de G, que són morfismes del grup (esquema en grups) de Weil-Deligne W'_F.

Hi ha una bijecció conjectural entre $\Phi(G)$ i $\Pi(G)$ i el canvi de base a nivell d'esquemes en grups $\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F})$ ha de reflectir una aplicació $\Pi(G) \to \Pi(G_{E|F})$ a nivell de representacions dels grups de punts.

D'altra banda, com que la imatge del canvi de base $\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F})$ està formada pels elements Γ-invariants de $\Phi(G_{E|F})$, convé estudiar, en primer lloc, i a nivell de punts, les representacions irreductibles admissibles de $G(E)$ equivalents a les seves conjugades per Γ (o sigui, per σ).

Suposem que $\tilde{\pi}$ és una representació irreductible admissible de $G(E)$ tal que ${}^{\sigma}\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi}$; això implica que, en l'espai de la representació $\tilde{\pi}$, existeix un operador P tal que:

(a) per a tot $z \in G(E)$ és $P^{-1}\tilde{\pi}(z)P = \tilde{\pi}(z^{\sigma})$; i

(b) $P^{\ell} = \mathrm{id}$.

Aquest operador P és determinat llevat d'una arrel ℓ-èsima de la unitat, i l'aplicació donada per $(\sigma^m, z) \mapsto P^m\tilde{\pi}(z)$ defineix una extensió $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{\pi}$ a una representació del producte semidirecte $\Gamma \ltimes G(E)$.

4.2. Proposició. *La representació $\tilde{\pi}'$ té caràcter, i és donat per una funció $\operatorname{Tr}\tilde{\pi}'$ localment integrable en $\Gamma \ltimes G(E)$.*

De fet, en $\sigma \times G(E)$, el caràcter $\operatorname{Tr}\tilde{\pi}'$ defineix una distribució σ-invariant en $G(E)$; és a dir, invariant per la σ-conjugació: $z \mapsto y^{-\sigma}zy$, per a $y, z \in G(E)$.

Posem, per a tot $z \in G(E)$, $N_{E|F,\sigma}z := z^{\sigma^{\ell-1}} \cdots z^{\sigma} \cdot z$. Llavors:

4.3. Proposició.

(a) Per a tot $z \in G(E)$, $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}\, z$ és conjugat en $G(E)$ d'un element de $G(F)$.

(b) L'aplicació $z \mapsto \mathrm{N}_{E|F,\sigma}\, z$ defineix una injecció del conjunt de classes de σ-conjugació de $G(E)$ en el conjunt de classes de conjugació de $G(F)$.

(c) Les classes el·líptiques de $G(F)$ que s'obtenen per $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}$ són les que tenen determinant en $\mathrm{N}_{E|F}\, E^*$ (observem que $E^* = C_E$).

(d) *Les classes hiperbòliques de $G(F)$ que s'obtenen per $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}$ són les que tenen els valors propis en $\mathrm{N}_{E|F}\, E^*$.*

(e) *Qualsevol classe unipotent de $G(F)$ és a la imatge de $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}$.*

Amb aquests prerequisits, podem donar la definició de canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas local.

4.4. Definició. Siguin $\pi \in \Pi(G)$ una representació irreductible admissible del grup $G(F)$ i $\tilde{\pi}$ una representació irreductible admissible de $G(E)$ equivalent a la seva conjugada per σ. Es diu que $\tilde{\pi}$ és un aixecament de π, o millor un aixecament per canvi de base de π, si, i només si, se satisfà alguna de les dues condicions següents:

(a) π és del tipus $\pi = \pi(\mu, \nu)$ i $\tilde{\pi} = \pi(\mu_{E|F}, \nu_{E|F})$;

o bé

(b) existeix una extensió $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{\pi}$ a $\Gamma \rtimes G(E)$ tal que $\mathrm{Tr}\ \tilde{\pi}'(\sigma \times z) = \mathrm{Tr}\ \pi(x)$ per a tot element $z \in G(E)$ tal que $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}\, z$ és conjugat en $G(E)$ a un element semisimple regular $x \in G(F)$.

Se satisfà el resultat següent.

4.5. Teorema. (Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas local.)

(a) *Tot element $\pi \in \Pi(G)$ admet un únic aixecament $\pi_{E|F} \in \Pi(G_{E|F})$.*

(b) *Tot element $\pi \in \Pi(G_{E|F})$ fix per Γ és un aixecament.*

(c) *L'aixecament $\pi_{E|F}$ és independent de l'elecció del generador $\sigma \in \Gamma$.*

(d) *Siguin $\pi, \pi' \in \Pi(G)$. Els aixecaments de π i π' coincideixen (és a dir, $\pi_{E|F} = \pi'_{E|F}$) si, i només si, o bé $\pi' = \pi \otimes \zeta$, per a algun caràcter $\zeta \in \hat{\Gamma}$* (és a dir, l'una és torçada de l'altra per un caràcter), *o bé $\pi = \pi(\mu, \nu)$ i $\pi' = \pi(\mu', \nu')$, amb μ, μ', ν, ν' quasicaràcters de $C_F = F^*$ tals que $\mu^{-1}\mu', \nu^{-1}\nu' \in \hat{\Gamma}$* (és a dir, són irreductibles de la sèrie principal que satisfan la darrera condició).

(e) *Per a la restricció al centre de $\pi \in \Pi(G)$, es té que $\omega_{\pi_{E|F}} = (\omega_\pi)_{E|F}$; és a dir, l'aixecament de la restricció al centre és la restricció al centre de l'aixecament.* (Té bon comportament per restricció al centre.)

(*f*) *Per a tot* $\pi \in \Pi(G)$ *i tota representació de* C_F *de dimensió* 1, χ, *és* $(\pi \otimes \chi)_{E|F} = \pi_{E|F} \otimes \chi_{E|F}$. (Té bon comportament per torçament.)

(*g*) *Per a tot* $\pi \in \Pi(G)$ *és* $(\pi_{E|F})^\vee = (\pi^\vee)_{E|F}$. (La representació contragradient té bon comportament.)

(*h*) *Per a les representacions* $\pi(\rho)$, *associades a representacions admissibles* $\rho \in \Phi(G)$, *de dimensió* 2, *es té, almenys quan* ρ *no és excepcional (que és quan l'existència és provada), que* $\pi(\rho)_{E|F} = \pi(\rho_{E|F})$. (Bon comportament amb la bijecció conjectural, quan aquesta està definida.)

(*i*) *Siguin* $k \subseteq F \subseteq E$ *tals que* $E|k$ *i* $F|k$ *siguin galoisianes, i* $\pi \in \Pi(G)$. *Llavors, per a tot* $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Gal}(E|k)$, *és* ${}^{\tilde{\gamma}}(\pi_{E|F}) = ({}^{\gamma}\pi)_{E|F}$, *on* $\gamma \in \mathrm{Gal}(F|k)$ *és la restricció de* $\tilde{\gamma}$ *a* F.

§5. Canvi de base per a GL(2) en el cas global

Suposem, ara, que F és un cos de nombres. Com abans, siguin $G := \mathbf{GL}(2)_{|F}$, i $G_{E|F}$ la restricció a F del grup $G_{|E}$.

Sgui $\Pi(G)$ el conjunt de classes de representacions automorfes admissibles irreductibles del grup de punts $G(\mathbb{A}_F) = \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F)$, on $\mathbb{A}_F$ és l'anell de les adeles de F.

El canvi de base a nivell de L-grups, $\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F})$, hauria de reflectir una aplicació $\Pi(G) \to \Pi(G_{E|F})$, on $\Pi(G_{E|F})$ és el conjunt de les representacions automorfes admissibles irreductibles de $G(\mathbb{A}_E) = G_{E|F}(\mathbb{A}_F) = \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_E)$. A més a més, una tal aplicació ha de ser compatible amb les dades locals; és a dir, amb els canvis de base del cas local.

Per a relacionar els dos casos, convé fixar les notacions. Per a tota plaça v de F, indiquem per F_v la compleció de F en v i posem, com és habitual, $E_v := E \otimes_F F_v$. Com que l'extensió $E|F$ és cíclica de grau primer ℓ, se satisfà que o bé $E_v|F_v$ és una extensió cíclica de grau ℓ (en el cas que v no descompon en E), o bé que E_v és un producte de ℓ còpies de F_v (en el cas que v descompon en E). En el darrer cas, i per a $\pi \in \Pi(G(F_v))$, definim l'aixecament local $\pi_{E_v|F_v}$ per $\pi_{E_v|F_v} := \pi \otimes \cdots \otimes \pi$ (ℓ cops).

5.1. Definició. Siguin $\pi \in \Pi(G)$ una representació automorfa admissible irreductible del grup $G(F)$ i $\tilde{\pi} \in \Pi(G_{E|F})$ una representació automorfa admissible irreductible de $G(E)$. Es diu que $\tilde{\pi}$ és un aixecament de π, o millor un aixecament per canvi de base de π, si, i només si, per a tota plaça v de F, $\tilde{\pi_v}$ és un aixecament de π_v, on π_v designen els components locals de π, i similarment per a $\tilde{\pi}$.

Se satisfà el resultat següent.

5.2. Teorema. (Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas global.)

(a) *Tot element $\pi \in \Pi(G)$ admet un únic aixecament $\pi_{E|F} \in \Pi(G_{E|F})$.*

(b) *Un element cuspidal $\tilde{\pi} \in \Pi(G_{E|F})$ és un aixecament si, i només si, és fixat per Γ; en aquest cas, $\tilde{\pi}$ és un aixecament de representacions cuspidals.*

(c) *L'aixecament d'un element cuspidal $\pi \in \Pi(G)$ és un aixecament cuspidal, excepte en el cas $\ell = 2$ i $\pi = \pi(\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F} \theta)$, en què $\pi_{E|F} = \pi(\theta, {}^\sigma\theta)$.*

(d) *Siguin $\pi, \pi' \in \Pi(G)$, π cuspidal, i suposem que $\pi_{E|F} = \pi'_{E|F}$. Llavors, $\pi' = \pi \otimes \zeta$, per a algun caràcter $\zeta \in \hat{\Gamma}$.*

(e) *Per a la restricció al centre de $\pi \in \Pi(G)$, es té que $\omega_{\pi_{E|F}} = (\omega_\pi)_{E|F}$; és a dir, l'aixecament de la restricció al centre és la restricció al centre de l'aixecament.* (Té bon comportament per restricció al centre.)

(f) *Per a tot $\pi \in \Pi(G)$ i tota representació de C_F de dimensió 1, χ, és $(\pi \otimes \chi)_{E|F} = \pi_{E|F} \otimes \chi_{E|F}$.* (Té bon comportament per torçament.)

(g) *Per a tot $\pi \in \Pi(G)$ és $(\pi_{E|F})^\vee = (\pi^\vee)_{E|F}$.* (La representació contragradient té bon comportament.)

(h) *Si $\pi = \pi(\rho)$ per a algun $\rho \in \Phi(G)$, és $\pi(\rho)_{E|F} = \pi(\rho_{E|F})$.*

(i) *Siguin $k \subseteq F \subseteq E$ tals que $E|k$ i $F|k$ siguin galoisianes, i $\pi \in \Pi(G)$. Llavors, per a tot $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Gal}(E|k)$, és ${}^{\tilde{\gamma}}(\pi_{E|F}) = ({}^\gamma\pi)_{E|F}$, on $\gamma \in \mathrm{Gal}(F|k)$ és la restricció de $\tilde{\gamma}$ a F.*

5.3. Observació. Hi ha exemples de $\tilde{\pi} \in \Pi(G_{E|F})$ no cuspidals i fixats per Γ que no són aixecaments.

Bibliografia

[Bo 79] Borel, A.: Automorphic L-functions, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 27–61.

[Ca-Fr 67] Cassels, J. W. S.; Fröhlich, A., (eds.): *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

[Ge-La 79] Gérardin, P.; Labesse, J. P.: The Solution of a Base Change Problem for $\mathbf{GL}(2)$ (following Langlands, Saito, Shintani), en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 115–133.

[La 70] Lang, S.: *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, 1970.

[Ta 79] Tate, J.: Number theoretic background, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 3–26.

[We 74] Weil, A.: *Basic Number Theory*, GMW, n. 144, Springer, 1974.