CAPÍTOL 5

Representacions de SO(3)

ARTUR TRAVESA SESSIÓ 1A. DEL DIA 30 D'OCTUBRE DE 1996

Aquest capítol correspon a una de les dues sessions del dia 30 d'octubre de 1996 del seminari de Teoria de Nombres (UB–UAB–UPC). Tal com vaig afirmar llavors, i, sobretot, pensant en els membres més joves del seminari, la versió escrita conté molts detalls sobre els quals no es va poder aprofundir en l'exposició oral.

El contingut d'aquesta exposició comena amb la introducció d'algunes definicions i notacions de caràcter general, algunes de les quals han estat objecte de capítols anteriors. A continuació s'estudien les representacions dels tors, que fan una funció anàloga a la funció que fan els caràcters de les representacions dels grups finits. Després es fa un estudi de les representacions de l'àlgebra de Lie $\mathbf{so}(3)$, a fi d'obtenir les representacions irreductibles dels grups $\mathbf{SO}(3)$ i $\mathbf{SU}(2)$. Finalment s'apliquen els mètodes estudiats a donar una explicació de la resolució de l'equació de Schrdinger.

Vull agrair a la Dra. P. Bayer l'oportunitat que m'ha donat d'aprendre aquests temes i d'haver-me convidat a participar en el seminari que dirigeix, prepara i duu a terme. En particular, cal agrair-li l'interès que ha mostrat a fer-nos conèixer, a mi i als altres membres del seminari, tots aquests temes, que obren les portes a aplicacions no trivials a la matèria del nostre interès.

§1. Representacions dels grups compactes

En general, convé estudiar dos tipus de representacions lineals (complexes) dels grups topològics compactes: les representacions finites i les representacions en espais de Hilbert.

1.1. Definició. Una representació lineal (complexa) d'un grup topològic G és un morfisme continu $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$, on V és un espai vectorial topològic complex que s'anomena l'espai de la representació. Si l'espai V és de dimensió finita, la representació s'anomena finita i la dimensió de V s'anomena el grau de la representació. En aquest cas, l'aplicació $\chi_\rho : G \to \mathrm{C}$ definida per $\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g))$, per a tot $g \in G$, s'anomena el caràcter de la representació. Si V és un espai de Hilbert, la representació s'anomena unitària si, i només si, la forma hermitiana de V és invariant per a ρ; és a dir, si per a tot $g \in G$ i tots els elements $u, v \in V$ és $\langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

1.2. Definició. Dues representacions del mateix grup G, $\rho_1 : G \to \mathbf{GL}(V_1)$, $\rho_2 : G \to \mathbf{GL}(V_2)$ s'anomenen equivalents si, i només si, existeix un isomorfisme $\gamma : V_1 \to V_2$ tal que per a tot $g \in G$ és $\gamma \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \gamma$.

1.3. Observació. Els grups finits es poden considerar grups compactes amb la topologia discreta; per tant, la teoria de les representacions dels grups compactes inclou, en particular, la teoria de les representacions dels grups finits.

Com en el cas de les representacions dels grups finits, la representació regular d'un grup compacte ens proporcionarà molta informació.

1.4. Definició. Sigui G un grup topològic compacte i considerem la mesura de Haar normalitzada de G, dg. L'espai de la representació regular de G és l'espai $L^2(G)$ de les (classes de) funcions $f : G \to \mathrm{C}$ de quadrat integrable; és a dir, de les funcions tals que la integral $\int_G |f(g)|^2 dg = \int_G f(g)\overline{f(g)} dg$ és convergent.

1.5. Observació. Recordem que les funcions contínues $f : G \to \mathrm{C}$ formen un subespai dens de $L^2(G)$.

1.6. Proposició. (Cf. [**Pi 73**, p. 100]) *Per a tot $g \in G$, tota $f \in L^2(G)$ i tot $x \in G$, posem $R_g f(x) := f(xg)$, $L_g f(x) := f(g^{-1}x)$. Llavors, les aplicacions $R : G \to \mathbf{GL}(L^2(G))$, $L : G \to \mathbf{GL}(L^2(G))$, definides per les assignacions $g \mapsto R_g$, $g \mapsto L_g$, són representacions lineals complexes, contínues i unitàries de G. S'anomenen, respectivament, la representació regular per la dreta i la representació regular per l'esquerra de G.* Λ

1.7. Proposició. (Cf. [**Pi 73**, p. 101]) *L'aplicació $\gamma : L^2(G) \to L^2(G)$ donada per $\gamma f(x) := f(x^{-1})$, per a tota $f \in L^2(G)$ i tot element $x \in G$, és un automorfisme involutiu de $L^2(G)$ tal que per a tot $g \in G$ és $R_g = \gamma L_g \gamma^{-1}$. Per tant, les representacions regulars per la dreta i per l'esquerra són equivalents.* Λ

1.8. Proposició. (Cf. [**Pi 73**, p. 90]) *Tota representació finita d'un grup compacte és equivalent a una representació unitària. Amb més precisió, si $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ és una representació finita d'un grup compacte G, existeix una forma hermitiana definida positiva en V invariant per a ρ; és a dir, tal que per a tot $g \in G$, i tot $u, v \in V$, és $\langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.* Λ

1.9. Observació. A més a més, si l'espai V ja disposa d'un producte hermitià $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_1$, existeix un automorfisme lineal de V, γ, tal que $\langle u, v \rangle = \langle \gamma(u), \gamma(v) \rangle_1$. Aleshores, la representació conjugada $\gamma \rho \gamma^{-1}$ és equivalent a la donada, ρ, i és unitària per al producte hermitià $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_1$, donat en V (Cf. [**Pi 73**, p. 91]).

1.10. Definició. Una representació finita $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$, d'un grup compacte G, s'anomena irreductible si, i només si, V no admet subespais invariants no trivials per a ρ; és a dir, si, i només si, per a tot element $v \in V$, $v \neq 0$, el subespai vectorial de V generat per la família de vectors $\{\rho(g)(v)\}_{g \in G}$ és tot V.

1.11. Proposició. (Cf. [**Pi 73**, p. 90]) *Tota representació finita d'un grup compacte és equivalent a una suma directa de representacions irreductibles, de manera essencialment única.* Λ

1.12. Observació. Siguin $\rho_i : G \to \mathbf{GL}(W_i)$, $1 \le i \le n$, representacions d'un grup G. Posem $W := W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ i sigui $\rho := \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ la representació $\rho : G \to \mathbf{GL}(W)$ definida per l'assignació $\rho_g(w_1 + \cdots + w_n) := \rho_g(w_1) + \cdots + \rho_g(w_n)$. S'anomena la representació suma directa de les ρ_i.

En la proposició anterior, "essencialment única" vol dir que si la representació ρ és suma directa de representacions irreductibles ρ_i, $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$, i també de representacions irreductibles ρ'_j, $\rho = \rho'_1 \oplus \cdots \oplus \rho'_m$, llavors $n = m$ i existeix una permutació $\sigma \in S_n$ tal que ρ_i i $\rho'_{\sigma(i)}$ són equivalents.

El resultat següent, conegut amb el nom de Lema de Schur, és bàsic.

1.13. Lema de Schur. (Cf. [**Pi 73**, p. 90]) *Siguin $\rho_i : G \to \mathbf{GL}(V_i)$, $i = 1, 2$, dues representacions finites irreductibles d'un grup compacte G i $\gamma : V_1 \to V_2$ una aplicació lineal tal que per a tot $g \in G$ és $\rho_2(g) \circ \gamma = \gamma \circ \rho_1(g)$. Llavors, $\gamma = 0$ o bé γ és un isomorfisme.* Λ

La demostració del resultat següent es proposa com a exercici.

1.14. Corol·lari. *Sigui G un grup abelià compacte. Totes les representacions irreductibles de G són de dimensió* 1. Λ

Donat un grup compacte G, sigui $\Lambda := \Lambda_G$ un conjunt de representants unitaris de les classes d'equivalència de representacions lineals finites irreductibles de G. Per a cada representació irreductible $\lambda \in \Lambda$, denotem per V_λ l'espai de la representació i per n_λ la seva dimensió. Elegim bases en cadascun dels espais V_λ i, per a tot $x \in G$, sigui $[a^\lambda_{i,j}(x)]_{1 \le i,j \le n_\lambda}$ la matriu associada a $\lambda(x)$ en aquesta base. En particular, $a^\lambda_{i,j} : G \to \mathrm{C}$ és una aplicació contínua; per tant, de quadrat integrable. Amb aquestes notacions, el teorema de Peter-Weyl s'enuncia de la manera següent:

1.15. Teorema. (Cf. [**Pi 73**, p. 103]) *Si G és un grup compacte, la família de funcions $\{\sqrt{n_\lambda} \cdot a^\lambda_{i,j}\}_{\lambda \in \Lambda}$, és a dir, la família dels coeficients de les representacions finites irreductibles de G, és un sistema ortonormal complet per a $L^2(G)$.* Λ

1.16. Corol·lari. (Cf. [**Pi 73**, p. 104]) *Tota funció complexa contínua d'un grup compacte G és límit uniforme de combinacions lineals dels coeficients de les representacions finites irreductibles de G.* Λ

El resultat següent permet alliberar-nos de les hipòtesis de finitud de les representacions i estudiar representacions en espais de Hilbert de dimensió no necessàriament finita.

1.17. Teorema. (Cf. [**Pi 73**, p. 106]) *Sigui G un grup topològic compacte. Tota representació unitària (contínua) $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$, de G en un espai de Hilbert complex V, és suma directa hilbertiana de representacions lineals irreductibles de dimensió finita; és a dir, V és l'adherència d'una suma directa de subrepresentacions irreductibles de dimensió finita.* Λ

1.18. Observació. Associada a la representació ρ donada, es considera la família de projectors ortogonals de V, $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, definits de manera que se satisfacin les igualtats

$$\langle P_\lambda(u), v\rangle = n_\lambda \int_G \langle \rho_g(u), v\rangle \overline{\chi}_\lambda(g)dg,$$

per a $u, v \in V$, i λ qualsevol representació irreductible de dimensió finita de G, on χ_λ és el caràcter de λ. Si, per a cada $\lambda \in \Lambda$, posem $V_\lambda := P_\lambda(V)$, la imatge de V pel projector P_λ, llavors, $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ i els espais V_λ són invariants per a ρ, ortogonals dos a dos, i cadascun és l'adherència d'una suma directa de subespais invariants de dimensió finita. (Observem que no diem que els espais V_λ siguin de dimensió finita.)

1.19. Definició. El subespai V_λ s'anomena el component isotípic de la representació ρ associada a λ.

§2. Tors maximals

Per a les qüestions generals que fan referència als grups de Lie i a les àlgebres de Lie, remetem el lector a les exposicions anteriors d'aquest mateix seminari i a l'àmplia bibliografia que hi ha sobre aquests temes.

2.1. Definició. Considerem, en $\mathrm{T} := \mathrm{R}/\mathrm{Z} \simeq \{e^{2\pi i\theta} : 0 \leq \theta < 1\}$, l'estructura natural de grup de Lie (real). Anomenarem tor de dimensió $k \geq 0$ tot grup de Lie isomorf a T^k; és un grup de Lie real, abelià, connex i compacte de dimensió k.

La proposició i el teorema de classificació següents s'obtenen en fer ús de l'aplicació exponencial.

2.2. Proposició. *Tot tor admet un generador; és a dir, si T és un tor, existeix un element $x \in T$ tal que T és l'adherència de $\{x^n : n \in \mathrm{N}\}$.*

Demostració (Cf. [**Si 96**, VIII.1.4]). Λ

2.3. Teorema. *Sigui G un grup de Lie real, abelià, i connex de dimensió n. Llavors, existeix k, $0 \leq k \leq n$, tal que $G \simeq \mathrm{T}^k \times \mathrm{R}^{n-k}$.*

Demostració (Cf. [**Si 96**, VII.2.3]). Λ

2.4. Corol·lari. *Tot grup de Lie real, abelià, connex i compacte és un tor.* Λ

2.5. Definició. Sigui G un grup de Lie. Un tor de G és un subgrup de Lie (tancat) de G isomorf a T^k, per a algun nombre enter $k \geq 1$. Un tor $T \subseteq G$ s'anomena un tor maximal de G si, i només si, per a tot tor $H \subseteq G$ tal que $T \subseteq H$ és $T = H$.

El teorema que segueix és semblant, en la seva estructura, als teoremes de Sylow per als grups finits; fa referència a l'existència de tors maximals, i a la relació entre ells, en els grups de Lie semisimples i compactes.

2.6. Observació. Un grup de Lie semisimple i compacte és, automàticament, connex i el seu centre és finit (cf. [**Si 96**, VII.2.5]).

2.7. Teorema. *Sigui G un grup de Lie semisimple i compacte. Llavors:*

a) Existeix algun tor maximal $T \subseteq G$.

b) Per a tot element $g \in G$ existeix un tor maximal $T \subseteq G$ tal que $g \in T$.

c) Tots els tors maximals de G són conjugats.

d) El centre de G és la intersecció de tots els tors maximals de G.

DEMOSTRACIÓ. Siguin $\mathfrak{g}$ l'àlgebra de Lie de G, i $X \in \mathfrak{g}$, $X \neq 0$. L'adherència de $\{e^{tX}\}_t$ és un subgrup de Lie abelià, connex i compacte de G; per tant, és un tor de G. En particular, en G existeixen tors. Ara bé, si $T_1 \subseteq T_2 \subseteq G$ són tors, llavors se satisfà la relació $\dim T_1 \leq \dim T_2 \leq \dim G$, amb igualtat $\dim T_1 = \dim T_2$ si, i només si, $T_1 = T_2$; com que G és de dimensió finita, no pot existir una cadena infinita estrictament creixent de tors $T_n \subsetneq T_{n+1}$; això demostra l'existència de tors maximals en G.

Les proves de les afirmacions de *b*), *c*) i *d*) es basen en el resultat següent.

2.8. Lema. (Cf. [**Si 96**, VIII.1.1']) *Siguin G un grup de Lie connex i compacte i $T \subseteq G$ un tor maximal de G. Llavors, l'aplicació $G \times T \to G$ donada per $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$ és exhaustiva.* Λ

Aquest lema ens diu que tot element de G és conjugat d'un element de qualsevol tor maximal; com que un conjugat d'un tor maximal és un tor maximal, tot element de G pertany a un tor maximal. Això demostra *b*).

Siguin $T, H \subseteq G$ dos tors maximals de G. Prenem un generador x de H i sigui $g \in G$ un element tal que $x \in gTg^{-1}$; l'existència d'un tal element g és garantida pel lema anterior. Com que per a tot $n \in \mathrm{Z}$ és $x^n \in gTg^{-1}$, i com que gTg^{-1} és tancat, el fet que x sigui un generador de H ens permet assegurar que $H \subseteq gTg^{-1}$; com que H i gTg^{-1} són tors maximals, obtenim la igualtat $H = gTg^{-1}$; i això demostra *c*).

Finalment, considerem un tor maximal $T \subseteq G$ i sigui $x \in Z(G)$ un element qualsevol. En repetir l'argument anterior, observem que existeix un element $g \in G$ tal que $x \in gTg^{-1}$; però ara, com que $x \in Z(G)$, és $x = g^{-1}xg \in T$; això prova que $Z(G) \subseteq \bigcap\{T : T \text{ és un tor maximal de } G\}$.

Recíprocament, si $x \in \bigcap\{T : T$ és un tor maximal de $G\}$, tenim que g commuta amb tots els elements de $\bigcup\{T : T$ és un tor maximal de $G\}$; però aquesta reunió és tot G, en virtut del lema. Això demostra d). Λ

2.9. Observació. En el teorema anterior no es pot suprimir la hipòtesi que el grup sigui compacte. Per a veure-ho, només cal observar que el grup de Lie $G := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, c > 0, b \in \mathrm{R} \right\} \subseteq \mathbf{GL}_2(\mathrm{R})$ no conté cap tor. En efecte, tot tor conté elements d'ordre finit diferents del neutre; en canvi, en G no hi ha elements no trivials d'ordre finit.

2.10. Exemples. Anem a determinar com són els tors maximals dels grups $\mathbf{SU}(n)$. En primer lloc, és immediat observar que el subconjunt $T_{n-1} := \{\mathrm{diag}(e^{i\lambda_1}, \ldots, e^{i\lambda_n}) : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{R},\ e^{i(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)} = 1\} \subseteq \mathbf{SU}(n)$ és un tor de dimensió $n-1$. En efecte, l'aplicació $\mathrm{T}^{n-1} \to T_{n-1}$ donada per $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \mathrm{diag}(e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_{n-1}}, e^{-2\pi i (x_1 + \cdots + x_{n-1})})$, per a $0 \leq x_i < 1$, $1 \leq i \leq n-1$, és un isomorfisme de grups de Lie. Per tant, $\mathbf{SU}(n)$ conté tors de dimensió $n-1$. Finalment, es prova que si $A \in \mathbf{SU}(n)$ és una matriu que commuta amb tota matriu $X \in T_{n-1}$, llavors $A \in T_{n-1}$; per tant, no hi ha cap subgrup abelià que contingui estrictament T_{n-1}; en conseqüència, T_{n-1} és un tor maximal. Λ

El teorema anterior admet un corol·lari bàsic per a la teoria de les representacions del grup $\mathbf{SU}(2)$ i, més generalment, per a les dels grups de Lie semisimples i compactes.

2.11. Corol·lari. *Tot tor maximal d'un grup de Lie semisimple i compacte G conté un conjunt de representants de les classes de conjugació de G.* Λ

En particular, aquest resultat ens permet assegurar que els caràcters de les representacions irreductibles de tot grup de Lie semisimple i compacte són determinats per llurs restriccions a un tor maximal, que són representacions irreductibles del tor. Per tant, no serà inútil comenar per estudiar les representacions dels tors.

2.12. Teorema. (Representacions de T) *Els caràcters complexos irre-*

ductibles del tor T *són exactament els donats per les aplicacions*

$$\begin{gathered}\chi_m : \mathrm{T} \to \mathbf{SU}(1)\\ z = e^{2\pi i\theta} \mapsto z^m = e^{2\pi i\theta m},\end{gathered}$$

per a $m \in \mathrm{Z}$. *En particular, si* Λ_{T} *designa el conjunt de les classes de representacions irreductibles del tor, és* $\Lambda_{\mathrm{T}} \simeq \mathrm{Z}$.

Demostració. Clarament, per a tot $m \in \mathrm{Z}$, l'aplicació χ_m és una representació de dimensió 1 (i, per tant, irreductible) del tor T. Recíprocament, tota representació de T és conjugada d'una representació unitària; per tant, conjugada d'una representació de la forma $\chi : \mathrm{T} \to \mathbf{SU}(1)$. D'altra banda, tota representació contínua és, automàticament, de classe C^∞ (cf. [**Pi 73**, p. 70] i [**Si 96**, VII.9.2]), de manera que χ és un morfisme de grups de Lie. En conseqüència, χ indueix un morfisme entre les àlgebres de Lie corresponents; és a dir, χ determina un morfisme $\lambda_\chi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, d'àlgebres de Lie. Com que els únics morfismes d'àlgebres de Lie $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ són les homotècies, existeix $\lambda \in \mathrm{R}$ tal que λ_χ és l'homotècia de multiplicació per λ. En prendre exponencials, obtenim que χ ha de ser l'exponencial de l'homotècia λ; és a dir, existeix $\lambda \in \mathrm{R}$ tal que $\chi(z) = z^\lambda$, per a tot $z \in \mathrm{T}$. Finalment, per la continuïtat de χ, i com que $\chi(1) = 1$, ha de ser $\lambda \in \mathrm{Z}$, com calia veure. Λ

Les representacions de tots els tors s'obtenen a partir del resultat general següent.

2.13. Proposició. *Siguin* $\rho_i : G_i \to \mathbf{GL}(V_i)$, $i = 1, 2$, *representacions complexes, contínues i irreductibles de grups compactes. L'aplicació* $\rho_1 \otimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \to \mathbf{GL}(V_1 \otimes V_2)$, *definida per l'assignació* $(g_1, g_2) \mapsto (\rho_1 \otimes \rho_2)_{(g_1,g_2)}$, *on* $(\rho_1 \otimes \rho_2)_{(g_1,g_2)}(v_1 \otimes v_2) := \rho_1(g_1)(v_1) \otimes \rho_2(g_2)(v_2)$, *sobre els generadors* $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$, *és una representació complexa, contínua i irreductible de* $G_1 \times G_2$.

Recíprocament, si $\rho : G_1 \times G_2 \to \mathbf{GL}(V)$ *és una representació complexa, contínua i irreductible, existeixen representacions complexes, contínues i irreductibles* $\rho_i : G_i \to \mathbf{GL}(V_i)$, $i = 1, 2$, *tals que* ρ *és equivalent a la representació* $\rho_1 \otimes \rho_2$.

Demostració. Cf. [**Se 77**, Thm. 10 i Chap. 4]. Λ

2.14. Corol·lari. *Les representacions dels tors* T^n, $n \geq 1$, *són parametritzades per* $m := (m_1, \ldots, m_n) \in \mathrm{Z}^n$, *en la forma següent:*

$$\chi_m : \mathrm{T}^n \to SU(1)$$
$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} z_i^{m_i}. \ \Lambda$$

Com a conseqüència del teorema de Peter-Weyl i del coneixement de les representacions irreductibles dels tors, obtenim l'anàlisi de Fourier clàssic en R^n.

2.15. Corol·lari. (Anàlisi de Fourier) *Sigui* $f \in L^2(\mathrm{T}^n)$*. Llavors,* f *és la suma d'una sèrie de Fourier; és a dir, de la forma*

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n},$$

amb $a_m \in \mathrm{C}$ *i* $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathrm{Z}^n$*.* Λ

En altres termes, si $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{C}$ és una funció múltiplement periòdica, de període 1 per a cada component, i suposem que $f \in L^2(\mathrm{R}^n)$, llavors f admet una expressió de la forma

$$f(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m_1 \theta_1} \cdots e^{2\pi i m_n \theta_n},$$

on $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathrm{Z}^n$, $a_m \in \mathrm{C}$, i $0 \leq \theta_i < 1$.

§3. Representacions de so(3)

Les àlgebres de Lie associades als grups de Lie reals $\mathbf{SU}(2)$ i $\mathbf{SO}(3)$ són isomorfes (cf. el corol·lari **4.4**); per tant, el coneixement de les representacions d'aquesta àlgebra de Lie ens donarà informació de les representacions dels dos grups.

El grup de les rotacions de l'espai vectorial euclidià R^3, $\mathbf{SO}(3)$, és un grup de Lie real, connex i compacte de dimensió 3. Es pot descriure com el grup de les matrius ortogonals de determinant 1; concretament, escriurem $\mathbf{SO}(3) = \{A \in \mathbf{GL}_3(\mathrm{R}) : A^t = A^{-1}, \det A = 1\}$. Llavors, l'àlgebra de Lie de $\mathbf{SO}(3)$ és $\mathbf{so}(3) := \{X \in M_3(\mathrm{R}) : X^t = -X\}$, i es disposa d'un isomorfisme d'espais vectorials reals

$$\mathbf{so}(3) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathrm{R} \right\} \simeq \mathrm{R}^3;$$

en particular, les matrius

$$I_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad I_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

formen una base de $\mathbf{so}(3)$, i les constants d'estructura de l'àlgebra de Lie $\mathbf{so}(3)$ són determinades per $[I_1, I_2] = I_3$, $[I_2, I_3] = I_1$, $[I_3, I_1] = I_2$ (per a una interpretació d'aquestes matrius, cf. la demostració de la proposició **5.2** més avall).

3.1. Proposició. (Tor maximal de $\mathbf{SO}(3)$) *Sigui*

$$T := \left\{ \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathrm{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbf{SO}(3).$$

Llavors, $T \simeq \mathbf{SO}(2) \simeq \mathbf{SU}(1) \simeq \mathrm{T}$, i T és un tor maximal de $\mathbf{SO}(3)$. La matriu I_3 és una base de l'àlgebra de Lie de T, considerada com a subàlgebra de $\mathbf{so}(3)$.

Demostració. Els isomorfismes $T \simeq \mathbf{SO}(2) \simeq \mathbf{SU}(1) \simeq \mathrm{T}$ són ben coneguts o bé evidents; en particular, T és un subtor de $\mathbf{SO}(3)$, i és de dimensió 1; cal veure que és un tor maximal. Si $\mathbf{SO}(3)$ contingués un tor de dimensió més gran que 1, $\mathbf{so}(3)$ contindria una subàlgebra commutativa de dimensió més gran que 1. Però si dos vectors de l'àlgebra de Lie commuten, és a dir, si $X, Y \in \mathbf{so}(3)$ són tals que $[X, Y] = 0$, llavors existeix $\lambda \in \mathrm{R}$ tal que $Y = \lambda X$ (càlcul senzill). Per tant, les subàlgebres commutatives maximals de $\mathbf{so}(3)$ són de dimensió 1. Per a l'afirmació que fa referència a l'àlgebra de Lie de T, vegeu la demostració de la proposició **5.2** més avall. Λ

3.2. Observació. Dels cursos de geometria lineal és ben conegut que tot element de $\mathbf{SO}(3)$ és conjugat d'una matriu de la forma $A := \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, amb $a^2 + b^2 = 1$, $a, b \in \mathrm{R}$. (En efecte, tota rotació de l'espai, després d'un canvi de base que faci coincidir l'eix de rotació amb l'eix $0z$, és de la forma A.) En aquest cas, doncs, ja és ben conegut el fet que tot element del grup pertany a un tor maximal (cf. el teorema **2.7**).

3.3. Exercici. L'àlgebra de Lie $\mathbf{so}(3)$ és simple.

3.4. Observació. Si $r : \mathbf{so}(3) \to L$ és un morfisme no trivial d'àlgebres de Lie, r és un isomorfisme amb la imatge; doncs, $\mathrm{im}(r)$ admet una base a_1, a_2, a_3 tal que $[a_1, a_2] = a_3$, $[a_2, a_3] = a_1$, $[a_3, a_1] = a_2$.

3.5. Proposició. *Sigui $\rho : \mathbf{SO}(3) \to \mathbf{GL}(V)$ una representació complexa, finita, contínua, i no trivial, no necessàriament irreductible. Existeixen operadors* C*-lineals A_1, A_2, A_3 en V, tals que $[A_1, A_2] = A_3$, $[A_2, A_3] = A_1$, $[A_3, A_1] = A_2$. Si, a més a més, ρ és unitària, els operadors A_1, A_2, A_3 són antihermitians.*

Demostració. Una tal representació ρ és un morfisme de grups de Lie, de manera que, per pas a les àlgebres de Lie, ρ dóna lloc a un morfisme no trivial $d\rho : \mathbf{so}(3) \to \mathrm{End}(V)$, de l'àlgebra de Lie $\mathbf{so}(3)$ en l'àlgebra de Lie (real) $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_{\mathrm{C}}(V)$, de $\mathbf{GL}(V)$. En conseqüència, la imatge de $d\rho$ és un subespai vectorial (real) de dimensió 3 de $\mathrm{End}(V)$, que admet una base formada per operadors C-lineals A_1, A_2, $A_3 \in \mathrm{End}(V)$ tals que $[A_1, A_2] = A_3$, $[A_2, A_3] = A_1$, $[A_3, A_1] = A_2$.

A més a més, si ρ és unitària, dels fets que l'aplicació exponencial $\exp : \mathbf{so}(3) \to \mathbf{SO}(3)$ és exhaustiva i que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SO}(3) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{GL}(V) \\ {\scriptstyle\exp}\big\uparrow & & {\scriptstyle\exp}\big\uparrow \\ \mathbf{so}(3) & \xrightarrow{d\rho} & \mathrm{End}(V) \end{array}$$

és commutatiu s'obté que $\overline{A}_k^t = -A_k$, per a $1 \leq k \leq 3$; és a dir, els operadors A_1, A_2, A_3 són antihermitians. Λ

Posem $H_3 := iA_3$, $H_+ := iA_1 - A_2$, $H_- := iA_1 + A_2$; llavors, H_3 és un operador hermitià i H_+, H_- són operadors hermitianament conjugats de V; és a dir, se satisfan les relacions $\overline{H}_3^t = H_3$, $\overline{H}_+^t = H_-$ i $\overline{H}_-^t = H_+$. D'altra banda, aquests operadors satisfan les regles de commutació

$$[H_+, H_-] = 2H_3, \qquad [H_-, H_3] = H_-, \qquad [H_3, H_+] = H_+.$$

3.6. Observació. Els operadors H_3, H_+, H_- no pertanyen, en general, a $\mathrm{im}(d\rho)$, que és un espai vectorial real.

Com que H_3 és un operador hermitià d'un espai vectorial complex de dimensió finita, és diagonalitzable en una base ortonormal de vectors propis, i els valors propis són reals. Sigui $v \in V$ un vector propi no nul de H_3, i sigui $\lambda \in \mathrm{R}$ el valor propi corresponent. Llavors,

$$\begin{aligned} H_3(H_+v) &= ([H_3, H_+] + H_+H_3)v = (H_+(1 + H_3))v = \\ &= H_+(1 + \lambda)v = (1 + \lambda)H_+v, \\ H_3(H_-v) &= ([H_3, H_-] + H_-H_3)v = (-H_- + H_-H_3)v = \\ &= H_-(H_3v - v) = (\lambda - 1)H_-v. \end{aligned}$$

Aquest càlcul demostra el resultat següent:

3.7. Lema. *Si $v \in V$ és un vector propi no nul de H_3, de valor propi $\lambda \in \mathrm{R}$, llavors:*

a) $H_+v = 0$ o bé H_+v és vector propi de H_3 de valor propi $\lambda + 1$.

b) $H_-v = 0$ o bé H_-v és vector propi de H_3 de valor propi $\lambda - 1$. Λ

3.8. Lema. *Existeix $\psi_0 \in V$, vector propi no nul de H_3 tal que $H_+\psi_0 = 0$.*

Demostració. Siguin $\lambda \in \mathrm{R}$ un valor propi de H_3 i $v \in V$ un vector propi no nul de valor propi λ. Com que V és de dimensió finita, l'operador H_3 només té una quantitat finita de valors propis diferents; en virtut del lema anterior, existeix $r \in \mathrm{N}$ tal que els vectors v, H_+v, $H_+^2v = H_+H_+v$, H_+^3v, $\dots$, H_+^rv són vectors propis no nuls de H_3 de valors propis λ, $\lambda+1$, $\lambda+2$, $\dots$, $\lambda+r$, i $H_+^{r+1}v = 0$; només cal definir $\psi_0 := H_+^rv$. Λ

Sigui $\ell \in \mathrm{R}$ el valor propi associat al vector propi ψ_0, i considerem la successió de vectors de V: ψ_0, $\psi_1 := H_-\psi_0$, $\psi_2 := H_-\psi_1$, $\ldots$, $\psi_s := H_-\psi_{s-1}$, $\ldots$; aquests vectors són vectors propis de H_3 de valors propis diferents ℓ, $\ell-1$, $\ell-2$, $\ldots$, $\ell-s$, $\ldots$. De nou, com que V és de dimensió finita, la successió s'acaba en 0; és a dir, existeix $s \in \mathrm{N}$ tal que $\psi_s \neq 0$ i $H_-\psi_s = 0$.

3.9. Proposició. *Sigui $W := \langle \psi_0, \ldots, \psi_s \rangle$ el subespai vectorial de V generat pels vectors ψ_0, $\ldots$, ψ_s. Llavors:*

a) El subespai W és invariant per als operadors H_3, H_+ i H_-.

b) $\dim W = 2\ell + 1$; en particular, $\ell \in \mathrm{N}$ o bé $\ell \in \frac{1}{2}\mathrm{N}$.

c) Els valors propis de H_3 en W són $-\ell, -\ell+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \ell-1, \ell$.

d) Tots els vectors $\psi_0, \ldots, \psi_s$ són vectors propis de l'operador $A := A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ associats al mateix valor propi, $-\ell(\ell+1)$.

e) La restricció de la representació ρ al subespai W és irreductible.

Demostració. La relació $[H_+, H_-] = 2H_3$ ens permet calcular recursivament l'acció de H_+ sobre els vectors $\psi_0, \ldots, \psi_s$. En primer lloc, observem que, per definició de ψ_0, és $H_+\psi_0 = 0$. A continuació, podem escriure

$$\begin{aligned} H_+\psi_1 &= H_+H_-\psi_0 = [H_+, H_-]\psi_0 + H_-H_+\psi_0 \\ &= 2H_3\psi_0 = 2\ell\psi_0. \end{aligned}$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} H_+\psi_2 &= H_+H_-\psi_1 = [H_+, H_-]\psi_1 + H_-H_+\psi_1 \\ &= 2H_3\psi_1 + H_-(2\ell\psi_0) = (2\ell-1)2\psi_1. \\ H_+\psi_3 &= H_+H_-\psi_2 = [H_+, H_-]\psi_2 + H_-H_+\psi_2 \\ &= 2H_3\psi_2 + H_-((2\ell-2)2\psi_1) = (2\ell-2)3\psi_2. \end{aligned}$$

Per recurrència, si posem $H_+\psi_t = (2\ell - t + 1)t\psi_{t-1}$, obtenim les igualtats

$$\begin{aligned} H_+\psi_{t+1} &= H_+H_-\psi_t = [H_+, H_-]\psi_t + H_-H_+\psi_t \\ &= 2H_3\psi_t + H_-(2\ell - t + 1)t\psi_{t-1} = (2\ell - t)(t+1)\psi_t; \end{aligned}$$

i, finalment, la relació $H_+\psi_s = (2\ell - s + 1)s\psi_{s-1}$.

Així, hem provat que el subespai W és invariant per H_+. D'altra banda, com que els vectors $\psi_0, \ldots, \psi_s$ són vectors propis de H_3, W és invariant per H_3; i, per construcció dels vectors $\psi_{t+1} := H_-\psi_t$, W és invariant per H_-. Per tant, W és invariant pels operadors H_3, H_+ i H_-; de fet, l'acció dels operadors H_+, H_- i H_3 sobre els vectors ψ_t es pot resumir en la taula següent:

$$
\begin{array}{lll}
H_3\psi_0 = \ell\psi_0 & H_-\psi_0 = \psi_1 & H_+\psi_0 = 0 \\
H_3\psi_1 = (\ell-1)\psi_1 & H_-\psi_1 = \psi_2 & H_+\psi_1 = 2\ell\psi_0 \\
H_3\psi_2 = (\ell-2)\psi_2 & H_-\psi_2 = \psi_3 & H_+\psi_2 = (2\ell-1)2\psi_1 \\
\quad\ldots & \quad\ldots & \quad\ldots \\
H_3\psi_t = (\ell-t)\psi_t & H_-\psi_t = \psi_{t+1} & H_+\psi_t = (2\ell-t+1)t\psi_{t-1} \\
\quad\ldots & \quad\ldots & \quad\ldots \\
H_3\psi_s = (\ell-s)\psi_s & H_-\psi_s = 0 & H_+\psi_s = (2\ell-s+1)s\psi_{s-1}
\end{array}
$$

Això demostra a).

Si ara tenim en compte, de nou, la relació $[H_+, H_-] = 2H_3$, obtenim la igualtat

$$
\begin{aligned}
2(\ell-s)\psi_s &= 2H_3\psi_s = [H_+, H_-]\psi_s \\
&= H_+H_-\psi_s - H_-H_+\psi_s = -H_-(2\ell-s+1)s\psi_{s-1} \\
&= -(2\ell-s+1)s\psi_s;
\end{aligned}
$$

com que $\psi_s \neq 0$, és $0 = 2(\ell-s) + s(2\ell-s+1) = (2\ell-s)(s+1)$, d'on deduïm que $s = 2\ell$, perquè $s \geq 0$; en particular, $\dim W = s+1 = 2\ell+1$, fet que demostra b).

A més a més, com que els valors propis de H_3 sobre els vectors $\psi_0, \ldots, \psi_{2\ell}$ són, respectivament, $\ell, \ell-1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, -\ell$, obtenim c).

Per a veure d), considerem les relacions $H_- + H_+ = 2iA_1$, $H_- - H_+ = 2A_2$, i $H_3 = iA_3$. De la definició de A, obtenim les igualtats $A = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = -H_3^2 - H_3 - H_-H_+$. En conseqüència, un càlcul senzill demostra que $A\psi_t = -\ell(\ell+1)\psi_t$.

Finalment, per a provar e), es tracta de veure, d'una banda, que l'acció de ρ es pot restringir a W; i, de l'altra, que la restricció de ρ a W és una representació irreductible. Per a veure la primera propietat, cal usar la commutativitat de les aplicacions exponencials amb les representacions ρ i $d\rho$ (cf. [**Pi 73**, p. 60]): en efecte, dir que W és un subespai invariant per als operadors H_+, H_- i H_3, equival a dir que ho és per als operadors A_1, A_2 i A_3; i, com que aquests són una base de la imatge de $d\rho$, això implica que el subespai W és invariant per a ρ. Per a la segona propietat, suposem que $W' \subseteq W$, $W' \neq 0$, és un subespai invariant per a ρ; llavors, W' és invariant per als operadors H_3, H_+ i H_-. Considerem un vector propi qualsevol no nul, $v' \in W'$, de la restricció de H_3 a W', i construïm, com abans, vectors $\psi'_0, \dots, \psi'_{s'}$, ara en W'. Afirmem que existeix $\gamma_0 \in \mathrm{C}$, $\gamma_0 \neq 0$, tal que $\psi'_0 = \gamma_0\psi_0$; com a conseqüència d'aquest fet, obtindrem que $\psi_0 \in W'$ i, per la invariància de W' per a H_-, obtindrem la igualtat $W' = W$, que acaba la demostració.

Provem, doncs, l'afirmació. Com que $\psi_0, \dots, \psi_{2\ell}$ és una base de W, existeixen nombres complexos $\gamma_0, \dots, \gamma_{2s} \in \mathrm{C}$ tals que $\psi'_0 = \sum_{t=0}^{2\ell} \gamma_t\psi_t$; volem veure que $\gamma_t = 0$, per a $1 \leq t \leq 2\ell$. Ara bé, d'aquesta relació obtenim que

$$0 = H_+\psi'_0 = \sum_{t=0}^{2\ell} \gamma_t H_+\psi_t = \sum_{t=0}^{2\ell} \gamma_t(2\ell - t + 1)t\psi_{t-1},$$

de manera que $(2\ell - t + 1)t\gamma_t = 0$, per a $0 \leq t \leq 2\ell$; i aquestes relacions impliquen $\gamma_t = 0$, per a $1 \leq t \leq 2\ell$, com volíem veure. Λ

3.10. Observació. Pel procediment que acabem de descriure, cada vector propi de H_3 genera una subrepresentació irreductible de ρ; com que H_3 és diagonalitzable en una base de vectors propis, aquest procediment, aplicat de manera recursiva a l'ortogonal del subespai irreductible W, ens permet assegurar que ρ és la suma directa de representacions irreductibles, totes construïdes de la mateixa manera. El màxim, ℓ, dels valors propis de H_3, s'anomena el pes de la representació ρ, i $2\ell + 1$ és el màxim dels graus de les representacions irreductibles en què ρ descompon.

3.11. Observació. Sigui $\lambda : T \to \mathbf{GL}(V)$ la restricció de ρ al tor maximal T de $\mathbf{SO}(3)$ (cf. la proposició **3.1**). Llavors, cadascun dels vectors ψ_t genera un subespai (complex) de dimensió 1, invariant per a la representació λ.

En efecte, l'àlgebra de Lie de T és la subàlgebra de $\mathbf{so}(3)$ generada per I_3, de manera que $d\lambda$ proporciona l'operador A_3, com a imatge de I_3, i, en conseqüència, l'operador H_3. A més a més, la commutativitat del diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{GL}(V) \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & {\scriptstyle\exp}\uparrow \\ \mathrm{R}I_3 & \xrightarrow{d\lambda} & \mathrm{End}(V) \end{array}$$

i el fet que l'aplicació exponencial $\mathrm{R}I_3 \xrightarrow{\exp} T$ és exhaustiva ens diuen que la representació λ és donada per l'assignació $\exp(\alpha_3 I_3) \mapsto \exp(\alpha_3 A_3)$. Com a conseqüència, per a tot $\alpha_3 \in \mathrm{R}$, és $\lambda(\exp(\alpha_3 I_3))\psi_t = e^{-i(\ell-t)\alpha_3}\psi_t$.

Això ens permet dir que la restricció de λ al subespai generat per ψ_t és el caràcter irreductible $\mathrm{T} \to T \to \mathbf{SU}(1)$ donat per l'assignació $e^{i\alpha_3} \mapsto \exp(\alpha_3 I_3) \mapsto e^{-i(\ell-t)\alpha_3}$; és a dir, el caràcter irreductible que correspon al paràmetre $-(\ell - t) \in \mathrm{Z}$ en la classificació del teorema **2.12**. En particular, el pes de la representació ρ és determinat pel caràcter de la subrepresentació irreductible de ρ de dimensió màxima.

En resum, amb un canvi d'indexació dels vectors ψ_t, hem provat el resultat següent, que ens proporciona condicions necessàries que han de satisfer les representacions de $\mathbf{SO}(3)$. Aquestes condicions, encara que no són suficients, ens permetran determinar totes les representacions irreductibles tant de $\mathbf{SO}(3)$ com de $\mathbf{SU}(2)$.

3.12. Teorema. *Sigui $\rho : \mathbf{SO}(3) \to \mathbf{GL}(V)$ una representació complexa, contínua, unitària, irreductible i no trivial. Llavors, ρ és determinada per la dimensió de V, que és de la forma $\dim V = 2\ell + 1$, amb $\ell \in \mathrm{N}$, o bé $\ell \in \frac{1}{2}\mathrm{N}$. A més a més, existeix una base ortogonal de V, $\psi_{-\ell}, \dots, \psi_\ell$, i operadors de V, H_+, H_-, H_3, associats a la representació, tals que $H_-\psi_t = \psi_{t-1}$, $H_3\psi_t = t\psi_t$, $H_+\psi_t = (\ell - t)(\ell + t + 1)\psi_{t+1}$, per a $-\ell \le t \le \ell$, on escrivim $\psi_{-\ell-1} := 0$. En particular, els valors propis de H_3 són $-\ell, -\ell + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell$.* Λ

§4. Representacions de SU(2) i de SO(3)

El teorema anterior ens diu, en particular, que si ρ és una representació irreductible de $\mathbf{SO}(3)$, ρ és determinada per un nombre $\ell \in \mathrm{N}$ o bé $\ell \in \frac{1}{2}\mathrm{N}$, el pes. Però, és cert que donat $\ell \in \mathrm{N}$ o bé $\ell \in \frac{1}{2}\mathrm{N}$, existeix una representació unitària irreductible $\rho^{(\ell)} : \mathbf{SO}(3) \to \mathbf{GL}(V)$ que tingui associat el pes ℓ? La resposta només és positiva si $\ell \in \mathrm{N}$ i, per a demostrar-ho, és útil descriure les representacions irreductibles de $\mathbf{SU}(2)$.

4.1. Proposició. $\mathbf{SU}(2)$ *és el recobriment simplement connex universal de* $\mathbf{SO}(3)$. *Més concretament, existeix una successió exacta de morfismes de grups,*

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathbf{SU}(2) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(3) \to 1,$$

on π és un morfisme de grups de Lie.

DEMOSTRACIÓ. Comencem per parametritzar el grup de rotacions $\mathbf{SO}(3)$ amb els angles d'Euler.

4.2. Lema. *Donada una rotació qualsevol $g \in \mathbf{SO}(3)$, existeixen nombres reals $\varphi, \psi, \theta \in \mathrm{R}$, $0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, tals que $g = Z_\varphi X_\theta Z_\psi$, on les matrius X_θ, Z_φ són de la forma*

$$X_\theta := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad Z_\varphi := \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓ. Suposem donada una rotació g; per una rotació del tipus $Z_{-\varphi}$, portem el seu eix al pla Oyz; a continuació, per una rotació del tipus $X_{-\theta}$, fem coincidir l'eix de rotació amb l'eix Oz, de manera que resulti una rotació del tipus Z_ψ; és a dir, tenim una relació de la forma $X_{-\theta} \circ Z_{-\varphi} \circ g = Z_\psi$, d'on obtenim la relació que cerquem. Λ

Procedim ara a la demostració de la proposició. Considerem l'espai vectorial subjacent a l'àlgebra de Lie $\mathbf{su}(2)$ de $\mathbf{SU}(2)$; això és, l'espai vectorial real format per les matrius $H \in \mathbf{GL}(2, \mathrm{C})$ que són hermitianes i de traa nul·la; és a dir, tals que $\overline{H}^t = H$ i $\mathrm{Tr}(H) = 0$; així,

$$\mathbf{su}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{R} \right\}.$$

Evidentment, $\mathbf{su}(2)$ és un espai vectorial real de dimensió 3, que admet per base el conjunt format per les matrius de Pauli

$$h_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h_2 := \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad h_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

aquesta base permet identificar l'espai vectorial $\mathbf{su}(2)$ amb R^3 i, per tant, considerar, en $\mathbf{su}(2)$, el producte escalar ordinari. La norma associada a aquest producte escalar és donada per $N(H_x) := \langle H_x, H_x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -\det(H_x)$, per a tota matriu $H_x := \begin{bmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{su}(2)$.

El grup $\mathbf{SU}(2)$ actua per conjugació en $\mathbf{su}(2)$ de la manera següent: donades matrius $A \in \mathbf{SU}(2)$ i $H_x \in \mathbf{su}(2)$, la matriu AH_xA^{-1} pertany a $\mathbf{su}(2)$. En efecte; per un canvi de base, la traa no canvia, de manera que la traa de AH_xA^{-1} és la mateixa que la de H_x; és a dir, zero. D'altra banda, com que H_x és hermitiana i A és unitària ($\overline{A}^t = A^{-1}$), se satisfà immediatament que AH_xA^{-1} també és hermitiana: $(\overline{AH_xA^{-1}})^t = (\overline{A}^{-1})^t\, \overline{H}_x^t\, \overline{A}^t = AH_xA^{-1}$.

Així, tenim una acció lineal de $\mathbf{SU}(2)$ en $\mathbf{su}(2)$; és a dir, un morfisme de grups $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{GL}(\mathbf{su}(2)) \simeq \mathbf{GL}(3, \mathrm{R})$. Aquest morfisme de grups té imatge inclosa en $\mathbf{O}(3)$; és a dir, l'acció de $\mathbf{SU}(2)$ es realitza per matrius ortogonals. En efecte, per a tota matriu $A \in \mathbf{SU}(2)$ i tota matriu $H_x \in M$ és $N(AH_xA^{-1}) = -\det(AH_xA^{-1}) = -\det(H_x) = N(H_x)$, de manera que l'acció de $\mathbf{SU}(2)$ respecta la norma i, en conseqüència, la matriu de la transformació $H_x \mapsto AH_xA^{-1}$ és una matriu ortogonal per al producte escalar ordinari de R^3.

Per tant, disposem d'un morfisme de grups (continu) $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{O}(3)$. El nucli del morfisme és $\{\pm 1\}$; en efecte, una matriu unitària A pertany al nucli si, i només si, A commuta amb les tres matrius h_1, h_2 i h_3; i un càlcul directe demostra que ha de ser $A = \pm 1$.

Només resta veure que la imatge del morfisme $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{O}(3)$ és exactament $\mathbf{SO}(3)$. Comencem per veure que la imatge està inclosa en $\mathbf{SO}(3)$. Per a això, observem que tota matriu $A \in \mathbf{SU}(2)$ és de la forma $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$, amb $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$; a més a més, tota matriu $A \in \mathbf{SU}(2)$ és conjugada d'una de la forma $b_\varphi := \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbf{SU}(2)$, per a un cert

$\varphi \in \mathrm{R}$, i l'element que conjuga és una matriu unitària; és a dir, per a tota matriu $A \in \mathbf{SU}(2)$, existeixen $\varphi \in \mathrm{R}$ i $B \in \mathbf{SU}(2)$ tals que $A = Bb_\varphi B^{-1}$. En particular, per a tot $\varphi \in \mathrm{R}$, l'acció de b_φ sobre les matrius h_1, h_2 i h_3 proporciona les matrius

$$\begin{aligned} b_\varphi h_1 b_\varphi^{-1} &= \cos\varphi\, h_1 + \sin\varphi\, h_2, \\ b_\theta h_2 b_\theta^{-1} &= -\sin\varphi\, h_1 + \cos\varphi\, h_2, \\ b_\varphi h_3 b_\varphi^{-1} &= h_3; \end{aligned}$$

per tant, la matriu associada a l'acció de b_φ és la matriu $Z_\varphi \in \mathbf{SO}(3)$, de la rotació d'angle φ al voltant de l'eix Oz; en particular, el seu determinant és 1. Per causa de la conjugació $A = Bb_\varphi B^{-1}$, les matrius associades a les accions $H_x \mapsto AH_xA^{-1}$ són totes de determinant $\mathbf{1}$ i, en conseqüència, la imatge de $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{O}(3)$ està inclosa en $\mathbf{SO}(3)$. Observem que, a més a més, hem provat que la imatge conté totes les matrius Z_φ.

Finalment, resta veure que el morfisme $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$ és exhaustiu; per causa del lema **4.2** i del fet que les matrius Z_φ pertanyen a la imatge, és suficient veure que les matrius X_θ també pertanyen a la imatge. Ara bé, per a tot $\theta \in \mathrm{R}$, és $c_\theta := \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \in \mathbf{SU}(2)$, i l'acció de c_θ en les matrius h_1, h_2 i h_3 és donada per la matriu X_θ (càlcul directe); per tant, les matrius X_θ també pertanyen a la imatge, com volíem veure. Això acaba la demostració de la proposició. Λ

4.3. Observació. Una rotació qualsevol $Z_\varphi X_\theta Z_\psi$ és la imatge de, precisament, les dues matrius

$$\pm b_\varphi c_\theta b_\psi = \pm \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{bmatrix}.$$

4.4. Corol·lari. *Es té un isomorfisme* $\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)/\{\pm 1\}$*; en conseqüència, els grups de Lie* $\mathbf{SO}(3)$ *i* $\mathbf{SU}(2)$ *tenen associades àlgebres de Lie isomorfes.* Λ

En la secció anterior hem trobat condicions necessàries que han de satisfer les representacions de $\mathbf{so}(3)$; com que els grups de Lie $\mathbf{SO}(3)$ i $\mathbf{SU}(2)$ tenen associades àlgebres de Lie isomorfes, $\mathbf{so}(3) \simeq \mathbf{su}(2)$, aquestes condicions no només s'apliquen a les representacions de $\mathbf{SO}(3)$, sinó també a les representacions de $\mathbf{SU}(2)$. Per tant, obtenim el resultat següent:

4.5. Corol·lari. *Sigui $\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{GL}(V)$ una representació complexa, contínua, unitària, irreductible i no trivial. Llavors, ρ és determinada per la dimensió de V, que és de la forma $\dim V = 2\ell + 1$, amb $\ell \in \mathrm{N}$, o bé $\ell \in \frac{1}{2}\mathrm{N}$. A més a més, existeix una base ortogonal de V, $\psi_{-\ell}, \dots, \psi_\ell$, i operadors de V, H_+, H_-, H_3, associats a la representació, tals que $H_-\psi_t = \psi_{t-1}$, $H_3\psi_t = t\psi_t$, $H_+\psi_t = (\ell - t)(\ell + t + 1)\psi_{t+1}$, per a $-\ell \leq t \leq \ell$, on escrivim $\psi_{-\ell-1} := 0$. En particular, els valors propis de H_3 són $-\ell, -\ell + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell$.* Λ

A continuació, obtenim les representacions irreductibles de $\mathbf{SU}(2)$.

4.6. Teorema. *Per a tot nombre $\ell \in \mathrm{N}$ o bé $\ell \in \frac{1}{2}\mathrm{N}$, existeix una representació unitària irreductible $\rho^{(\ell)} : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{GL}(2\ell + 1, \mathrm{C})$, única llevat d'isomorfisme. El pes ℓ de la representació és determinat unívocament com el màxim dels valors propis de l'operador H_3 associat a la representació.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $r^{(\ell)} : \mathbf{su}(2) \to \mathbf{GL}(V_\ell)$ la representació de $\mathbf{so}(3) \simeq \mathbf{su}(2)$ de pes ℓ, construïda a partir d'una base ortonormal $\psi_{-\ell}, \dots, \psi_\ell$ d'un espai vectorial unitari V_ℓ, de dimensió $2\ell + 1$, en definir els operadors H_3, H_+ i H_- com més amunt.

Com que $\mathbf{SU}(2)$ és simplement connex, tota representació de la seva àlgebra de Lie dóna lloc, en prendre exponencials, a una representació del grup de Lie. En efecte, les imatges dels operadors A_1, A_2 i A_3 que corresponen als H_+, H_- i H_3 generen un subgrup de Lie de $\mathbf{GL}(2\ell + 1, \mathrm{C})$, i $r^{(\ell)}$ és un isomorfisme local de $\mathbf{SU}(2)$ en aquest grup de Lie; com que $\mathbf{SU}(2)$ és simplement connex, aquest isomorfisme local s'estén a un morfisme de grups de Lie de tot $\mathbf{SU}(2)$ (cf. [**Pi 73**, p. 114]). Λ

Abans d'obtenir les representacions irreductibles de $\mathbf{SO}(3)$, observem alguns exemples.

4.7. Exemples.

• La representació trivial $\mathbf{SU}(2) \to \mathrm{C}^*$ és equivalent a la representació $\rho^{(0)}$. En efecte, la representació trivial és de dimensió 1; per tant és irreductible i, com que, de les representacions irreductibles, $\rho^{(0)}$ és l'única de dimensió 1, han de ser equivalents.

• La representació identitat $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SU}(2) \subseteq \mathbf{GL}(2, \mathrm{C})$ és, evidentment, irreductible, i és de dimensió 2; per tant, és equivalent a la representació $\rho^{(\ell)}$ que correspon a $2\ell + 1 = 2$; és a dir, a $\ell = \dfrac{1}{2}$.

• En general, la representació $\rho^{(1/2)} \otimes \cdots \otimes \rho^{(1/2)}$, k vegades, és tal que H_3 té valor propi màxim igual a $\dfrac{k}{2}$. Per tant, $\rho^{(k/2)}$ és equivalent a una subrepresentació irreductible d'aquesta, i es pot obtenir de manera explícita a partir d'un vector propi de valor propi $\dfrac{k}{2}$.

4.8. Exercici. Comproveu aquest fet (cf. [**Pi 73**, p. 120]).

Hom pot donar una altra descripció de les representacions irreductibles de $\mathbf{SU}(2)$.

4.9. Proposició. *Sigui $P_n(\mathrm{C})$ l'espai vectorial complex dels polinomis homogenis de grau n en dues indeterminades X, Y. El grup $\mathbf{GL}(2, \mathrm{C})$ actua de manera natural en $P_n(\mathrm{C})$ per la fórmula*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} f(X, Y) := f(aX + bY, cX + dY).$$

Per restricció a $\mathbf{SU}(2)$, s'obté una representació $\rho_n : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{GL}(P_n(\mathrm{C}))$, de dimensió $n+1$, que és irreductible. En particular, les ρ_n, $n \in \mathrm{N}$, són les representacions irreductibles de $\mathbf{SU}(2)$: $\rho_n \sim \rho^{(2\ell+1)}$, per a $n + 1 = 2\ell + 1$.

Demostració. Cal veure que la representació $\rho_n : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{GL}(P_n(\mathrm{C}))$ és irreductible; és a dir, que no hi ha subespais invariants no trivials. Suposem, doncs, que $W \subseteq P_n(\mathrm{C})$, $W \neq 0$, és un subespai invariant per a ρ_n; cal veure que $W = P_n(\mathrm{C})$. Sigui $f(X, Y) =: \sum_{k=0}^{n} a_k X^k Y^{n-k} \in W$, $a_k \in \mathrm{C}$, $0 \leq k \leq n$, $f(X, Y) \neq 0$, un element no nul qualsevol de W. En particular, existeix algun índex k, $0 \leq k \leq n$, tal que $a_k \neq 0$.

Per a tot $\varphi \in \mathrm{R}$, l'acció de b_φ sobre $f(X,Y)$ proporciona un polinomi de W; concretament, obtenim que

$$e^{-in\frac{\varphi}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi} a_k X^k Y^{n-k} = b_\varphi f(X,Y) \in W.$$

Si ens pensem els productes $a_k X^k Y^{n-k}$ com $n+1$ incògnites, i prenem $n+1$ valors diferents de φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, el sistema lineal d'equacions

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi} a_k X^k Y^{n-k} = e^{in\frac{\varphi}{2}} b_\varphi f(X,Y),$$

és de Cramer, amb matriu associada $[e^{ik\varphi}]$, de Vandermonde; per tant, en resoldre'l, obtenim que $a_k X^k Y^{n-k} \in W$, per a $0 \le k \le n$; i d'aquí s'obté que $X^k Y^{n-k} \in W$, per a tot índex k tal que $a_k \neq 0$.

Considerem, ara, un element qualsevol $A := \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \in \mathbf{SU}(2)$ tal que $\alpha\beta \neq 0$; en aplicar aquest element a qualsevol monomi $X^k Y^{n-k} \in W$, obtenim un polinomi de W:

$$(\alpha X - \beta Y)^k (\overline{\beta} X + \overline{\alpha} Y)^{n-k} = A(X^k Y^{n-k}) \in W;$$

com que el coeficient de X^n en aquest polinomi és $\alpha^k \overline{\beta}^{n-k} \neq 0$, en aplicar la primera part d'aquesta prova al polinomi $X^k Y^{n-k} \in W$, obtenim que $X^n \in W$. Finalment, en aplicar A al monomi $X^n \in W$, obtenim que $(\alpha X - \beta Y)^n = A(X^n) \in W$; com que aquest polinomi és

$$(\alpha X - \beta Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k (-\beta)^{n-k} X^k Y^{n-k},$$

i tots els seus coeficients són no nuls, deduïm que $X^k Y^{n-k} \in W$, per a tot k, $0 \le k \le n$. Així, W conté una base de $P_n(\mathrm{C})$, de manera que $W = P_n(\mathrm{C})$, com volíem veure. Λ

Podem calcular, ara, les representacions irreductibles de $\mathbf{SO}(3)$.

4.10. Teorema. *Les representacions unitàries irreductibles de* $\mathbf{SO}(3)$ *estan en correspondència bijectiva amb els nombres naturals* $\ell \in \mathrm{N}$. *Són de dimensió senar* $2\ell+1$, *i el pes* ℓ *de la representació és determinat unívocament com el màxim dels valors propis de l'operador* H_3 *associat a la representació.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem la successió exacta $1 \to \{\pm 1\} \to \mathbf{SU}(2) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(3) \to 1$; per composició amb π, les representacions de $\mathbf{SO}(3)$ són exactament les de $\mathbf{SU}(2)$ que són trivials en $\{\pm 1\}$; a més a més les representacions irreductibles de $\mathbf{SO}(3)$ es corresponen amb les representacions irreductibles de $\mathbf{SU}(2)$ trivials sobre $\{\pm 1\}$. Per tant, el càlcul de les representacions irreductibles de $\mathbf{SO}(3)$ es redueix a observar quines de les representacions $\rho^{(\ell)}$ de $\mathbf{SU}(2)$, $\ell \in \mathrm{N}$, o bé $\ell \in \frac{1}{2}\mathrm{N}$, són trivials en -1.

Considerem les representacions ρ_n; és clar que la matriu -1 actua sobre el polinomi $X^k Y^{n-k}$ en la forma $-1(X^k Y^{n-k}) = (-1)^n X^k Y^{n-k}$ i, per tant, ρ_n és trivial en $X^k Y^{n-k}$ si, i només si, n és parell. Això acaba la prova, perquè $n = 2\ell$, de manera que n és parell si, i només si, $\ell \in \mathrm{N}$. Λ

§5. Els harmònics esfèrics

Una de les primeres aplicacions del coneixement de les representacions irreductibles de $\mathbf{SO}(3)$ és l'obtenció de bases d'espais de funcions complexes infinitament derivables de l'esfera unitat, S^2. El procediment consisteix a considerar una representació de $\mathbf{SO}(3)$ i fer el càcul de les representacions irreductibles en què aquesta descompon.

Considerem l'esfera $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathrm{R}^3$, descrita com a varietat diferenciable (analítica) mitjanant les coordenades polars; és a dir, posem

$$S^2 = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

via el canvi de variables

$$x := \sin\theta \cos\varphi, \qquad y := \sin\theta \sin\varphi, \qquad z := cos\theta.$$

L'espai $D(S^2)$ de les funcions complexes infinitament derivables sobre l'esfera és un subespai dens de l'espai $L^2(S^2)$, de les (classes de) funcions complexes de quadrat integrable sobre S^2. En particular, indicarem una funció qualsevol de $L^2(S^2)$ per $f := f(\theta, \varphi)$.

El primer pas consisteix a donar una representació explícita de $\mathbf{SO}(3)$ en l'espai de Hilbert $L^2(S^2)$.

El grup $\mathbf{SO}(3)$ actua de manera natural (per rotacions) en R^3; i l'esfera S^2 és l'òrbita de qualsevol dels seus punts per aquesta acció; és a dir, l'esfera S^2 és una de les òrbites de l'acció natural de $\mathbf{SO}(3)$ en R^3. Doncs, obtenim una acció de $\mathbf{SO}(3)$ en S^2.

Associada a aquesta acció, podem considerar l'acció de $\mathbf{SO}(3)$ en $L^2(S^2)$ donada per translacions a l'esquerra:

$$\begin{aligned}\rho : \mathbf{SO}(3) &\to \mathbf{GL}(L^2(S^2))\\ g &\mapsto \rho_g : L^2(S^2) \to L^2(S^2)\\ &\qquad\qquad f \mapsto f \circ g^{-1}\\ &\qquad f(\theta,\varphi) \mapsto f(g^{-1}(\theta,\varphi)).\end{aligned}$$

5.1. Proposició. *La representació ρ que acabem de definir és unitària.*

Demostració. La mesura $d\Omega := \dfrac{1}{4\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ sobre l'esfera S^2 és invariant per l'acció de $\mathbf{SO}(3)$ (exercici). Com a conseqüència d'aquest fet, per a tota funció $f(\theta,\varphi) \in L^2(S^2)$ és

$$\int_S |\rho_g f|^2\, d\Omega = \int_S |f|^2\, d\Omega;$$

és a dir, la forma hermitiana de $L^2(S^2)$,

$$(f,g) \mapsto \int_S f\overline{g}\, d\Omega,$$

és invariant per a ρ, com calia demostrar. Λ

A continuació, convé estudiar la descomposició de la representació ρ en suma directa (hilbertiana) de representacions irreductibles. Abans, però, és útil observar que el subespai $D(S^2) \subseteq L^2(S^2)$ és invariant per a ρ, fet que és evident perquè les rotacions són infinitament derivables, de manera que podem pensar ρ com una representació

$$\rho : \mathbf{SO}(3) \to \mathbf{GL}(D(S^2)).$$

Ara, per la teoria general (cf. el teorema **1.17**), sabem que l'espai $D(S^2)$ descompon com a suma directa hilbertiana de subespais invariants irreductibles, i que aquests subespais són de dimensions senars $2\ell+1$, $\ell \in \mathrm{N}$ (cf. el teorema **4.10**).

Sigui $W \subseteq D(S^2)$ un subespai invariant irreductible de dimensió $2\ell+1$. Es tracta de calcular explícitament una base de W i, per a això, convé fer el càlcul explícit dels operadors A_1, A_2, i A_3 de $D(S^2) \subseteq L^2(S^2)$.

5.2. Proposició. *Els operadors A_1, A_2, i A_3 de $D(S^2)$ associats a la representació ρ admeten les expressions*

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cotg}\theta \, \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}, \\ A_2 &= -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cotg}\theta \, \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}, \\ A_3 &= -\frac{\partial}{\partial\varphi}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ. Convé considerar una parametrització adequada de la varietat analítica $\mathbf{SO}(3)$. Donada una rotació qualsevol, $g \in \mathbf{SO}(3)$, sigui $g =: g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, on $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathrm{R}^3$ és el vector director de l'eix de la rotació g que té mòdul $0 < \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \leq 2\pi$ igual a l'angle de la rotació. Amb aquesta parametrització de $\mathbf{SO}(3)$, una base de l'àlgebra de Lie $\mathbf{so}(3)$ correspon als camps en l'origen

$$\left(\frac{\partial}{\partial\,\alpha_1}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\,\alpha_2}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\,\alpha_3}\right)_0;$$

en efecte, les rotacions $g(\alpha_1, 0, 0)$, $g(0, \alpha_2, 0)$, $g(0, 0, \alpha_3)$ són independents (corresponen a tres eixos independents de les cartes locals en l'origen) i tenen matrius

$$\begin{aligned} g(\alpha_1, 0, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix}, \\ g(0, \alpha_2, 0) &= \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix}, \\ g(0, 0, \alpha_3) &= \begin{bmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de manera que els camps diferencials en l'origen són

$$\left(\frac{\partial\, g(\alpha_1,0,0)}{\partial\, \alpha_1}\right)_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = I_1,$$

$$\left(\frac{\partial\, g(0,\alpha_2,0)}{\partial\, \alpha_2}\right)_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I_2,$$

$$\left(\frac{\partial\, g(0,0,\alpha_3)}{\partial\, \alpha_3}\right)_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I_3,$$

que és la base que hem usat en la secció 3 per a la descripció de les representacions de $\mathbf{so}(3)$. Així, una rotació qualsevol $g = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es pot escriure en la forma $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3)$.

Per a $1 \leq i \leq 3$, A_i és la imatge de I_i per la representació diferencial associada a ρ; és a dir, A_i és la imatge de I_i, com a operador que pertany a l'àlgebra de Lie de $\rho(\mathbf{SO}(3))$. El càlcul general següent expressa A_i de manera adequada: en primer lloc, és immediat comprovar que $A_i = \left(\dfrac{\partial}{\partial \alpha_i} \exp(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\right)_0$; i, en conseqüència,

$$A_i = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \exp(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \rho(g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))\right)_0,$$

relació que s'obté de la igualtat $\exp(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3) = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, en aplicar ρ i derivar en l'origen. Finalment, per a calcular la derivada parcial respecte de α_i en l'origen, podem prendre la rotació $g(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0)$, en lloc de $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (fet que equival a fer la derivada direccional en la direcció de la corba $\alpha_j = 0$, $j \neq i$).

Per a la rotació $g = g(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0)$, posem $(\theta', \varphi') := g^{-1}(\theta, \varphi)$. En particular, per a una funció $f : S^2 \to \mathrm{C}$, serà $f(g^{-1}(\theta, \varphi)) = f(\theta', \varphi')$, de manera que

$$\begin{aligned} A_i f(\theta, \varphi) &= \left(\frac{\partial f(\theta', \varphi')}{\partial \alpha_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \\ &= \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \frac{\partial f}{\partial \varphi}; \end{aligned}$$

és a dir,

$$A_i = \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Ara, per a aplicar aquest càlcul a cada una de les rotacions $g(\alpha_1,0,0)$, $g(0,\alpha_2,0)$, $g(0,0,\alpha_3)$, cal calcular, en cada cas, les tres parelles de funcions (θ',φ'). De fet, només cal calcular les tres parelles de coeficients $\left(\dfrac{\partial\theta'}{\partial\alpha_i}\right)_0$ i $\left(\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\alpha_i}\right)_0$.

Per a la rotació $g=g(0,0,\alpha_3)$, és, clarament, $(\theta',\varphi')=(\theta,\varphi-\alpha_3)$, de manera que s'obté immediatament que $A_3 f(\theta,\varphi)=-\dfrac{\partial f(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}$.

D'altra banda, per a la rotació $g=g(\alpha_1,0,0)$, les funcions (θ',φ') són caracteritzades per la igualtat

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\sin\theta'\,\cos\varphi'\\ \sin\theta'\,\sin\varphi'\\ \cos\theta'\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha_1&\sin\alpha_1\\0&-\sin\alpha_1&\cos\alpha_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\theta\,\cos\varphi\\ \sin\theta\,\sin\varphi\\ \cos\theta\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\sin\theta\,\cos\varphi\\ \cos\alpha_1\sin\theta\,\sin\varphi+\sin\alpha_1\,\cos\theta\\ -\sin\alpha_1\sin\theta\,\sin\varphi+\cos\alpha_1\,\cos\theta\end{bmatrix};\end{aligned}$$

per tant, en derivar parcialment respecte de α_1, obtenim les relacions

$$\begin{aligned}\cos\theta'\,\cos\varphi'\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha_1}-\sin\theta'\,\sin\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha_1}&=0\\ \cos\theta'\,\sin\varphi'\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha_1}+\sin\theta'\,\cos\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha_1}&=-\sin\alpha_1\,\sin\theta\,\sin\varphi+\cos\alpha_1\,\cos\theta\\ -\sin\theta'\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha_1}&=-\cos\alpha_1\,\sin\theta\,\sin\varphi-\sin\alpha_1\,\cos\theta\end{aligned}$$

que, en l'origen ($\alpha_1=0$), proporcionen les fórmules

$$\begin{aligned}\cos\theta\,\cos\varphi\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha_1}\right)_0-\sin\theta\,\sin\varphi\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha_1}\right)_0&=0\\ \cos\theta\,\sin\varphi\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha_1}\right)_0+\sin\theta\,\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha_1}\right)_0&=\cos\theta\\ -\sin\theta\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha_1}\right)_0&=-\sin\theta\sin\varphi,\end{aligned}$$

de manera que

$$\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha_1}\right)_0=\sin\varphi,\qquad\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha_1}\right)_0=\operatorname{cotg}\theta\,\cos\varphi.$$

Finalment, en repetir el càlcul per a la rotació $g = g(0, \alpha_2, 0)$, obtenim que

$$\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_2}\right)_0 = -\cos\varphi, \qquad \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_2}\right)_0 = \operatorname{cotg}\theta \, \sin\varphi.$$

En conseqüència, obtenim les expressions que volíem per als operadors A_i, $1 \leq i \leq 3$. Λ

Sigui $\psi_{-\ell}, \ldots, \psi_\ell$, com en la teoria general, una base de W; els vectors ψ_m són vectors propis de $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ de valor propi $-\ell(\ell+1)$; i, a més a més, $H_3\psi_m = m\psi_m$, per a $-\ell \leq m \leq \ell$. Així, el vector ψ_m, $-\ell \leq m \leq \ell$, és una solució f del sistema de dues equacions diferencials

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \ell(\ell+1)f = 0 \\ -i\frac{\partial f}{\partial\varphi} = mf, \end{aligned}$$

que s'obté immediatament de les expressions anteriors dels A_1, A_2, i A_3.

En resoldre la segona equació, obtenim que la funció f és de la forma $f(\theta, \varphi) = e^{im\varphi}F(\theta)$, per a una certa funció $F(\theta)$; però, per la forma de la primera equació, podem prendre $F(\theta) = P(\cos\theta)$, per a una certa funció $P(x)$, que satisfà l'equació diferencial ordinària

$$(1-x^2)^2\frac{d^2P(x)}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx} + (\ell(\ell+1)(1-x^2) - m^2)P(x) = 0.$$

En resoldre aquestes equacions, una per a cada valor de m, $-\ell \leq m \leq \ell$, s'obté una base de W de la forma

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}P_\ell^m(\cos\theta), \qquad -\ell \leq m \leq \ell,$$

i les funcions $P_\ell^m(x)$, per a $m, \ell \in \mathrm{Z}$, admeten les expressions

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m\sqrt{\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}\frac{1}{2^\ell\,\ell!}(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{\ell+|m|}(x^2-1)^\ell}{dx^{\ell+|m|}}.$$

5.3. Corol·lari. *Les funcions* $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}P_\ell^m(\cos\theta)$, *per a* $\ell \geq 0$, $-\ell \leq m \leq \ell$, *són un sistema complet de funcions de l'espai* $D(S^2)$, *de* *les funcions complexes infinitament derivables de S^2. Per a cada valor de ℓ fix, les funcions $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$, per a $-\ell \leq m \leq \ell$, són una base de la representació irreductible de* $\mathbf{SO}(3)$ *de dimensió $2\ell + 1$. S'anomenen les funcions esfèriques.* Λ

§6. L'equació de Schrdinger

En mecànica quàntica, una partícula sotmesa a un camp central definit per un potencial és caracteritzada per una funció ψ de la posició de la partícula, el quadrat del mòdul de la qual representa la probabilitat de presència (cf. l'exposició següent en aquest mateix seminari). La funció ψ s'anomena la funció d'ona.

Recordem que un camp definit per un potencial s'anomena central quan el potencial és donat per una funció de la forma $V = V(r)$, on r denota el vector posició respecte de l'origen del camp. En aquest cas, l'equació d'ona satisfà l'equació de Schrdinger

$$\left(-\frac{h^2}{2m_0}\Delta + V(r)\right)\psi = E\psi,$$

on h és la constant de Plank, m_0 la massa de la partícula (que se suposa que és constant en mecànica quàntica clàssica, i que és la massa en repòs en mecànica quàntica relativista), E l'energia (constant) de la partícula, i Δ l'operador de Laplace, que en coordenades cartesianes (x, y, z) admet l'expressió

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Posarem $H := -\dfrac{h^2}{2m_0}\Delta + V(r)$, l'operador de Hamilton associat al potencial $V(r)$. Evidentment, el domini de definició de l'operador H no és tot $L^2(\mathrm{R}^3)$, sinó un cert subconjunt, $\mathcal{D}(H) \subseteq L^2(\mathrm{R}^3)$, que conté les funcions prou derivables (si el potencial $V(r)$ és prou derivable). D'aquesta manera, l'equació de Schrdinger admet l'expressió compacta $H\psi = E\psi$. L'objectiu d'aquesta secció és resoldre l'equació de Schrdinger.

Convé comenar per algunes consideracions generals. En primer lloc, com que les rotacions de $\mathbf{SO}(3)$ actuen com a isometries de R^3, la mesura de Lebesgue en R^3 és invariant per aquesta acció. Com a conseqüència, obtenim el resultat següent.

6.1. Corol·lari. *Sigui ρ l'aplicació*

$$\begin{aligned}\rho : \mathbf{SO}(3) &\to \mathbf{GL}(L^2(\mathrm{R}^3))\\ g &\mapsto \rho_g : L^2(\mathrm{R}^3) \to L^2(\mathrm{R}^3)\\ &\qquad\qquad \psi \mapsto \rho_g\psi := \psi \circ g^{-1};\end{aligned}$$

és a dir, $\rho_g\psi : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{C}$ és la funció definida per $P \mapsto \psi(g^{-1}P)$. Llavors, ρ és una representació unitària (contínua) de $\mathbf{SO}(3)$. Λ

6.2. Proposició. *Sigui $\rho_1 : \mathbf{SO}(3) \to \mathbf{GL}(L^2(\mathrm{R}^+))$ la representació trivial, definida per $\rho_{1,g}\Phi(r) := \Phi(r)$, per a tota rotació $g \in \mathbf{SO}(3)$, tota funció $\Phi \in L^2(\mathrm{R}^+)$, i tot element $r \in \mathrm{R}^+$. Sigui $\rho_2 : \mathbf{SO}(3) \to \mathbf{GL}(L^2(S^2))$ la representació natural que hem anomenat ρ en la secció anterior. Llavors, $\rho_1 \otimes \rho_2$ és una subrepresentació de ρ.*

Demostració. El producte d'una funció $\Phi(r) \in L^2(\mathrm{R}^+)$, per una funció $f(\theta,\varphi) \in L^2(S^2)$, és una funció $\psi(r,\theta,\varphi) := \Phi(r)f(\theta,\varphi) \in L^2(\mathrm{R}^3)$, on R^3 es descriu en coordenades polars. Considerem el canvi de coordenades cartesianes (x,y,z) a coordenades polars (r,θ,φ), donat per

$$\begin{aligned} x &:= r\sin\theta\,\cos\varphi,\\ y &:= r\sin\theta\,\sin\varphi,\\ z &:= r\cos\theta. \end{aligned}$$

El canvi de coordenades converteix la funció $\psi = \psi(r,\theta,\varphi)$ en una altra funció $\psi = \psi(x,y,z)$; per tant, $L^2(\mathrm{R}^+)\otimes L^2(S^2)$ s'identifica amb un subespai de $L^2(\mathrm{R}^3)$; a més a més, la representació $\rho_1\otimes\rho_2$ coincideix amb la restricció de ρ al subespai $L^2(\mathrm{R}^+)\otimes L^2(S^2)$. Λ

6.3. Proposició. *Sigui $D^2(\mathrm{R}^3) \subseteq L^2(\mathrm{R}^3)$ l'espai de les funcions complexes de R^3 dues vegades derivables amb continuïtat. Llavors, la representació ρ*

i l'operador de Laplace commuten en $D^2(\mathrm{R}^3)$; és a dir, per a tot $g \in \mathbf{SO}(3)$ i tota funció $\psi \in D^2(\mathrm{R}^3)$ és $\rho_g \Delta \psi = \Delta \rho_g \psi$.

Demostració. Sigui $g \in \mathbf{SO}(3)$ una rotació qualsevol. Si un punt $x := (x_1, x_2, x_3)$ es transforma en un punt $g(x) = y := (y_1, y_2, y_3)$, és

$$y_j = \sum_{k=1}^{3} g_{k,j} x_k,$$

on $[g_{i,j}]$, $1 \le i, j \le 3$, és la matriu de la rotació g. Llavors,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{3} g_{k,j} \frac{\partial}{\partial y_j};$$

de manera que

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{k,j} g_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_l} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2},$$

ja que la matriu g és ortogonal i, per definició, és

$$\sum_{k=1}^{3} g_{k,j} g_{k,l} = \delta_{j,l} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = l, \\ 0, & \text{si } j \ne l. \end{cases}$$

Això demostra que l'operador de Laplace és invariant per rotació, d'on la proposició se segueix immediatament. En efecte, aquesta propietat ens diu que, per a tota funció ψ i tota rotació g, és $\Delta(\psi \circ g^{-1}) = (\Delta\psi) \circ g^{-1}$; per tant, per a tot punt P,

$$(\rho_g \Delta \psi)(P) = (\Delta\psi)(g^{-1}P) = (\Delta(\psi \circ g^{-1}))(P) = (\Delta \rho_g \psi)(P),$$

com volíem veure. Λ

Per definició de camp central, obtenim el resultat següent.

6.4. Corol·lari. *La representació ρ commuta amb l'operador de Hamilton H associat a un camp central donat per un potencial $V = V(r)$; és a dir, per a tot $g \in \mathbf{SO}(3)$ i tota funció $\psi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^3)$ és $\rho_g H \psi = H \rho_g \psi$.* Λ

Anem a procedir, ara, a la resolució de l'equació de Schrdinger, $H\psi = E\psi$.

Sigui $\psi \in L^2(\mathrm{R}^3)$ una funció pròpia de l'operador de Hamilton, de valor propi associat E; és a dir, sigui ψ una solució de l'equació de Schrdinger. Llavors, per a tot $g \in \mathbf{SO}(3)$, $\rho_g\psi$ és una altra solució amb el mateix valor propi. Això és degut al fet que la representació ρ i l'operador de Hamilton commuten: $H(\rho_g\psi) = \rho_g H\psi = \rho_g E\psi = E\rho_g\psi$.

Considerem, ara, el conjunt de totes les solucions de l'equació que corresponen al valor propi E. Acabem de veure que aquest conjunt és un subespai de representació de $\mathbf{SO}(3)$, dins de $L^2(\mathrm{R}^3)$; i podem descompondre aquesta representació com a suma de representacions irreductibles. En particular, obtindrem subespais de dimensions finites $2\ell+1$, $\ell \in \mathrm{N}$.

En aquests subespais irreductibles, podem obtenir les bases canòniques per resolució dels sistemes

$$\begin{aligned}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\psi + \ell(\ell+1)\psi = 0,\\ H_3\psi = iA_3\psi = m\psi,\end{aligned}$$

on m recorre l'interval $-\ell \leq m \leq \ell$, i on els operadors A_1, A_2, A_3 són donats per les expressions

$$\begin{aligned}A_1 &= x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3},\\ A_2 &= x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1},\\ A_3 &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

En efecte; recordem que, per a una representació ρ de $\mathbf{SO}(3)$, hem escrit A_i en la forma $A_i = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\rho(g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))\right)_0$, i que podem usar les rotacions $g(0,\ldots,\alpha_i,\ldots,0)$ en lloc de $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Sigui $g \in \mathbf{SO}(3)$ la rotació $g(0,\ldots,\alpha_i,\ldots,0)$, i posem $(x',y',z') := g^{-1}(x,y,z)$. Llavors, per a tota funció $f(x,y,z)$, és

$$\left(\frac{\partial f(g^{-1}(x,y,z))}{\partial\alpha_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial\alpha_i}\right)_0.$$

Per a cada una de les rotacions $g = g(0,\ldots,\alpha_i,\ldots,0)$, els càlculs de les derivades parcials $\frac{\partial x'}{\partial\alpha_i}$, $\frac{\partial y'}{\partial\alpha_i}$, $\frac{\partial z'}{\partial\alpha_i}$ ens proporcionen les fórmules

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial \alpha_1} &= 0, & \frac{\partial x'}{\partial \alpha_2} &= -\sin\alpha_2\, x - \cos\alpha_2\, z,\\
\frac{\partial y'}{\partial \alpha_1} &= -\sin\alpha_3\, y + \cos\alpha_3\, z, & \frac{\partial y'}{\partial \alpha_2} &= 0,\\
\frac{\partial z'}{\partial \alpha_1} &= -\cos\alpha_3\, y - \sin\alpha_3\, z, & \frac{\partial z'}{\partial \alpha_2} &= \cos\alpha_2\, x - \sin\alpha_2\, z,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial \alpha_3} &= -\sin\alpha_1\, x + \cos\alpha_1\, y,\\
\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3} &= -\cos\alpha_1\, x - \sin\alpha_1\, y,\\
\frac{\partial z'}{\partial \alpha_3} &= 0,
\end{aligned}
$$

que, en substituir en l'origen, produeixen les expressions que volem per als operadors A_1, A_2, A_3.

Cal, doncs, procedir a la resolució del sistema

$$
\left.\begin{aligned}
(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\psi + \ell(\ell+1)\psi = 0,\\
H_3\psi = iA_3\psi = m\psi,
\end{aligned}\right\} \qquad -\ell \le m \le \ell.
$$

6.5. Observació. En física quàntica, en lloc dels operadors anteriors convé utilitzar els operadors d'impuls,

$$
p_j := -ih\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad 1 \le j \le 3,
$$

i els operadors de moment cinètic (o de quantitat de moviment),

$$
L_j := ihA_j, \qquad 1 \le j \le 3;
$$

amb aquests operadors, els sistemes diferencials es converteixen en els equivalents

$$
\left.\begin{aligned}
(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)\psi = h^2\ell(\ell+1)\psi,\\
L_3\psi = hm\psi,
\end{aligned}\right\} \qquad -\ell \le m \le \ell.
$$

Cercarem solucions del sistema que siguin de la forma $\psi(r,\theta,\varphi) = \Phi(r)Y(\theta,\varphi)$. Observem, en primer lloc, el resultat següent, la demostració del qual es deixa com a exercici per al lector.

6.6. Lema. *Siguin $A_{i,2}$ els operadors A_i que corresponen a la representació ρ_2. Per a $1 \leq i \leq 3$, i per a $\psi = \Phi Y$, és $A_i(\psi) = A_i(\Phi Y) = \Phi A_{i,2}(Y)$.* Λ

Com a conseqüència, obtenim una base de funcions pròpies de l'operador de Hamilton.

6.7. Corol·lari. *Una base de funcions pròpies de l'operador de Hamilton H és formada per funcions ψ_ℓ^m, $-\ell \leq m \leq \ell$, de la forma*

$$\psi_\ell^m(r,\theta,\varphi) = \Phi(r) Y_\ell^m(\theta,\varphi),$$

on les funcions $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ són les funcions esfèriques i $\Phi(r)$ satisfà l'equació diferencial ordinària

$$-\frac{h}{2m_0}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) - \ell(\ell+1)\frac{\Phi}{r^2}\right) + (V(r)-E)\Phi = 0.$$

Demostració. El lema anterior ens permet assegurar que una funció de la forma $\psi(r,\theta,\varphi) := \Phi(r)Y(\theta,\varphi)$ és una solució del sistema

$$\begin{aligned}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\psi + \ell(\ell+1)\psi = 0,\\ H_3\psi = iA_3\psi = m\psi,\end{aligned}$$

per a $-\ell \leq m \leq \ell$, si, i només si, Y és una solució del sistema

$$\begin{aligned}(A_{1,2}^2 + A_{2,2}^2 + A_{3,2}^2)Y + \ell(\ell+1)Y = 0,\\ iA_{3,2}Y = mY,\end{aligned}$$

per a $-\ell \leq m \leq \ell$. Per tant, una base de l'espai de representació irreductible en què ens movem és de la forma $\Phi(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi)$, amb $\Phi(r)$ una certa funció i $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ les funcions esfèriques. Ara bé, no qualsevol funció $\Phi(r)$ és tal que $\Phi(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ pertany a aquest espai; cal que $\psi = \Phi Y$ satisfaci l'equació de Schrdinger. Per a calcular $\Phi(r)$, doncs, escrivim l'equació de Schrdinger en coordenades polars.

L'operador de Laplace admet l'expressió

$$\Delta\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2};$$

per tant, si tenim en compte la relació $\psi(r,\theta,\varphi) = \Phi(r)Y(\theta,\varphi)$, l'equació de Schrdinger admet l'expressió

$$
\begin{aligned}
-\frac{2m_0}{h^2}&(E - V(r))\Phi(r)Y(\theta,\varphi) = \\
&\frac{d^2\Phi(r)}{dr^2}Y(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2}\Phi(r)\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi(r)\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} \\
&\qquad + \frac{2}{r}Y(\theta,\varphi)\frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r^2}\Phi(r)\frac{\partial Y(\theta,\varphi}{\partial\theta}.
\end{aligned}
$$

Si ara tenim en compte que cada una de les funcions esfèriques satisfà el sistema diferencial

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \ell(\ell+1)Y(\theta,\varphi) = 0 \\
-i\,\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = mf,
\end{aligned}
$$

obtenim que $\Phi(r)$ satisfà l'equació diferencial ordinària escrita a l'enunciat. Això acaba la demostració. Λ

6.8. Esbós de classificació de partícules. Cal, en primer lloc, conèixer el valor propi E (és a dir, el nivell d'energia de la partícula).

Com a exemple, ens situarem en el cas d'un àtom d'hidrogen; així, la partícula és un sol electró sotmès al camp produït pel nucli, i el nucli és un sol protó. Les energies possibles són els valors propis discrets de l'equació de Schrdinger; en aquest cas, són de la forma $E = \dfrac{K}{n^2}$, per a K constant i $n \in \mathrm{N}$, $n \neq 0$ (aquí, la constant K val $-13.6eV$).

• El nombre natural n s'anomena el nombre quàntic principal. (Podríem prendre el *nivell* E com a invariant en lloc de n, però això dependria de les unitats de mesura.)

A continuació, i un cop fixat el nombre quàntic principal (o sigui, fixat el nivell d'energia de l'electró, o, si es vol, el valor propi de l'operador), la partícula és caracteritzada per una funció (d'ona) de la forma ψ_ℓ^m.

• El *pes* ℓ de la representació s'anomena el nombre quàntic azimutal, i és $\ell \in \mathrm{N}$, de manera que la dimensió de l'espai de representació és $2\ell + 1$.

• El *caràcter* m s'anomena el nombre quàntic magnètic, i és $-\ell \leq m \leq \ell$.

De fet, encara hi ha un altre nombre quàntic, el nombre quàntic *de paritat*, w, que s'obté en considerar que el grup d'invariància de l'equació no és $\mathbf{SO}(3)$, sinó $\mathbf{O}(3) \simeq \mathbf{SO}(3) \times \{\pm 1\}$, i definir $w := \mathbf{1}$ o bé $w = -1$ segons que la funció d'ona ψ_ℓ^m sigui invariant o canviï de signe en aplicar -1. Succeeix que en el cas d'una sola partícula se satisfà la relació $w = (-1)^\ell$, de manera que el nombre quàntic de paritat és determinat pel nombre quàntic azimutal.

Bibliografia

[**Ar 91**] Artin, M.: *Algebra*, Prentice Hall, 1991.

[**Ko 78**] Kostrikn, A. I.: *Introducción al álgebra*, Mir, Moscú, 1978.

[**Pi 73**] Pichon, G.: *Groupes de Lie Représentations linéaires et applications*, Méthodes, Hermann, Paris, 1973.

[**Se 77**] Serre, J.-P.: *Linear Representations of Finite Groups*, GTM, n. 42, Springer-Verlag, 1977. Edició original en llengua francesa de Hermann. Hi ha traducció al castellà de S. Xambó de l'edició original en llengua francesa, editada per Omega, en la col·lecció Métodos, l'any 1970.

[**Si 96**] Simon, B.: *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics, n. 10, American Mathematical Society, 1996.