Capítol 23

Grups de Weil

Artur Travesa Sessió 2a. del dia 5 de març de 1997

Aquest capítol és, amb molts més detalls que en l'exposició oral, el contingut de la primera de les dues sessions del seminari que s'havien de destinar al tema de canvis de base per a **GL**(2). Conté un primer estudi dels grups de Weil necessari per a entendre els canvis de base, tema al qual es dedica el capítol 25 i que correspon a la segona sessió oral sobre el tema.

El capítol comença amb un estudi del morfisme transferidor fet elementalment, sense usar cohomologia. A continuació es presenta un repàs de la teoria de cossos de classes, la part estrictament necessària per als grups de Weil. En la secció tercera es donen la definició i les primeres propietats dels grups de Weil; a la secció quarta, se n'estudia l'existència; a la cinquena, la unicitat; i, a la sisena, es presenten els casos especials que ens interessaran: els grups de Weil dels cossos de nombres, dels cossos p-àdics, de $\mathbb{R}$ i de $\mathbb{C}$.

§1. El transferidor

Donat un grup qualsevol, G, considerem el subgrup derivat de G, $DG := \langle [x,y] := xyx^{-1}y^{-1} \,:\, x,y \in G\rangle$; és a dir, el subgrup generat pels commutadors dels elements de G. Llavors:

(a) DG és un subgrup normal de G;

(b) el grup quocient G/DG és commutatiu; i

(c) si $N \subseteq G$ és un subgrup normal de G, aleshores el quocient G/N és commutatiu si, i només si, $DG \subseteq N$.

El grup G/DG és el màxim quocient commutatiu de G; amb més precisió, tot quocient commutatiu de G és un quocient de G/DG.

En particular, si H és un subgrup qualsevol de G, és $DH \subseteq DG$, i es disposa d'un morfisme de grups natural $H/DH \to G/DG$, que s'obté de la inclusió $H \to G$ per pas al quocient.

En el cas que H sigui un subgrup d'índex finit, també es disposa d'un morfisme en sentit contrari, el transferidor $G/DG \xrightarrow{t} H/DH$; es tracta de donar-ne una definició no cohomològica, que dista molt de ser trivial.

Per a això, considerem una secció qualsevol $H\backslash G \xrightarrow{s} G$ de la projecció canònica de G en el conjunt de classes laterals $H\backslash G$. Això és, s és una aplicació tal que per a tota classe lateral Hx, $x \in G$, $s(Hx) \in G$ és un representant d'aquesta classe; per tant, $\mathrm{Im}(s)$ és un conjunt de representants de les classes de $H\backslash G$; dit d'una altra manera, per a tot element $x \in G$ se satisfà la relació $s(Hx) \in Hx$ o bé, si es vol, $Hx = Hs(Hx)$.

En particular, per a dos elements qualssevol $g, x \in G$, els elements $s(Hx)g$ i $s(Hxg)$ són representants de la mateixa classe Hxg; per tant, existeix un únic element $h_{g,x} \in H$, que depèn de g i de la classe Hx, tal que

$$s(Hx)g = h_{g,x}\, s(Hxg).$$

Per definició, és clar que si $x, y \in G$ són tals que $Hx = Hy$, llavors $h_{g,x} = h_{g,y}$, per a tot element $g \in G$.

Ara, podríem intentar pensar en el producte (finit perquè $H\backslash G$ és un conjunt finit) $\prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} = \prod_{Hx \in H\backslash G} h_{g,x}$; però aquest producte no té sentit, en general, ni en G ni en H, si no diem en quin ordre el prenem, perquè ni G ni H no són, en general, commutatius; ara bé, el producte sí que té sentit en H/DH, perquè aquest grup és commutatiu i, en conseqüència, el producte no depèn de l'ordre en què es multipliqui.

Podem, doncs, definir una aplicació $G \xrightarrow{t} H/DH$ per la fórmula

$$t(g) := \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH}.$$

En principi, aquesta definició podria dependre de l'elecció de la secció s que ens ha servit per a construir els elements $h_{g,x}$; això no és així.

1.1. Lema. *L'aplicació t no depèn de l'elecció de la secció s; és a dir, si $H\backslash G \xrightarrow{s'} G$ és una altra secció i es defineixen els elements $h'_{g,x} \in H$ per les igualtats $s'(Hx)g = h'_{g,x}\, s'(Hxg)$, llavors*

$$\prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH} = \prod_{x\in \mathrm{Im}(s')} h'_{g,x} \pmod{DH}.$$

Demostració. Com que $H\backslash G$ és finit, és suficient considerar el cas en què $\mathrm{Im}(s)$ i $\mathrm{Im}(s')$ només difereixen en un element; en efecte, per al cas general, s'aplica aquest cas a les parelles de termes consecutius d'una successió de seccions elegida de manera que dues seccions consecutives només difereixin en un element, i que la primera i la darrera siguin les dues seccions donades.

Suposem, doncs, que $\mathrm{Im}(s)$ i $\mathrm{Im}(s')$ només difereixen en un element $x_0 \in \mathrm{Im}(s)$, $x_0 \notin \mathrm{Im}(s')$, de manera que per a tot $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$, és $s(Hx) = x = s'(Hx)$. Sigui $h_0 \in H$, $h_0 \neq 1$, l'element tal que $s'(Hx_0) = h_0x_0$. Cal comparar els productes

$$t(g) = \prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH} = h_{g,x_0} \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s),\\ x\neq x_0}} h_{g,x} \pmod{DH},$$

$$t'(g) = \prod_{x\in \mathrm{Im}(s')} h'_{g,x} \pmod{DH} = h'_{g,x_0} \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s),\\ x\neq x_0}} h'_{g,x} \pmod{DH},$$

i veure que coincideixen.

Prenem $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$; aleshores, tenim que $Hx \neq Hx_0$ i que $s(Hx) = s'(Hx)$. Si l'element $g \in G$ és tal que $Hxg \neq Hx_0$, llavors també és $s(Hxg) = s'(Hxg)$, i de les igualtats $s(Hx)g = h_{g,x}\, s(Hxg)$ i $s'(Hx)g = h'_{g,x}\, s'(Hxg)$ deduïm que és $h_{g,x} = h'_{g,x}$. Així,

$$\prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s)\\ x\neq x_0\\ Hxg\neq Hx_0}} h_{g,x} \pmod{DH} = \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s)\\ x\neq x_0\\ Hxg\neq Hx_0}} h'_{g,x} \pmod{DH};$$

per tant, hem reduït el problema a comprovar que

$$h_{g,x_0} \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s)\\ x\neq x_0\\ Hxg= Hx_0}} h_{g,x} \pmod{DH} = h'_{g,x_0} \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s)\\ x\neq x_0\\ Hxg= Hx_0}} h'_{g,x} \pmod{DH}.$$

El conjunt $C := \{x \in \mathrm{Im}(s) : x \neq x_0, Hxg = Hx_0\}$ o bé és buit, o bé conté un sol element, perquè quan x recorre un sistema de representants de les classes de $H\backslash G$, els productes xg en recorren un altre. Si $C = \varnothing$, cal veure que $h_{g,x_0} \equiv h'_{g,x_0} \pmod{DH}$. Ara bé, la condició $C = \varnothing$ ens permet dir que per a tot $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$, és $Hxg \neq Hx_0$; per tant, ha de ser $Hx_0g = Hx_0$; en aquest cas, és $s(Hx_0g) = s(Hx_0) = x_0$, i $s'(Hx_0g) = s'(Hx_0) = h_0x_0$, de manera que tenim les igualtats

$$h_0x_0g = s'(Hx_0)g = h'_{g,x_0}s'(Hx_0g) = h'_{g,x_0}h_0x_0,$$

$$x_0g = s(Hx_0)g = h_{g,x_0}s(Hx_0g) = h_{g,x_0}x_0,$$

d'on es dedueix la igualtat $h_0h_{g,x_0} = h'_{g,x_0}h_0$, en G (i en H); o sigui, la igualtat $h_{g,x_0} = h'_{g,x_0} \pmod{DH}$, com volíem veure en aquest cas.

En l'altre cas, que $C \neq \varnothing$, existeix un (únic) element $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$, tal que $Hxg = Hx_0$. Ara tenim que $Hx_0 = Hxg \neq Hx_0g$ (perquè $Hx \neq Hx_0$); per tant, se satisfan les igualtats $s(Hxg) = s(Hx_0) = x_0$, $s'(Hxg) = s'(Hx_0) = h_0x_0$, $s(Hx) = s'(Hx)$, la darrera perquè $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$. Això ens permet dir que

$$h'_{g,x}h_0x_0 = h'_{g,x}s'(Hxg) = s'(Hx)g = s(Hx)g = h_{g,x}\,s(Hxg) = h_{g,x}x_0,$$

de manera que $h_{g,x} = h'_{g,x}h_0$. D'altra banda, com que $Hx_0g \neq Hx_0$, és $s(Hx_0g) = s'(Hx_0g)$, mentre que $s(Hx_0) = x_0$ i $s'(Hx_0) = h_0x_0$; per tant, se satisfan les igualtats

$$h_0x_0g = s'(Hx_0)g = h'_{g,x_0}\,s'(Hx_0g),$$

$$x_0g = s(Hx_0)g = h_{g,x_0}\,s(Hx_0g) = h_{g,x_0}\,s'(Hx_0g),$$

de manera que és $h_0h_{g,x_0} = h'_{g,x_0}$.

En conseqüència, els productes que resta comparar són $h'_{g,x}h'_{g,x_0} = h_{g,x}h_0^{-1}h_0h_{g,x_0} = h_{g,x}h_{g,x_0} \pmod{DH}$, com calia veure. Això acaba la prova. $\square$

1.2. Lema. *Sigui $t : G \to H/DH$ l'aplicació definida per la fórmula*

$$t(g) := \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH},$$

on per a $g, x \in G$ és $s(Hx)g = h_{g,x}\, s(Hxg)$, i $H\backslash G \xrightarrow{s} G$ és qualsevol secció de la projecció canònica de G en el conjunt $H\backslash G$. Llavors, t és un morfisme de grups.

DEMOSTRACIÓ. Cal veure que per a tota parella d'elements $g, g' \in G$ és $t(gg') = t(g)t(g')$. Posem $t(g') := \prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{g',x} \pmod{DH}$, on $s(Hx)g' = h_{g',x}\, s(Hxg')$, anàlogament a com hem fet per a $t(g)$, amb la mateixa secció s en els dos casos. Ara, és $h_{gg',x}s(Hxgg') = s(Hx)gg' = h_{g,x}s(Hxg)g' = h_{g,x}h_{g',xg}s(Hxgg')$, de manera que és $h_{gg',x} = h_{g,x}h_{g',xg}$. Per tant,

$$\begin{aligned} t(gg') &= \prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{gg',x} \pmod{DH} \\ &= \prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{g',xg} \pmod{DH} \\ &= t(t) \prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{g',xg} \pmod{DH}. \end{aligned}$$

Ara bé, x recorre un sistema de representants de les classes laterals Hx si, i només si, ho fa xg; per tant, si definim una secció s' per la fórmula $s'(Hxg) := s(Hx)g$, per a tot $x \in G$, tenim que $t(gg') = t(g) \prod_{x\in \mathrm{Im}(s')} h_{g',x} \pmod{DH} = t(g)t(g')$, en virtut del lema anterior. Això acaba la demostració. □

Així, hem definit un morfisme de grups $G \xrightarrow{t} H/DH$; ara bé, com que H/DH és commutatiu, el morfisme t factoritza a través de la projecció canònica G/DG i s'obté un morfisme de grups $G/DG \xrightarrow{t} H/DH$, anomenat el transferidor.

1.3. Observació. En el cas en què el grup G sigui un grup topològic, el grup quocient G/DG no és, en general, Hausdorff, perquè DG no és, en general, un subgrup tancat. Quan interessa treballar amb grups Hausdorff (com és el nostre cas), convé modificar una mica la definició del morfisme transferidor.

Per a tot grup topològic G, posarem G^c per a indicar l'adherència, en G, del subgrup derivat DG. Llavors, G^c és un subgrup normal tancat de G, i $G^{ab} := G/G^c$ és un grup topològic commutatiu i Hausdorff; s'anomena l'abelianitzat (Hausdorff) de G.

Ara, per a tot subgrup tancat d'índex finit, $H \subseteq G$, el morfisme $G \xrightarrow{t} H/DH \xrightarrow{\text{proj}} H/H^c = H^{ab}$ factoritza a través del quocient $G \xrightarrow{\text{proj}} G^{ab}$ i s'obté el morfisme transferidor $G^{ab} \xrightarrow{t} H^{ab}$.

1.4. Lema. *El transferidor $G^{ab} \xrightarrow{t} H^{ab}$ és un morfisme (continu) de grups topològics Hausdorff commutatius.*

DEMOSTRACIÓ. Només resta veure la continuïtat de l'aplicació. En primer lloc, tot sistema de representants $s : H\backslash G \to G$ és una aplicació contínua; ara, com que la multiplicació i el pas a l'invers són aplicacions contínues, l'aplicació $G \times G \to H$ donada per $(g, x) \mapsto h_{g,x} = s(Hx)gs(Hxg)^{-1}$ és contínua; de fet, ho és l'aplicació $G \times H\backslash G \to H$ donada per $(g, Hx) \mapsto h_{g,x}$ (recordem que $h_{g,x}$ no depèn de x quan x recorre una classe Hx). Per tant, si escrivim $\mathrm{Im}(s) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (és a dir, triem un ordre en el conjunt finit $\mathrm{Im}(s)$), l'aplicació $G \to H$ donada per $g \mapsto h_{g,x_1} \cdots h_{g,x_n}$ és contínua, de manera que ho és l'aplicació $G \to H/DH$ donada per $g \mapsto h_{g,x_1} \cdots h_{g,x_n} \pmod{DH}$. Per tant, el morfisme transferidor és continu. $\square$

1.5. Proposició. *Siguin $K \subseteq H \subseteq G$ subgrups tancats d'índexs finits. Llavors, la composició dels morfismes transferidors $G^{ab} \to H^{ab} \to K^{ab}$ és el morfisme transferidor $G^{ab} \to K^{ab}$.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $s : H\backslash G \to G$, $s' : K\backslash H \to H$ sistemes de representants de $H\backslash G$ en G i de $K\backslash H$ en H, respectivament; llavors, el conjunt $\{yx : y \in \mathrm{Im}(s'), x \in \mathrm{Im}(s)\}$ és la imatge d'un sistema de representants $s'' : K\backslash G \to G$ de $K\backslash G$ en G i se satisfà la propietat que si $y \in \mathrm{Im}(s')$ i $x \in \mathrm{Im}(s)$, llavors $s''(Kyx) = yx = s'(Ky)s(Hx)$. Com que convindrà triar un ordre en $\mathrm{Im}(s)$, posem $\mathrm{Im}(s) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Posem $t_0 : G \to H^{ab}$, $t_0' : H \to K^{ab}$, $t_0'' : G \to K^{ab}$ els morfismes transferidors $t : G^{ab} \to H^{ab}$, $t' : H^{ab} \to K^{ab}$, $t'' : G^{ab} \to K^{ab}$ abans de passar-los als quocients corresponents (si es vol, t_0 és la composició $G \to G^{ab} \to H^{ab}$ de la projecció $G \to G^{ab}$ amb el morfisme transferidor t, i anàlogament t_0' i t_0'').

Sigui $g \in G$ un element qualsevol; cal veure que $t_0''(g) = t'(t_0(g))$. En primer lloc, se satisfà la igualtat

$$t_0(g) = \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{H^c} = \prod_{i=1}^{n} h_i \pmod{H^c},$$

on $h_i := h_{g,x_i} \in H$ és l'element de H tal que $s(Hx_i)g = h_i s(Hx_i g)$; llavors, el producte $h_1 \cdots h_n \in H$ és un representant de $t_0(g)$, de manera que $t'(t_0(g)) = t'_0(h_1 \cdots h_n) = t'_0(h_1) \cdots t'_0(h_n) \pmod{K^c}$. Ara bé, per a $1 \leq i \leq n$, és $t'_0(h_i) = \prod_{y \in \mathrm{Im}(s')} k'_{h_i,y} \pmod{K^c}$, on $k'_{h_i,y} \in K$ és l'element de K tal que $s'(Ky)h_i = k'_{h_i,y} s'(Kyh_i)$. Per tant, se satisfà la igualtat

$$t'(t_0(g)) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{y \in \mathrm{Im}(s')} k'_{h_i,y} \pmod{K^c}.$$

D'altra banda,

$$t''_0(g) = \prod_{z \in \mathrm{Im}(s'')} k''_{g,z} \pmod{K^c},$$

on $k''_{g,z} \in K$ és l'element de K tal que $s''(Kz)g = k''_{g,z} s''(Kzg)$; com que $\mathrm{Im}(s'') = \mathrm{Im}(s') \mathrm{Im}(s)$, podem escriure la igualtat

$$t''_0(g) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{y \in \mathrm{Im}(s')} k''_{g,yx_i} \pmod{K^c}.$$

Per tant, és suficient veure que, per a $1 \leq i \leq n$ i per a tot $y \in \mathrm{Im}(s')$, és $k''_{g,yx_i} = k'_{h_i,y}$.

Comencem per observar que, per a $y \in \mathrm{Im}(s')$, se satisfan les igualtats

$$\begin{aligned} k''_{g,yx_i} s''(Kyx_i g) &= s''(Kyx_i)g = s'(Ky)s(Hx_i)g \\ &= s'(Ky)h_i s(Hx_i g) = k'_{h_i,y} s'(Kyh_i) s(Hx_i g). \end{aligned}$$

A més a més, en aplicar de nou la multiplicativitat dels sistemes de representants i tenir en compte les igualtats $Ks'(Kyh_i) = Ks'(Ky)h_i$, $Ks'(Ky) = Ky$, $h_i s(Hx_i g) = s(Hx_i)g$, i $s(Hx_i) = x_i$, obtenim que

$$\begin{aligned} s'(Kyh_i)s(Hx_i g) &= s''(Ks'(Kyh_i)s(Hx_i g)) = s''(Ks'(Ky)h_i s(Hx_i g)) \\ &= s''(Kys(Hx_i)g) = s''(Kyx_i g). \end{aligned}$$

En substituir aquesta igualtat en l'anterior, veiem que és $k''_{g,yx_i}s''(Kyx_ig) = k'_{h_i,y}s''(Kyx_ig)$ i, en simplificar el factor $s''(Kyx_ig)$, obtenim la igualtat que cercàvem, $k''_{g,yx_i} = k'_{h_i,y}$. □

La propietat més important del morfisme transferidor que ens caldrà utilitzar fa referència al cas d'un subgrup normal (i d'índex finit) i és donada per la proposició següent.

1.6. Proposició. *Sigui $H \subseteq G$ un subgrup normal tancat d'índex finit. Llavors, la composició $H^{ab} \xrightarrow{incl} G^{ab} \xrightarrow{t} H^{ab}$ s'obté com el pas al quocient de l'aplicació $H \to H/DH$ que envia tot element $g \in H$ al producte dels conjugats de g per representants de les classes de $H\backslash G = G/H$.*

DEMOSTRACIÓ. Hem de calcular $t(g)$ per a un element $g \in H$, on t és l'aplicació $G \xrightarrow{t} H/DH$ de la qual s'obté el transferidor per pas al quocient. Posem, com més amunt, $G/H = H\backslash G \xrightarrow{s} G$ una secció de la projecció canònica $G \to G/H$, i $t(g) = \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH}$, on $s(Hx)g = h_{g,x}\, s(Hxg)$, per a tot $x \in G$. Com que H és un subgrup normal de G, i $g \in H$, és $Hxg = xgH = xH = Hx$; per tant, $h_{g,x} = s(Hx)\, g\, s(Hxg)^{-1} = s(Hx)\, g\, s(Hx)^{-1}$ és el conjugat de g pel representant de la classe Hx. Així, doncs, $t(g)$ és (la classe mòdul H^c de) un producte dels conjugats de g pels representants $s(Hx)$ de les classes de $H\backslash G = G/H$, com calia comprovar. □

§2. Repàs de teoria de cossos de classes

A partir d'aquí, denotarem per F un cos local, o bé un cos global que, sovint, serà un cos de nombres; fixarem una clausura (algebraica) separable $\overline{F}$ de F, i denotarem per $G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ el grup de Galois absolut de F.

En general, considerarem subextensions finites de $\overline{F}|F$, $E|F$, $E'|F$, $E''|F$, ..., i denotarem per $G_E := \mathrm{Gal}(\overline{F}|E) \subseteq G_F$ el grup de Galois absolut de E. En particular, G_E és un subgrup tancat d'índex finit (i, per tant, obert) de G_F, que és normal si, i només si, l'extensió $E|F$ és de Galois.

A més a més, per a cada un dels cossos E que considerarem, posarem

$$C_E := \begin{cases} E^*, & \text{el grup multiplicatiu de } E, \text{ si } F \text{ és un cos local,} \\ \mathbb{A}_E^*/E^*, & \text{el grup de classes d'ideles de } E, \text{ si } F \text{ és un cos global.} \end{cases}$$

2.1. Morfismes induïts per $\sigma \in G_F$. Donats un automorfisme $\sigma \in G_F$ i una extensió $E|F$ finita qualssevol, σ dóna lloc a un morfisme $\sigma : C_E \to C_{E^\sigma}$, injectiu i continu (de fet, un isomorfisme). En el cas en què F és un cos local, el morfisme és evident; en efecte, la restricció a E determina un isomorfisme $\sigma : E \to E^\sigma$, i la restricció a E^* és un isomorfisme $\sigma : E^* \to E^{\sigma *}$.

Sigui, ara, F un cos global; per a cada plaça v de E, siguin E_v la compleció de E respecte de v i v^σ la plaça de E^σ definida per $v^\sigma(x^\sigma) = v(x)$, per a $x \in E$. Llavors, σ s'estén, per continuïtat, a un isomorfisme $\sigma : E_v \to E^\sigma_{v^\sigma}$. Per tant, a nivell de les adeles, σ dóna lloc a un isomorfisme $\sigma : \mathbb{A}_E \to \mathbb{A}_{E^\sigma}$, del qual podem considerar la seva restricció a les ideles, $\sigma : \mathbb{A}_E^* \to \mathbb{A}_{E^\sigma}^*$; i, com que $\sigma : E^* \to E^{\sigma *}$ és isomorfisme, per pas al quocient obtenim l'isomorfisme $\sigma : C_E = \mathbb{A}_E^*/E^* \to \mathbb{A}_{E^\sigma}^*/E^{\sigma *} = C_{E^\sigma}$ que volem.

Així, el morfisme $\sigma : C_E \to C_{E^\sigma}$ és definit, en els components locals E_v de $\mathbb{A}_E$, com l'isomorfisme $\sigma : E_v^* \to {E^\sigma}^*_{v^\sigma}$ a nivell de les complecions.

2.2. Morfismes induïts per inclusions. Donats $F \subseteq E \subseteq E'$, amb $E'|F$ finita, la inclusió $E \subseteq E'$ indueix un morfisme natural $C_E \to C_{E'}$, que és la inclusió $E^* \to {E'}^*$, si F és un cos local, i un morfisme (injectiu i continu) $C_E = \mathbb{A}_E^*/E^* \to \mathbb{A}_{E'}^*/{E'}^* = C_{E'}$, si F és un cos global. En aquest cas, per a cada plaça v de E (és a dir, en cada component E_v de $\mathbb{A}_E$), el morfisme és tal que σ actua com la restricció de σ_v a E_v. D'altra banda, si $E'|E$ és de Galois i $G := \mathrm{Gal}(E'|E)$, el morfisme $C_E \to C_{E'}$ és G-invariant, i la seva imatge és $C_{E'}^G$.

2.3. Morfismes induïts per la norma. Donats $F \subseteq E \subseteq E'$, la norma $\mathrm{N}_{E'|E} : E' \to E$ dóna lloc a un morfisme de grups (continu), que també denotarem per $N_{E'|E}$, $\mathrm{N}_{E'|E} : C_{E'} \to C_E$. Si F és un cos local, aquest morfisme norma és la restricció de la norma $N_{E'|E}$ al grup ${E'}^*$; i, en el cas d'un cos global, la norma actua, en cada component de $\mathbb{A}_{E'}$, com la norma local $\mathrm{N}_{E'_v|E_{v_E}}$, on v_E indica la restricció a E de la plaça v de E'.

2.4. La llei de reciprocitat. Per a cada E, la teoria de cossos de classes ens proporciona un morfisme continu, $C_E \to G_E^{ab}$, la llei de reciprocitat, que s'obté en passar al límit les lleis de reciprocitat per a les extensions de Galois finites $E'|E$.

Per exemple, en el cas en què F és un cos local, i si $E'|E$ és una extensió finita i de Galois, tenim un isomorfisme canònic (cf. [**Ne 86**, Chap. III, Thm. 2.1])

$$\mathrm{Gal}(E'|E)^{ab} \xrightarrow{R_{E'|E}} E^*/\,\mathrm{N}_{E'|E}\,E'^*$$

que, en invertir i compondre amb la projecció canònica, ens proporciona el símbol nòrmic local, de nucli $\mathrm{N}_{E'|E}\,E'^*$,

$$C_E = E^* \xrightarrow{\mathrm{proj}} E^*/\,\mathrm{N}_{E'|E}\,E'^* \xrightarrow{(\ \ ,E'|E)} \mathrm{Gal}(E'|E)^{ab}.$$

Anàlogament, en el cas global de cossos de nombres, si $E'|E$ és una extensió finita i de Galois de cossos de nombres, tenim l'isomorfisme canònic (cf. [**Ne 86**, Chap. IV, Thm. 6.5])

$$\mathrm{Gal}(E'|E)^{ab} \xrightarrow{R_{E'|E}} C_E/\,\mathrm{N}_{E'|E}\,C_{E'}$$

que, en invertir i compondre amb la projecció canònica, ens proporciona el símbol nòrmic global, de nucli $\mathrm{N}_{E'|E}\,C_{E'}$,

$$C_E \xrightarrow{\mathrm{proj}} C_E/\,\mathrm{N}_{E'|E}\,C_{E'} \xrightarrow{(\ \ ,E'|E)} \mathrm{Gal}(E'|E)^{ab}.$$

La compatibilitat dels símbols nòrmics (locals i globals) dóna lloc, per pas al límit, a la llei de reciprocitat

$$C_E \to G_E^{ab} = \varprojlim_{E'} \mathrm{Gal}(E'|E)^{ab}.$$

2.5. La classe canònica o fonamental. Si $E|F$ és una extensió de Galois finita, la formulació mitjançant formacions de la teoria de cossos de classes li associa un element distingit $\alpha_{E|F} \in H^2(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$, que correspon a $\dfrac{1}{n}$ per l'isomorfisme canònic $H^2(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) \to \dfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on $n := [E : F]$. Aquest element s'anomena la classe canònica o fonamental de $E|F$ (cf. [**Ar-Ta 67**, p. 213], i [**Se 79**, Chap. XIII, §4, p. 196]).

§3. Definició del grup de Weil

Mantindrem les notacions de la secció anterior; en particular, les extensions $E|F$ que considerarem seran finites. Un grup de Weil per a l'extensió $\overline{F}|F$ és una certa modificació del grup de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$. Consta de tres dades sotmeses a certs axiomes. Abans de considerar les dades i els axiomes de la definició, convé establir un resultat previ.

3.1. Lema. *Suposem que W_F és un grup topològic i $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ un morfisme continu de grups que té imatge densa. Per a tot E, posem $W_E := \varphi^{-1}(G_E)$. Llavors:*

(a) W_E és un subgrup obert de W_F;

(b) φ indueix una bijecció d'espais homogenis $W_F/W_E \xrightarrow{\varphi_E} G_F/G_E \simeq \mathrm{Hom}_F(E, \overline{F})$ (que, en conseqüència, són conjunts finits); i

(c) Si $E|F$ és de Galois, la bijecció $W_F/W_E \xrightarrow{\varphi_E} \mathrm{Gal}(E|F)$ és un isomorfisme de grups.

3.2. Observació. $\mathrm{Hom}_F(E, \overline{F})$ denota el conjunt de les F-immersions de E en $\overline{F}$, i coincideix amb el grup de Galois $\mathrm{Gal}(E|F)$ si l'extensió $E|F$ és normal.

DEMOSTRACIÓ. La demostració de (a) és trivial, perquè φ és una aplicació contínua i G_E és un subgrup obert de G_F (recordem que l'extensió $E|F$ és finita).

Demostrem (b). Siguin $x, y \in W_F$; la igualtat de classes $xW_E = yW_E$ en W_F/W_E equival a la igualtat de classes $\varphi(x)G_E = \varphi(y)G_E$ en G_F/G_E, perquè φ és un morfisme de grups i $W_E = \varphi^{-1}(G_E)$; per tant, l'assignació $xW_E \mapsto \varphi(x)G_E$ defineix una aplicació injectiva $W_F/W_E \xrightarrow{\varphi_E} G_F/G_E$.

Només resta veure que φ_E és exhaustiva. Per a això, considerem una classe lateral $\sigma G_E \in G_F/G_E \simeq \mathrm{Hom}_F(E,\overline{F})$, on $\sigma \in G_F$ és un element qualsevol. Sigui $E'|F$ la clausura normal de l'extensió $E|F$ en $\overline{F}|F$. Llavors, $G_{E'} \subseteq G_E$ i $G_{E'}$ és un subgrup obert (i normal, i d'índex finit) de G_F; per tant, $\sigma G_{E'}$ és un entorn obert de σ en G_F; com que $\mathrm{Im}(\varphi)$ és dens en G_F, és $\sigma G_{E'} \cap \mathrm{Im}(\varphi) \neq \varnothing$; en conseqüència, existeix un element $y \in W_F$ tal que $\varphi(y) \in \sigma G_{E'}$; això és dir que $\varphi(y)G_{E'} = \sigma G_{E'}$ i, com que $G_{E'} \subseteq G_E$, això implica que $\varphi_E(yW_E) = \varphi(y)G_E = \sigma G_E$, fet que demostra que σG_E té antiimatge per φ_E.

Finalment, demostrem (c). Si $E|F$ és de Galois, llavors G_E és un subgrup normal de G_F, de manera que $W_E = \varphi^{-1}(G_E)$ és un subgrup normal de W_F i els espais homogenis G_F/G_E i W_F/W_E són grups; a més a més, per definició, φ_E és un morfisme de grups. $\square$

3.3. Definició. Un grup de Weil per a l'extensió $\overline{F}|F$ és una terna ordenada $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ formada per les dades següents:

(a) Un grup topològic W_F;

(b) Un morfisme continu de grups $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ amb imatge densa; i

(c) Una família $\{r_E\}_E$ d'isomorfismes de grups topològics

$$C_E \xrightarrow{r_E} W_E^{ab} = W_E/W_E^c,$$

on $W_E := \varphi^{-1}(G_E)$ i $E|F$ recorre el conjunt de totes les subextensions finites de $\overline{F}|F$.

A fi que una terna $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ com aquesta sigui un grup de Weil, cal que se satisfacin els quatre axiomes següents:

(1) Per a tot E, el morfisme composició

$$C_E \xrightarrow{r_E,\,\simeq} W_E^{ab} \xrightarrow{\text{induït per }\varphi} G_E^{ab}$$

és el morfisme "llei de reciprocitat" de la teoria de cossos de classes.

(2) Per a tot element $w \in W_F$, sigui $\sigma := \varphi(w) \in G_F$; llavors, per a tot E, el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} C_E & \xrightarrow{r_E} & W_E^{ab} \\ {\scriptstyle \text{induït per } \sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{conjugació per } w} \\ C_{E^\sigma} & \xrightarrow{r_{E^\sigma}} & W_{E^\sigma}^{ab}. \end{array}$$

(3) Per a cada inclusió $E \subseteq E'$, el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} C_E & \xrightarrow{r_E} & W_E^{ab} \\ {\scriptstyle \text{induït per la inclusió } E \subseteq E'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{transferidor}} \\ C_{E'} & \xrightarrow{r_{E'}} & W_{E'}^{ab}. \end{array}$$

(4) L'aplicació natural $W_F \to \varprojlim_E W_{E|F}$, on $W_{E|F} := W_F/W_E^c$ (atenció!, no W_F/W_E), és un isomorfisme de grups topològics.

Això acaba la definició de grup de Weil; però cal fer algunes precisions i observacions.

3.4. Observacions. (a) En general, $W_{E|F}$ només és un espai homogeni, perquè a vegades W_E^c no és un subgrup normal de W_F. Ara bé, si $E|F$ és de Galois, $W_E \subseteq W_F$ és normal i $DW_E \subseteq W_F$ també és normal, de manera que $W_E^c \subseteq W_F$ és un subgrup normal i l'espai homogeni $W_{E|F}$ és un grup topològic.

D'altra banda, el sistema projectiu d'espais homogenis $W_{E|F}$ admet com a sistema cofinal el format per les extensions $E|F$ de Galois, de manera que $\varprojlim_E W_{E|F}$ té una estructura natural de grup topològic: la del límit projectiu. Així, té sentit imposar que l'aplicació natural $W_F \to \varprojlim_E W_{E|F}$ sigui un isomorfisme de grups topològics.

En particular, com que els grups $W_{E|F}$ són Hausdorff, perquè els subgrups $W_E^c \subseteq W_F$ són tancats, el grup topològic $\varprojlim_E W_{E|F}$ és Hausdorff; i, com a conseqüència de l'axioma (4) que imposem, W_F és Hausdorff.

(b) Per a entendre millor la relació estreta entre el grup de Weil i el grup de Galois absolut, observem que se satisfà que $G_F = \varprojlim_E \mathrm{Gal}(E|F) \simeq \varprojlim_E W_F/W_E$. En conseqüència, $W_F \simeq \varprojlim_E W_F/W_E^c$ és una "modificació" del grup de Galois.

De fet, si E és de Galois, la composició de les projeccions naturals amb els morfismes induïts per φ proporciona morfismes $W_{E|F} = W_F/W_E^c \to$

$W_F/W_E \xrightarrow{\simeq,\varphi_E} \mathrm{Gal}(E|F)$ que formen un morfisme de sistemes projectius; per tant, en general, disposem d'un morfisme natural

$$\varprojlim_E W_{E|F} \xrightarrow{\text{induït per } \varphi} \varprojlim_E \mathrm{Gal}(E|F) = G_F,$$

de manera que (re)construïm el morfisme $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ en la forma

$$W_F \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_E W_{E|F} \xrightarrow{\text{induït per } \varphi} G_F.$$

(c) Convé veure més detalladament quins són els morfismes de (2). Donat un element qualsevol $w \in W_F$, sigui $\sigma := \varphi(w) \in G_F$; per a cada E, és $\sigma G_E \sigma^{-1} = G_{E^\sigma}$; en particular, si $x \in W_E$, és $\varphi(wxw^{-1}) = \sigma\varphi(x)\sigma^{-1} \in G_{E^\sigma}$, de manera que $wxw^{-1} \in W_{E^\sigma}$. Així, w indueix un morfisme (conjugació per w) $W_E \xrightarrow{\text{conj per } w} W_{E^\sigma}$; i, en conseqüència, per pas al quocient, un morfisme $W_E^{ab} \xrightarrow{\text{conj per } w} W_{E^\sigma}^{ab}$. En (2) es demana que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E,\simeq"] \arrow[d, "\text{induït per } \sigma"'] & W_E^{ab} \arrow[d, "\text{conjugació per } w"] \\ C_{E^\sigma} \arrow[r, "r_{E^\sigma},\simeq"] & W_{E^\sigma}^{ab} \end{tikzcd}$$

sigui commutatiu per a tot E i tot $w \in W_F$, on $\sigma := \varphi(w)$ i el morfisme $C_E \to C_{E^\sigma}$ és l'induït per σ (cf. **2.1**).

3.5. Proposició. *Suposem que $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ és un grup de Weil per a $\overline{F}|F$. Si, per a cada E, considerem $W_E \xrightarrow{\varphi} G_E$ la restricció de $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ a W_E, i $\{r_{E'}\}_{E'}$ designa la família dels isomorfismes $r_{E'}$ per a $E' \supseteq E$, llavors $(W_E, \varphi, \{r_{E'}\}_{E'})$ és un grup de Weil per a $\overline{F}|E$.*

Demostració. Posem, momentàniament en aquesta demostració, $\varphi' := \varphi|_{W_E}$, la restricció a W_E del morfisme φ. Primer, cal veure que $\mathrm{Im}(\varphi')$ és un subgrup dens de G_E. Per a això, és suficient veure que $\mathrm{Im}(\varphi')$ talla tot entorn bàsic de qualsevol element $\sigma \in G_E$; dit d'una altra manera, n'hi ha prou si comprovem que per a tota extensió de Galois finita $E'|E$, i tot element $\sigma \in G_E$, és $\mathrm{Im}(\varphi') \cap \sigma G_{E'} \neq \varnothing$.

Ara bé, si designem per $E''|F$ la clausura galoisiana de $E'|F$, és $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \sigma G_{E''} \neq \varnothing$ (perquè $\sigma G_{E''}$ és un entorn bàsic de σ en G_F i $\mathrm{Im}(\varphi)$ és dens en G_F); com que

$$\operatorname{Im}(\varphi)\cap\sigma G_{E''}\subseteq\operatorname{Im}(\varphi)\cap\sigma G_{E'}=\operatorname{Im}(\varphi)\cap G_E\cap\sigma G_{E'}=\operatorname{Im}(\varphi')\cap\sigma G_{E'},$$

és $\operatorname{Im}(\varphi')\cap\sigma G_{E'}\neq\varnothing$, com volíem veure.

En segon lloc, si $E\subseteq E'$, és $W_{E'}=\varphi^{-1}(G_{E'})=\varphi'^{-1}(G_{E'})$, de manera que els subgrups $W_{E'}$ són els mateixos per a φ i per a φ'. En particular, també ho són els quocients $W_{E'}^{ab}$ i els isomorfismes $C_{E'}\xrightarrow{r_{E'}}W_{E'}^{ab}$, i també els morfismes $W_{E'}\to G_{E'}^{ab}$ induïts per φ i per φ'. Per tant, els axiomes (1), (2) i (3) se satisfan trivialment.

Veiem com l'axioma (4) es dedueix del fet que el morfisme φ es reconstrueix com la composició

$$W_F\xrightarrow{\simeq}\varprojlim_{E'}W_F/W_{E'}^c\to\varprojlim_{E'}W_F/W_{E'}\xrightarrow{\text{induït per }\varphi,\simeq}\varprojlim_{E'}G_F/G_{E'}\simeq G_F,$$

on el límit es pot prendre sobre les extensions finites $E'|F$.

En primer lloc, observem que podem limitar-nos a considerar les extensions finites $E'|F$ tals que $E'\supseteq E$ i $E'|F$ és de Galois, ja que aquestes extensions proporcionen sistemes cofinals.

D'altra banda, la inclusió $W_E\to W_F$ indueix un diagrama commutatiu de morfismes de grups topològics

$$\begin{array}{ccccccc}
W_E & \longrightarrow & \varprojlim_{E'}\dfrac{W_E}{W_{E'}^c} & \longrightarrow & \varprojlim_{E'}\dfrac{W_E}{W_{E'}} & \xrightarrow{\simeq,\varphi'} & \varprojlim_{E'}\dfrac{G_E}{G_{E'}}\simeq G_E\\
{\scriptstyle\text{incl}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{incl}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{incl}}\\
W_F & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim_{E'}\dfrac{W_F}{W_{E'}^c} & \longrightarrow & \varprojlim_{E'}\dfrac{W_F}{W_{E'}} & \xrightarrow{\simeq,\varphi} & \varprojlim_{E'}\dfrac{G_F}{G_{E'}}\simeq G_F,
\end{array}$$

on el morfisme inferior és φ i el superior és φ'.

Com que el morfisme composició

$$W_E\xrightarrow{\text{incl}}W_F\xrightarrow{\simeq}\varprojlim_{E'}\frac{W_F}{W_{E'}^c}$$

és injectiu, obtenim immediatament la injectivitat del morfisme natural

$$W_E\to\varprojlim_{E'}\frac{W_E}{W_{E'}^c};$$

veiem-ne, ara, l'exhaustivitat. Donat un element qualsevol $y \in \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$, la seva imatge en $\varprojlim_{E'} \frac{W_F}{W_{E'}^c}$ és la imatge d'un (únic) element $x \in W_F$; ara bé, la imatge de y en G_F pertany a G_E, de manera que $\varphi(x) \in G_E$ i, en conseqüència, $x \in W_E$. Si escrivim y en la forma de sistema coherent, $y = (x_{E'}W_{E'}^c)_{E'}$, de classes $x_{E'}W_{E'}^c \in \frac{W_E}{W_{E'}^c}$, amb $x_{E'} \in W_E$, llavors la imatge en $\varprojlim_{E'} \frac{W_F}{W_{E'}^c}$ és el sistema coherent $(x_{E'}W_{E'}^c)_{E'}$, amb $x_{E'}W_{E'}^c \in \frac{W_F}{W_{E'}^c}$; però aquest sistema és la imatge de l'element $x \in W_E$; és a dir, $x_{E'}W_{E'}^c = xW_{E'}^c$, per a tot E'. Per tant, $y = (xW_{E'}^c)_{E'}$, fet que demostra que y és imatge de x i, per tant, l'exhaustivitat del morfisme $W_E \to \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$.

Finalment, de la bijectivitat ja provada del morfisme $W_E \to \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$, de la commutativitat del diagrama

$$\begin{array}{ccc} W_E & \longrightarrow & \varprojlim_{E'} \dfrac{W_E}{W_{E'}^c} \\ {\scriptstyle \mathrm{incl}}\downarrow & & \downarrow \\ W_F & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim_{E'} \dfrac{W_F}{W_{E'}^c}, \end{array}$$

i del fet que l'aplicació $W_F \to \varprojlim_{E'} \frac{W_F}{W_{E'}^c}$ és isomorfisme, es dedueix que el morfisme de grups invers $W_E \leftarrow \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$ també és continu, de manera que, efectivament, $W_E \to \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$ és un isomorfisme de grups topològics. □

3.6. Proposició. *Sigui $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ un grup de Weil per a $\overline{F}|F$. Per a les extensions de Galois finites $E \subseteq E'$, el diagrama següent és commutatiu:*

$$\begin{array}{ccc} C_{E'} & \xrightarrow{r_{E'}} & W_{E'}^{ab} \\ {\scriptstyle \text{induït per la norma } \mathrm{N}_{E'|E}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{induït per la inclusió } W_{E'} \subseteq W_E} \\ C_E & \xrightarrow{r_E} & W_E^{ab}. \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ. Com que l'extensió $E'|E$ és normal i finita, tenim que $G_{E'} \subseteq G_E$ és un subgrup normal tancat i d'índex finit, de manera que

$W_{E'} \subseteq W_E$ és un subgrup normal tancat i d'índex finit; en virtut de la proposició **1.6**, el morfisme composició

$$W_{E'}^{ab} \xrightarrow{i'} W_E^{ab} \xrightarrow{t} W_{E'}^{ab},$$

on i' és el morfisme induït per la inclusió $W_{E'} \subseteq W_E$, és tal que, per a tot $x \in W_{E'}$ és $(t \circ i')(xW_{E'}^c) = \prod_{\omega \in W_E/W_{E'}} (\omega x \omega^{-1}) \pmod{W_{E'}^c}$.

D'altra banda, disposem d'un diagrama commutatiu

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} C_E & \xrightarrow{r_E,\, \simeq} & W_E^{ab} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle t}\downarrow \\ C_{E'} & \xrightarrow{r_{E'},\, \simeq} & W_{E'}^{ab}, \end{array}$$

on i és el morfisme induït per la inclusió $E \subseteq E'$ (cf. l'axioma (3) de la definició de grup de Weil); en particular, i és un morfisme injectiu i, en conseqüència, el morfisme transferidor $W_E^{ab} \xrightarrow{t} W_{E'}^{ab}$ és injectiu.

Ara, la composició

$$f : C_{E'} \xrightarrow{r_{E'},\, \simeq} W_{E'}^{ab} \xrightarrow{i'} W_E^{ab} \xrightarrow{t} W_{E'}^{ab} \xrightarrow{r_{E'}^{-1},\, \simeq} C_{E'}$$

és tal que, per a $c \in C_{E'}$, és $f(c) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|E)} c^\sigma = \mathrm{N}_{E'|E}\, c \in C_{E'}$. En efecte, si $x \in W_{E'}$ és un representant de $r_{E'}(c)$, tenim que

$$\begin{aligned} f(c) &= r_{E'}^{-1}\Big(\prod_{\omega \in W_E/W_{E'}} \omega x \omega^{-1} \pmod{W_{E'}^c}\Big) \\ &= \prod_{\omega \in W_E/W_{E'}} r_{E'}^{-1}(\omega x \omega^{-1} \pmod{W_{E'}^c}). \end{aligned}$$

En virtut de l'axioma (2) de la definició, $r_{E'}^{-1}(\omega x \omega^{-1} \pmod{W_{E'}^c}) = c^\sigma$, on $\sigma := \varphi(\omega) \in G_E/G_{E'} = \mathrm{Gal}(E'|E)$, de manera que, efectivament, com que $\dfrac{W_E}{W_{E'}} \simeq \mathrm{Gal}(E'|E)$, és $f(c) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|E)} c^\sigma = \mathrm{N}_{E'|E}\, c \in C_{E'}$.

Així, hem provat la commutativitat del diagrama

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} C_{E'} & \xrightarrow{r_{E'},\, \simeq} & W_{E'}^{ab} \\ {\scriptstyle \mathrm{N}_{E'|E}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ C_E & & W_E^{ab} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ C_{E'} & \xrightarrow[r_{E'},\, \simeq]{} & W_{E'}^{ab}, \end{array}$$

on $\mathrm{N}_{E'|E}$ és el morfisme induït per la norma $\mathrm{N}_{E'|E} : E' \to E$ (cf. **2.3**). La injectivitat de t, juntament amb la commutativitat dels diagrames (*) i (**), ens proporciona, doncs, la commutativitat del diagrama

$$\begin{tikzcd} C_{E'} \arrow[r, "r_{E'}, \simeq"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{E'|E}"'] & W_{E'}^{ab} \arrow[d, "i'"] \\ C_E \arrow[r, "r_E, \simeq"'] & W_E^{ab}, \end{tikzcd}$$

com volíem veure. □

§4. Construcció de grups de Weil

La construcció de grups de Weil, que en demostra l'existència, és una construcció cohomològica. En particular, d'ella es dedueix que els grups de Weil contenen, en la seva definició i la seva existència, la cohomologia de la teoria de cossos de classes. Veiem un esbós d'aquesta construcció.

Suposem que $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ és un grup de Weil per a $\overline{F}|F$. Llavors, per a tota extensió de Galois finita $E|F$, el grup $W_{E|F} = W_F/W_E^c$ és una extensió del grup $\mathrm{Gal}(E|F) = G_F/G_E \simeq W_F/W_E$ pel grup $C_E \xrightarrow{r_E, \simeq} W_E^{ab} = W_E/W_E^c$; és a dir, per a tota extensió de Galois finita $E|F$ es té una successió exacta

$$(*) \qquad 1 \to C_E \to W_{E|F} \to \mathrm{Gal}(E|F) \to 1,$$

on els morfismes són les composicions

$$C_E \xrightarrow{r_E, \simeq} W_E^{ab} = W_E/W_E^c \xrightarrow{\text{incl}} W_F/W_E^c = W_{E|F}$$

i

$$W_F/W_E^c \xrightarrow{\text{proj}} W_F/W_E \xrightarrow{\varphi, \simeq} G_F/G_E \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Gal}(E|F).$$

A més a més, si $E \subseteq E'$ i $E'|F$ també és finita i de Galois, i en virtut de la proposició **3.6**, es disposa d'un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & C_{E'} \arrow[r] \arrow[d, "\text{induït per } \mathrm{N}_{E'|E}"'] & W_{E'|F} \arrow[r, "\text{induït per } \varphi"] \arrow[d, "\text{induït per } W_{E'} \subseteq W_E"] & \mathrm{Gal}(E'|F) \arrow[r] \arrow[d, "\text{induït per } E \subseteq E'"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & C_E \arrow[r] & W_{E|F} \arrow[r, "\text{induït per } \varphi"'] & \mathrm{Gal}(E|F) \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Així, a fi de recuperar W_F com el límit projectiu $W_F \simeq \varprojlim_E W_F/W_E^c$, convindria identificar quina extensió de $\mathrm{Gal}(E|F)$ per C_E és cadascun dels quocients $W_{E|F}$ i quins són els morfismes de pas entre aquests quocients (cf. l'axioma (4) de la definició de grup de Weil i l'observació **3.4**, (b)).

Sigui $\alpha_{E|F} \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ la classe de cohomologia que correspon a l'extensió (*). Per a tot nombre enter n, sigui

$$(**) \qquad \mathrm{H}^n(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha_n(E|F)} \mathrm{H}^{n+2}(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$$

el morfisme natural donat pel cup producte amb $\alpha_{E|F}$.

4.1. Proposició. *Per a tot nombre enter n, $\alpha_n(E|F)$ és un isomorfisme.*

Demostració. Ja hem fet notar que el morfisme $C_F \to C_E$ induït per la inclusió $F \subseteq E$ és un morfisme de grups injectiu, invariant per a l'acció de $G := \mathrm{Gal}(E|F)$, i que la seva imatge és exactament C_E^G (cf. **2.2**). Com a conseqüència, l'axioma (3) de la definició de grup de Weil ens diu que el morfisme transferidor $W_F^{ab} \xrightarrow{t} W_E^{ab}$ és injectiu i que la seva imatge és exactament $r_E(C_E^G)$. Així, podem aplicar [**Ar-Ta 67**, cor., p. 184], i obtenim que:

(a) $\alpha_{-2}(E|F) : \mathrm{H}^{-2}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ és un isomorfisme; i

(b) $\alpha_{-3}(E|F) : \mathrm{H}^{-3}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ és exhaustiu.

D'altra banda, com que $H^{-1}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) = 0$ (cf. [**Se 79**, p. 127 i p. 128]), obtenim trivialment que

(c) $\alpha_{-1}(E|F) : \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ és injectiu.

Sigui $\varphi : C_E \times \mathbb{Z} \to C_E$ l'aplicació $\mathbb{Z}$-bilineal definida per l'assignació $\varphi(x, n) = x^n$; clarament, φ és invariant per a l'acció de $\mathrm{Gal}(E|F)$ (que és trivial en $\mathbb{Z}$); llavors, per [**Se 79**, Thm. 13, p. 148], obtenim que $\alpha_n(E|F) : \mathrm{H}^n(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{n+2}(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ és isomorfisme, per a tot nombre enter n, com volíem demostrar. $\square$

A més a més, també per teoremes abstractes de cohomologia (cf. [**Ar-Ta 67**, Thm. 6, p. 188]), s'obté que les classes de cohomologia $\alpha_{E|F}$, $\alpha_{E'|F}$, i $\alpha_{E'|E}$ estan relacionades per les fórmules

$$(***) \qquad \operatorname{infl} \alpha_{E|F} = [E' : E]\alpha_{E'|F}, \qquad \operatorname{res} \alpha_{E'|F} = \alpha_{E'|E},$$

on infl i res són els morfismes inflació i restricció de la cohomologia de grups, tal com apareixen a la teoria de cossos de classes.

Així, implícita en l'existència de grups de Weil, hi ha la cohomologia de la teoria de cossos de classes.

4.2. Exemples. (a) Prenem $n = -1$ en (**); s'obté un isomorfisme $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) \simeq \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) = 0$.

(b) Prenem $n = 0$; s'obté que $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z})$ és un grup cíclic d'ordre $[E : F]$, i que és generat per la classe $\alpha_{E|F}$ (cf. [**Se 79**, p. 127]).

(c) Prenem $n = -2$; s'obté un isomorfisme $\mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) \simeq \mathrm{H}^{-2}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z})$, és a dir, $C_F/\mathrm{N}_{E|F}C_E \simeq \mathrm{Gal}(E|F)^{ab}$, que, en virtut de (1) de la definició de grup de Weil, és donat per la llei de reciprocitat de la teoria de cossos de classes.

En particular, si l'extensió $E|F$ és cíclica, aquest isomorfisme determina la classe $\alpha_{E|F}$ i se segueix que $\alpha_{E|F}$ és la classe canònica o fonamental de la teoria de cossos de classes (cf. [**Se 79**, Chap. XI, §3]). Un argument estàndard d'inflació en aquesta teoria demostra que això mateix és cert per a tota extensió de Galois (no necessàriament cíclica) $E|F$.

Així, l'existència del grup de Weil determina unívocament les (classes de les) extensions (*).

Recíprocament, suposem que per a totes les extensions de Galois finites, $E'|E$, tenim classes de cohomologia $\alpha_{E'|E} \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(E'|E), C_{E'})$ que satisfan les condicions de (***) i tals que els morfismes $\alpha_n(E'|E)$ de (**) són isomorfismes. Aquestes propietats de compatibilitat ens permeten construir un grup de Weil W_F com el límit projectiu de les extensions de grups $W_{E|F}$ que corresponen a aquestes classes. La construcció abstracta es pot veure amb detall en [**Ar-Ta 67**, Chap. XIV], així com també l'existència d'aquestes classes de cohomologia (cf. també [**Ta 79**] i [**Ca-Fr 67**]).

§5. Unicitat dels grups de Weil

La unicitat dels grups de Weil s'estableix, com és habitual, mòdul isomorfismes.

5.1. Proposició. *Siguin* $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$, $(W'_F, \varphi', \{r'_E\}_E)$ *dos grups de Weil per a* $\overline{F}|F$. *Existeix un isomorfisme de grups topològics* $W_F \xrightarrow{\theta,\simeq} W'_F$ *tal que els diagrames següents són commutatius:*

$$\begin{array}{ccc} W_F & \xrightarrow{\varphi} & G_F \\ {\scriptstyle \theta,\simeq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ W'_F & \xrightarrow{\varphi'} & G_F, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_E & \xrightarrow{r_E,\simeq} & W_E^{ab} \\ {\scriptstyle =}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{induït per } \theta,\simeq} \\ C_E & \xrightarrow{r'_E,\simeq} & (W'_E)^{ab}. \end{array}$$

Demostració (Esbós). Per a cada extensió de Galois finita $E|F$, posem $I(E)$ per a indicar el conjunt de tots els isomorfismes de grups topològics $W_{E|F} \xrightarrow{f_{E|F}} W'_{E|F}$ tals que el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & C_E & \longrightarrow & W_{E|F} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(E|F) & \longrightarrow & 1 \\ & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle f_{E|F}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & C_E & \longrightarrow & W'_{E|F} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(E|F) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Com que les dues extensions de grups $W_{E|F}$ i $W'_{E|F}$ tenen associada la mateixa classe de cohomologia (la classe fonamental $\alpha_{E|F}$), el conjunt $I(E)$ és no buit.

A més a més, el fet que $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) = 0$ ens diu que un isomorfisme $f_{E|F}$ és determinat llevat de la composició amb un automorfisme intern de $W_{E|F}$ donat per un element de $C_E \simeq W_E^{ab}$. El centre de $W_{E|F}$ és C_F i C_E/C_F és compacte; per tant, $I(E)$ és un espai homogeni principal i, en conseqüència, té una topologia natural compacta. A més a més, per a $E \subseteq E'$, l'aplicació natural $I(E') \to I(E)$ és contínua per a aquesta topologia, fet que fa que el límit projectiu $\varprojlim_E I(E)$ sigui no buit.

Ara, un element $\theta \in \varprojlim_E I(E)$ té les propietats requerides; en efecte, com que, per l'axioma (4), disposem d'isomorfismes $W_F \simeq \varprojlim_E W_{E|F}$ i $W'_F \simeq \varprojlim_E W'_{E|F}$, en passar al límit, obtenim que $W_F \xrightarrow{\theta,\simeq} W'_F$; és a dir, θ és un isomorfisme. La commutativitat dels diagrames es dedueix immediatament de la construcció de θ. $\square$

5.2. Observació. A més a més, si θ' és un altre isomorfisme, existeix un element $w \in \operatorname{Ker}\varphi$ tal que $\theta' = \theta \circ \psi_w$, on $W_F \xrightarrow{\psi_w} W_F$ és l'automorfisme intern (conjugació) definit per w (cf. [**Ta 79**, §1.5]).

§6. Casos especials

Ens interessen, sobretot, el cas en què F és un cos local i el cas en què F és un cos de nombres; per al cas (global, que no considerarem) en què F és un cos de funcions, hom pot veure [**Ta 79**, §1.4].

En primer lloc, considerarem el cas en què F és un cos local no arquimedià; és a dir, un cos extensió finita de $\mathbb{Q}_p$, per a algun nombre primer p. En aquest cas, és $\overline{F} = \overline{\mathbb{Q}}_p$ i el grup de Weil W_F de $\overline{F}|F$ s'obté en substituir $\operatorname{Gal}(F^{nr}|F)$ per les potències de l'automorfisme de Frobenius. Veiem de quina manera es fa això.

Comencem per fixar les notacions: per a cada extensió finita $E|F$, $E \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$, posarem k_E per a designar el cos residual de E, i $q_E := \#k_E$; per simplicitat, escriurem $k := k_F$ i $q := q_F$, de manera que el cos residual de F és $k_F = k = \mathbb{F}_q$. Llavors, $\overline{k} := \bigcup_E k_E = \overline{\mathbb{F}}_q = \overline{\mathbb{F}}_p$. Indicarem per v la valoració de F normalitzada, com és habitual, de manera que el grup de valors de F^* sigui $\mathbb{Z}$. Siguin $\mathcal{O}_E$, $\mathfrak{m}_E$, respectivament, l'anell de la valoració i l'ideal maximal de E, de manera que $k_E = \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E$.

L'extensió no ramificada maximal $F^{nr}|F$ ens proporciona un cos F^{nr} amb una valoració discreta que estén la valoració de F, valoració que també denotarem per v; el cos F^{nr} no és complet per a v (cf. [**Wa 97**, Chap. 5, prop. 5.1]), i el cos residual $\mathcal{O}^{nr}/\mathfrak{m}^{nr}$ és isomorf a $\overline{k}$. De manera més precisa, si v designa una extensió de v a una valoració de $\overline{F}$ (no discreta), i $\overline{\mathcal{O}}_F$, $\overline{\mathfrak{m}}_F$ indiquen, respectivament, l'anell de la valoració i l'ideal maximal, hom té un morfisme de grups exhaustiu i continu $\operatorname{Gal}(\overline{F}|F) \to \operatorname{Gal}(\overline{k}|k)$ donat per $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$, on $\overline{\sigma}$ és la reducció mòdul $\overline{\mathfrak{m}}_F$ de la restricció de σ a $\overline{\mathcal{O}}_F$.

El nucli d'aquest morfisme és $I_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}|F^{nr})$, la inèrcia de F, de manera que $\mathrm{Gal}(F^{nr}|F) \simeq G_F/I_F \simeq \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$. Ara bé, és ben conegut (cf., per exemple, [**Ne 86**, Chap. II, §2, ex. (6)]) que $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ i que $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ és generat topològicament per l'automorfisme de Frobenius $\mathrm{Fr}_q : \overline{k} \to \overline{k}$, donat per $\mathrm{Fr}_q(x) = x^q$, per a tot element $x \in \overline{k}$. Això és dir que $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ és l'adherència del subgrup (isomorf a $\mathbb{Z}$) generat per Fr_q. Anàlogament, $\mathrm{Gal}(F^{nr}|F) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ és generat topològicament per un automorfisme Fr de F^{nr}, l'automorfisme de Frobenius de F^{nr}, que és l'únic automorfisme de F^{nr} tal que $v(\mathrm{Fr}(x) - x^q) > 0$, per a tot element $x \in \mathcal{O}^{nr}$.

6.1. Observació. No és cert que tot element $\sigma \in \mathrm{Gal}(F^{nr}|F)$ (o bé $\overline{\sigma} \in \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$) sigui una potència de l'automorfisme de Frobenius. De fet, els elements de $\widehat{\mathbb{Z}}$ són successions coherents $(a_n)_n$, $a_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, i no és cert que $\lim_n a_n \in \mathbb{Z}$, per a tota successió coherent $(a_n)_n \in \widehat{\mathbb{Z}}$ (cf. [**Ne 86**, Chap. I, §1, p. 1]).

6.2. Definició. Sigui W_F el subgrup de $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ format pels automorfismes σ de $\overline{F}$ tals que $\overline{\sigma}$ és alguna potència de l'automorfisme de Frobenius Fr_q; és a dir,

$$\begin{aligned} W_F &= \{\sigma \in G_F : \exists n \in \mathbb{Z},\, \overline{\sigma} = \mathrm{Fr}_q^n\} \\ &= \{\sigma \in G_F : \exists n \in \mathbb{Z},\, \sigma_{|F^{nr}} = \mathrm{Fr}^n\}. \end{aligned}$$

Dit d'una altra manera, W_F és l'antiimatge del subgrup $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle$ pel morfisme de reducció $G_F \to \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$, i la del subgrup $\langle \mathrm{Fr} \rangle$ per la projecció $G_F \to G_F/I_F = \mathrm{Gal}(F^{nr}|F)$.

Se satisfan les propietats següents, que recollim juntes per comoditat.

6.3. Proposició.

(a) $I_F \subseteq W_F$ *és un subgrup normal.*

(b) $W_F/I_F \simeq \mathbb{Z}$.

(c) $W_F = \langle I_F, \mathrm{Fr} \rangle$, *on* Fr $\in G_F$ *és qualsevol extensió a* $\overline{F}$ *de l'automorfisme de Frobenius* Fr *de* F^{nr}.

(d) $W_F \subseteq G_F$ *és un subgrup dens.*

DEMOSTRACIÓ. Observem, en primer lloc, que $I_F = \mathrm{Ker}(G_F \to \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ és un subgrup normal tancat de G_F; a més a més, com que W_F és l'antiimatge del subgrup $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle$ de $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$, és clar que $I_F \subseteq W_F$, que és un subgrup normal, i que $W_F/I_F \simeq \langle \mathrm{Fr}_q \rangle \simeq \mathbb{Z}$; això prova (a) i (b). D'altra banda, el mateix argument ens ensenya que $W_F = \langle I_F, \mathrm{Fr} \rangle$ per a qualsevol extensió a $\overline{F}$ de l'automorfisme de Frobenius Fr de F^{nr}; això és (c). Finalment, l'adherència de W_F conté tots els elements de G_F que es projecten en l'adherència de $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle$; com que l'adherència de $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle$ en $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ és tot el grup, obtenim que l'adherència de W_F és tot G_F, com calia demostrar □

Per a definir el grup de Weil per a l'extensió $\overline{F}|F$ ens cal, a més del grup W_F, un morfisme continu $\varphi : W_F \to G_F$ amb imatge densa i la família d'isomorfismes $\{r_E\}_E$. Per a φ, prendrem la inclusió $\varphi : W_F \to G_F$; a més a més, el símbol nòrmic $r_E := (\ , E^{ab}|) : E^* \to W_E^{ab}$ **és l'iso**morfisme de reciprocitat de la teoria de cossos de classes (cf. [**Ne 86**, Chap. III, §9, Thm. 9.2]), per a tota extensió finita $E|F$.

6.4. Exercici. Per a tota extensió finita $E|F$, sigui $E^* \xrightarrow{r_E} W_E^{ab}$ l'isomorfisme de reciprocitat. Llavors, $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ és el grup de Weil per a $\overline{F}|F$.

6.5. Observació. Pel que fa referència al signe de la llei de reciprocitat, posarem que $r_E(u)$ actua com $x \mapsto x^{|u|}$ en $\overline{k}$, on $|u| := q_E^{-v_E(u)}$, $u \in E$, és el valor absolut usual de E, normalitzat de manera que el valor absolut d'un element uniformitzador és q_E^{-1}. D'aquesta manera, els elements uniformitzadors s'apliquen en l'invers de l'automorfisme de Frobenius.

A continuació, considerarem els casos locals arquimedians; és a dir, $F = \mathbb{C}$ i $F = \mathbb{R}$.

6.6. El grup de Weil en el cas $F = \mathbb{C}$. Sigui $F = \mathbb{C}$; llavors, l'única extensió $E|F$ que s'ha de considerar és l'extensió trivial $E = F = \mathbb{C}$; en particular, el grup de Weil és de la forma $(W_{\mathbb{C}}, \varphi, r_{\mathbb{C}})$, on $\varphi : W_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{C}) = \{1\}$ ha de ser el morfisme trivial, i $r_{\mathbb{C}} : C_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* \to W_{\mathbb{C}}^{ab}$ l'isomorfisme de reciprocitat.

La propietat que $W_F = \varprojlim_E \dfrac{W_F}{W_E^c}$ ens diu, ara, que $W_{\mathbb{C}} = \dfrac{W_{\mathbb{C}}}{W_{\mathbb{C}}^c} = W_{\mathbb{C}}^{ab}$ és abelià, i, com que $W_{\mathbb{C}}^{ab} \simeq C_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$, això obliga a prendre $W_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^*$; per tant, obtenim immediatament el resultat següent:

6.7. Proposició. *El grup de Weil de $\mathbb{C}$ és la terna $(\mathbb{C}^*, \varphi, r_{\mathbb{C}})$, on $\varphi := \mathbf{1} : \mathbb{C}^* \to \{1\}$ és el morfisme trivial, i $r_{\mathbb{C}} := \mathrm{id} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*)$ és la identitat.* □

6.8. Observació. Així com en el cas local no arquimedià el grup de Weil és un subgrup del grup de Galois, en el cas $F = \mathbb{C}$ el grup de Weil és “enorme” comparat amb el grup de Galois. Això també succeeix en el cas $F = \mathbb{R}$ i en el cas en què F és un cos de nombres (cf. més avall).

6.9. El grup de Weil en el cas $F = \mathbb{R}$. Sigui $F = \mathbb{R}$; l'únic cos $E \neq F$ que s'ha de considerar és $E = \mathbb{C}$, i ja sabem quin grup ha de ser $W_{\mathbb{C}}$. Sigui c la conjugació complexa, de manera que $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) = \{1, c\}$. Veiem com ha de ser el grup de Weil $W_{\mathbb{R}}$.

Com que $\varphi : W_R \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ ha de tenir imatge densa i $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ és discret (finit), φ ha de ser exhaustiu; a més a més, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(1) = W_{\mathbb{C}}$, de manera que $\mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}}$ ha de ser un subgrup d'índex 2 de $W_{\mathbb{R}}$. Així, si $j \in W_{\mathbb{R}}$ és un element qualsevol tal que $\varphi(j) = c$, tenim que $W_{\mathbb{R}}$ és la reunió de les dues classes laterals $W_{\mathbb{C}}$ i $jW_{\mathbb{C}}$; és a dir, $W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{C}} \cup jW_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* \cup j\mathbb{C}^*$.

D'altra banda, l'axioma (2) de la definició de grup de Weil ens proporciona el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* = C_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{r_{\mathbb{C}}=\mathrm{id}} & \mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}}^{ab} = W_{\mathbb{C}} \\ {\scriptstyle c}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \text{conjugació per } j} \\ \mathbb{C}^* = C_{\mathbb{C}} & \xrightarrow[r_{\mathbb{C}}=\mathrm{id}]{} & \mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}}^{ab} = W_{\mathbb{C}}; \end{array}$$

per tant, la conjugació per j en $W_{\mathbb{C}} \subseteq W_{\mathbb{R}}$ és la conjugació complexa; és a dir, per a tot $z \in \mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}} \subseteq W_{\mathbb{R}}$, és $jzj^{-1} = c(z)$.

Fem servir, ara, l'axioma (3) de la definició de grup de Weil; obtenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* = C_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{r_{\mathbb{R}},\,\simeq} & W_{\mathbb{R}}^{ab} \\ {\scriptstyle \mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle t} \\ \mathbb{C}^* = C_{\mathbb{C}} & \xrightarrow[r_{\mathbb{C}}=\mathrm{id}]{} & W_{\mathbb{C}}^{ab} = W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*, \end{array}$$

de manera que, per ser $r_{\mathbb{R}}$ un isomorfisme, la imatge del morfisme transferidor $W_{\mathbb{R}}^{ab} \xrightarrow{t} \mathbb{C}^*$ és exactament $\mathbb{R}^*$. Calculem, doncs, el morfisme transferidor. Per a això, prenem com a sistema de representants de les classes laterals de $W_{\mathbb{C}}\backslash W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{R}}/W_{\mathbb{C}}$ el conjunt $\{1, j\}$, de manera que $s : W_{\mathbb{C}}\backslash W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ és l'aplicació $s(z) = 1$, si $z \in \mathbb{C}^*$, $s(jz) = j$, si $z \in \mathbb{C}^*$.

Hem de calcular, a continuació, els elements $h_{g,x} \in W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ tals que $s(W_{\mathbb{C}}x)g = h_{g,x}s(W_{\mathbb{C}}xg)$, per a $x, g \in W_{\mathbb{R}}$; i podem limitar-nos a $x \in \{1, j\}$. Ara bé, se satisfan les igualtats

$$g = s(W_{\mathbb{C}}1)g = h_{g,1}s(W_{\mathbb{C}}g), \qquad jg = s(W_{\mathbb{C}}j)g = h_{g,j}s(W_{\mathbb{C}}jg),$$

per a tot $g \in W_{\mathbb{R}}$. Si $g = z \in \mathbb{C}^*$, és

$$z = h_{z,1}s(W_{\mathbb{C}}) = h_{z,1}, \qquad c(z)j = jz = h_{z,j}s(W_{\mathbb{C}}jz) = h_{z,j}j,$$

de manera que $h_{z,1} = z$, $h_{z,j} = c(z)$, per a $z \in \mathbb{C}^*$. Anàlogament, per a $jz \in j\mathbb{C}^*$, és

$$c(z)j = jz = h_{jz,1}s(W_{\mathbb{C}}jz) = h_{jz,1}j, \qquad j^2z = h_{jz,j}s(W_{\mathbb{C}}j^2z) = h_{jz,j},$$

de manera que $h_{jz,1} = c(z)$, $h_{jg,j} = j^2z$, per a $jz \in j\mathbb{C}^*$. Així, el morfisme transferidor és donat per les assignacions $z \mapsto zc(z) = |z|^2$, $jz \mapsto c(z)j^2z = |z|^2j^2$, per a $z \in \mathbb{C}^*$ (observem que no cal reduir $\pmod{W_{\mathbb{C}}^c}$, perquè $W_{\mathbb{C}}^{ab} = W_{\mathbb{C}}$).

La imatge de $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{t} W_{\mathbb{C}}^{ab}$ és, doncs, $\mathbb{R}_{>0} \cup j^2\mathbb{R}_{>0}$, i ha de ser $\mathbb{R}^*$; per tant, obtenim que $j^2 \in \mathbb{R}^*$ i que $j^2 < 0$. (Notem que el càlcul del centre de $W_{\mathbb{R}}$ és trivial i proporciona $Z(W_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{C}^*$, de manera que la relació $j^2 \in \mathbb{R}^*$ s'hauria pogut obtenir, també, de manera trivial.) Ara, com que per a $z \in \mathbb{C}^*$ és $(jz)^2 = j^2|z|^2$, podem canviar j per un múltiple, si convé, a fi que se satisfaci la igualtat $j^2 = -1$ (n'hi ha prou si considerem jz, per a $z = \dfrac{1}{\sqrt{-j^2}}$).

Finalment, hem de dir quin és l'isomorfisme de reciprocitat; per a això, ens pot servir el mateix diagrama que hem usat per a la determinació del signe de j^2. El càlcul del derivat del grup $W_{\mathbb{R}}$ és immediat i proporciona la igualtat $W_{\mathbb{R}}^c = DW_{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}} : |z| = 1\} = \mathbf{U}(1)$; per tant, $W_{\mathbb{R}}^{ab}$ és la reunió de les dues classes laterals $\mathbb{C}^*/\mathbf{U}(1) \simeq \mathbb{R}_{>0}$, i $\overline{j}\mathbb{C}^*/\mathbf{U}(1) \simeq \overline{j}\mathbb{R}_{>0}$, on $\overline{j}$ indica la classe de j en $W_{\mathbb{R}}^{ab}$. Com a conseqüència, la commutativitat del diagrama ens diu que l'isomorfisme $r_{\mathbb{R}}$ és donat per les assignacions

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sqrt{x} \pmod{W_{\mathbb{R}}^c}, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}_{>0}, \\ -x &\mapsto j\sqrt{x} \pmod{W_{\mathbb{R}}^c}, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

Hem provat, doncs, el resultat següent:

6.10. Proposició. *El grup de Weil per a $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ és la terna $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ donada per*

(a) $W_{\mathbb{R}}$ és el grup generat per $\mathbb{C}^*$ i un altre element j, amb les relacions $j^2 = -1$, $jzj^{-1} = c(z)$, per a tot $z \in \mathbb{C}^*$;

(b) $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to \{1, c\} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ és l'únic morfisme de grups de nucli $\mathbb{C}^*$ (i que, per tant, envia j a c);

(c) $r_{\mathbb{C}} = \mathrm{id} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$; i

(d) $r_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^* \to W_{\mathbb{R}}^{ab}$ és donat per l'assignació $x \mapsto \sqrt{x} \pmod{W_{\mathbb{R}}^c}$, si $x > 0$, i $-x \mapsto j\sqrt{x} \pmod{W_{\mathbb{R}}^c}$, si $-x > 0$. □

6.11. El grup de Weil en el cas en què F és un cos de nombres. Finalment, considerem el cas dels cossos de nombres. Aquest cas és l'únic en el qual no es disposa d'una descripció més senzilla o més natural del grup de Weil que la construcció cohomològica artificiosa de la secció 4. En qualsevol cas, es poden provar els fets següents (cf. [**Ta 79**, §1.4.4]).

Siguin F un cos de nombres i $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ un grup de Weil per a $\overline{\mathbb{Q}}|F$. Llavors,

(a) L'aplicació $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ és exhaustiva.

(b) El nucli de φ és el component connex de la identitat de W_F.

(c) El nucli de φ és isomorf al límit projectiu dels components connexos,

D_E, del neutre de C_E, amb aplicacions de pas donades per la norma $\mathrm{N}_{E'|E}$.

(d) Les aplicacions norma $D_{E'} \to D_E$ són exhaustives.

(e) Per a tot E, la imatge de D_E per l'isomorfisme r_E és $r_E(D_E) = \mathrm{Ker}(\varphi)W_E^c/W_E^c$, que és la imatge de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ en $W_{E|F}$.

(f) Si E té r_1 immersions reals i r_2 parelles d'immersions complexes conjugades no reals, llavors D_E és isomorf al producte de $\mathbb{R}$ amb $r_1 + r_2 - 1$ solenoides i r_2 cercles.

6.12. Observació. En tots els casos que hem considerat, els subgrups de W_F de la forma W_E són exactament els subgrups oberts d'índex finit de W_F. La seva intersecció, $\mathrm{Ker}(\varphi)$, és un grup abelià connex divisible, trivial en el cas local no arquimedià, isomorf a $\mathbb{C}^*$ en els casos locals arquimedians ($\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$), i "enorme" en el cas dels cossos de nombres.

Bibliografia

[**Ar-Ta 67**] Artin, E.; Tate, J.: *Class Field Theory*, Benjamin, 1967.

[**Ca-Fr 67**] Cassels, J. W. S.; Fröhlich, A., (eds.): *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

[**Ne 86**] Neukirch, J.: *Class Field Theory*, GMW, n. 280, Springer, 1986.

[**Se 79**] Serre, J.-P.: *Local fields*, GTM, n. 67, Springer, 1979. Edició original en llengua francesa, *Corps locaux*, editada per Hermann l'any 1962.

[**Ta 79**] Tate, J.: Number theoretic background, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 3–26.

[**Wa 97**] Washington, L. C.: *Introduction to Cyclotomic Fields, Second Edition*, GTM, n. 83, Springer, 1997.