Capítol 6

Thetanullwerte i varietats modulars

A. Travesa

El contingut d'aquest capítol va ser exposat en el Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC) el dia 7 de febrer de 2003, a la Facultat de Nàutica de la Universitat Politècnica de Catalunya, en la dissetena edició del seminari.

6.1 Generalitats

6.1.1 El grup simplèctic

Fixem un anell commutatiu, R, que sovint serà un cos k o bé l'anell dels nombres enters $\mathbb{Z}$.

Considerarem matrius en $\mathbf{M}(2n, R)$; en particular, indicarem per $1 = 1_n \in \mathbf{M}(n, R)$ la matriu identitat de n files i n columnes, i per I la matriu $I := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2n, R)$. Com que $\det I = 1$, podem pensar la matriu I com la matriu corresponent, en una certa base, a una forma bilineal anti-

Amb suport parcial de la DGI, BFM2000-0627 i BFM2003-01898.

simètrica no degenerada. El grup simplèctic és el grup de les matrius que, per canvi de base, deixen aquesta forma invariant.

6.1.1 Definició. $\mathbf{Sp}(n,R) := \{M \in \mathbf{M}(2n,R) : M^t I M = I\}$.

Notem que $1 = \det I = \det M^t \det I \det M = (\det M)^2$, de manera que M ha de ser invertible; per tant,

$$\mathbf{Sp}(n,R) := \{M \in \mathbf{GL}(2n,R) : M^t I M = I\}.$$

A més a més, si escrivim $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, amb $A,B,C,D \in \mathbf{M}(n,R)$, la condició que $M \in \mathbf{Sp}(n,R)$ implica que $A^tC = C^tA$, $B^tD = D^tB$, $A^tD - C^tB = 1$; per tant,
$\mathbf{Sp}(n,R) = \{M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2n,R) : A,B,C,D \in \mathbf{M}(n,R),\ A^tC = C^tA,\ B^tD = D^tB,\ A^tD - C^tB = 1\}$.

6.1.2 Exemple. L'exemple més senzill correspon al cas $n = 1$; aquesta darrera descripció de $\mathbf{Sp}(n,R)$ ens ensenya que $\mathbf{Sp}(1,R) = \mathbf{SL}(2,R)$; així, també podem pensar el grup simplèctic com una generalització del grup especial lineal.

6.1.3 • En general, se satisfà que si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n,R)$, llavors $M^{-1} = \begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix}$ i $M^t = \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}$.

• El grup $\mathbf{Sp}(n,R)$ és estable per transposició, de manera que la transposició de matrius $M \mapsto M^t$ proporciona un antiautomorfisme involutiu de $\mathbf{Sp}(n,R)$.

• Com a conseqüència, també se satisfan les relacions $AB^t = BA^t$, $CD^t = DC^t$, $AD^t - BC^t = 1$.

6.1.4 Observació. Notem que:

• $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n,R)$.

• Per a tota matriu simètrica $S = S^t \in \mathbf{M}(n, R)$, és $M := \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in$ $\mathbf{Sp}(n, R)$.

• Per a tota matriu invertible $U \in \mathbf{GL}(n, R)$, és $M := \begin{bmatrix} U^t & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{bmatrix} \in$ $\mathbf{Sp}(n, R)$.

6.1.5 És ben conegut que, per a $n = 1$, les matrius $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, usualment anomenada S, i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, usualment anomenada T, generen tot el grup $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$.

6.1.6 Proposició. *Sigui $R = \mathbb{Z}$ o bé $R = k$, un cos qualsevol. El conjunt de matrius*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : S = S^t \in \mathbf{M}(n, R) \right\} \bigcup \left\{ I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2n, R) \right\}$$

és un conjunt de generadors del grup simplèctic $\mathbf{Sp}(n, R)$. $\square$

6.1.7 Definició. El grup modular de Siegel és el grup $\Gamma_n := \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z})$.

6.1.8 Exercici. El centre de Γ_n és $\{\pm 1\}$.

6.1.2 Subgrups de congruència

Per a tot nombre enter $q > 0$, podem considerar el morfisme de grups de reducció mòdul q,

$$\Gamma_n = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}).$$

6.1.9 Definició. S'anomena subgrup principal de congruència de Γ_n, de nivell q, el nucli $\Gamma_n[q] := \ker(\Gamma_n \longrightarrow \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}))$.

6.1.10 Observació. Clarament, $\Gamma_n[1] = \Gamma_n$.

6.1.11 Exemple. En el cas $n = 1$, recuperem els grups principals de congruència del grup modular: $\Gamma_1[q] = \Gamma[q] \subseteq \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$.

6.1.12 Definició. Un subgrup qualsevol $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ s'anomena un subgrup de congruència si existeix un nombre enter $q \geq 1$ tal que Γ conté $\Gamma_n[q]$ com a subgrup d'índex finit. S'anomena nivell de Γ el menor valor de $q \geq 1$ per al qual se satisfà aquesta propietat.

6.1.13 Observació. Es pot provar que, per a tot $n > 1$, tot subgrup normal $\Gamma \subseteq \Gamma_n$ no inclòs en el centre, $\{\pm 1\}$, és un subgrup de congruència. Com a conseqüència, tot subgrup d'índex finit $\Gamma \subseteq \Gamma_n$ és un subgrup de congruència.

6.1.14 El grup theta. El grup $\Gamma_{n,\theta}$, format per les matrius $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_n$ tals que els elements de la diagonal principal de cadascuna de les matrius AB^t, CD^t són parells, s'anomena el grup theta; és un subgrup de congruència de nivell 2 (cf. més avall).

6.1.15 Exemple. En el cas $n = 1$, el grup $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ conté tres subgrups de congruència de nivell 2 que continguin $\Gamma[2]$ com a subgrup d'índex 2; són els grups $\Gamma_0[2]$, $\Gamma^0[2]$ i el grup theta. Aquest grup és format per les matrius que, reduïdes mòdul 2, són una de les matrius $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6.1.16 El grup de Hecke generalitzat. La generalització natural en aquest context dels grups de congruència $\Gamma_0[q] \subseteq \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ són els anomenats grups de Hecke generalitzats $\Gamma_{n,0}[q] := \{M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_n : C \equiv 0 \pmod{q}\}$.

6.1.17 La variant theta del grup de Hecke generalitzat. És el grup $\Gamma_{n,0,\theta}[q]$, format per les matrius $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_{n,0}[q]$ tals que els elements de la diagonal principal de la matriu $\frac{1}{q}CD^t$ són parells.

6.1.18 El grup d'Igusa. És el grup $\Gamma_n[q, 2q]$ format per les matrius $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_n[q]$ tals que els elements de la diagonal principal de cadascuna de les dues matrius $\frac{1}{q}AB^t$ i $\frac{1}{q}CD^t$ són parells.

6.1.19 Les propietats següents són evidents.

- $\Gamma_{n,\theta} = \Gamma_n[1, 2]$.
- $\Gamma_n[2q] \subseteq \Gamma_n[q, 2q] \subseteq \Gamma_n[q]$.

6.1.20 Proposició. *El grup d'Igusa* $\Gamma_n[q, 2q]$ *és un subgrup normal de* $\Gamma_{n,\theta}$. *A més a més, si* q *és parell,* $\Gamma_n[q, 2q]$ *és un subgrup normal de* Γ_n. $\square$

6.1.3 El semiespai superior de Siegel

Recordem que en el cas modular considerem el semiplà superior complex $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

6.1.21 Per a una matriu simètrica real, $Y = Y^t \in \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$, escriurem $Y > 0$ per a indicar que la forma bilineal Y és definida positiva; en particular, si $Z = Z^t \in \mathbf{M}(n, \mathbb{C})$ és una matriu simètrica complexa, $\mathrm{Im}(Z) > 0$ indicarà que la forma bilineal real definida per la matriu formada per la part imaginària de les entrades de Z és una forma definida positiva.

6.1.22 Definició. Anomenarem semiespai superior de Siegel el conjunt de matrius

$$\mathcal{H}_n := \{Z \in \mathbf{M}(n, \mathbb{C}) : Z = Z^t, \mathrm{Im}(Z) > 0\}.$$

Escriurem $Z = X + iY$, amb $X, Y \in \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$, de manera que si $Z = Z^t$, també se satisfà que $X = X^t$, $Y = Y^t$; així, $X = \mathrm{Re}(Z)$, $Y = \mathrm{Im}(Z)$, i $\mathcal{H}_n = \{Z \in \mathbf{M}(n, \mathbb{C}) : Z = Z^t, Y > 0\}$.

6.1.23 Observació. $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ és el semiplà superior complex.

6.1.24 Proposició. *El semiespai superior de Siegel* $\mathcal{H}_n$ *és un subdomini obert i convex de l'espai de totes les matrius simètriques complexes* $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{Z}_n := \{Z \in \mathbf{M}(n, \mathbb{C}) : Z = Z^t\}$. $\square$

En particular, $\dim \mathcal{H}_n = n(n + 1)$, on $\dim = \dim_{\mathbb{R}}$. Com a exemples, els valors de la dimensió de $\mathcal{H}_n$ per a $1 \leq n \leq 6$ són $2, 6, 12, 20, 30, 42$.

El fet que el semiespai superior de Siegel sigui convex fa que hi hagi arrels quadrades holomorfes per a les funcions complexes sense zeros.

6.1.25 Proposició. *Si $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ és una funció holomorfa sense zeros, existeix una arrel quadrada holomorfa de f; és a dir, existeix una funció holomorfa $h : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que per a tot $Z \in \mathcal{H}_n$ és $f(z) = h(z)^2$.* $\square$

6.1.4 Acció del grup simplèctic

Ara convé definir l'acció del grup simplèctic en el semiespai de Siegel, de manera semblant al cas de l'acció del grup modular en el semiplà superior complex.

6.1.26 Proposició. *Siguin $Z \in \mathcal{H}_n$ i $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$. Llavors,*

(a) *La matriu $CZ + D$ és invertible.*

(b) $M\langle Z\rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in \mathcal{H}_n$. $\square$

6.1.27 Corol·lari. (a) *El grup $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ actua per l'esquerra en $\mathcal{H}_n$; és a dir, per a tot $Z \in \mathcal{H}_n$ i totes les matrius $M, N \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, se satisfan les propietats $1\langle Z\rangle = Z$, $M\langle N\langle Z\rangle\rangle = (MN)\langle Z\rangle$.*

(b) *L'acció del grup $\Gamma_n/\{\pm 1\}$ és fidel, en el sentit que $M\langle Z\rangle = N\langle Z\rangle$ per a tot $Z \in \mathcal{H}_n$ si, i només si, $N = \pm M$.*

(c) *Les úniques aplicacions biholomorfes $\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n$ són les aplicacions donades per $Z \mapsto M\langle Z\rangle$.* $\square$

6.1.28 Exemples. L'acció del grup simplèctic és, doncs, molt semblant a l'acció del grup $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ en el semiplà superior complex. En efecte, se satisfan les propietats següents.

- (Simetria) Per a $M = I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, és $I\langle Z\rangle = -Z^{-1}$.

- (Translacions) Per a $M = \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S = S^t \in \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$, és $M\langle Z\rangle = Z + S$.

• (Canvis de base reals) Per a $M = \begin{bmatrix} U^t & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{bmatrix}$, $U \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, és $M\langle Z\rangle = U^t Z U$.

Així, l'òrbita d'un punt $Z \in \mathcal{H}_n$ per l'acció de Γ_n conté, en particular, totes les matrius que s'obtenen de Z per un canvi de base real (com a forma bilineal).

6.2 Sistemes de multiplicadors

Volem definir formes modulars de pes semienter; per tant, ens cal estudiar els sistemes de multiplicadors, que són, essencialment, signes per a les equacions funcionals. Aquests signes provenen de l'elecció d'arrels quadrades adequades.

6.2.1 Sistemes de multiplicadors

Per a $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ i $Z \in \mathcal{H}_n$, posem

$$J(M, Z) := CZ + D.$$

6.2.1 Proposició. *Per a $M, N \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ i $Z \in \mathcal{H}_n$, se satisfà la condició de cocicle per a J:*

$$J(MN, Z) = J(M, N\langle Z\rangle)J(N, Z). \;\square$$

6.2.2 Observació. Per a cada matriu $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, la funció $\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$Z \mapsto \det(CZ + D)$$

és holomorfa i, com que $CZ + D$ és invertible, no té zeros. Per tant, admet una arrel quadrada holomorfa (i, en conseqüència, dues que només difereixen en un signe). En triarem i fixarem una, per a cada matriu $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, que escriurem

$$J_1(M, Z) := \sqrt{\det(CZ + D)}.$$

6.2.3 Alerta! En el cas $n > 1$, pot succeir que per a certa matriu $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ i certs punts $Z_1, Z_2 \in \mathcal{H}_n$, sigui

$$\det(CZ_1 + D) = \det(CZ_2 + D),$$

però que, en canvi, se satisfaci que
$$\sqrt{\det(CZ_1+D)} = -\sqrt{\det(CZ_2+D)}.$$

6.2.4 Definició. Per a tot $r \in \mathbb{Z}$, escriurem
$$J_r(M,Z) := \det(CZ+D)^{r/2} = \sqrt{\det(CZ+D)}^{\,r}.$$
Notem que, en particular, se satisfà que $J_2 = \det J$.

Per a la dependència funcional respecte de les matrius M, tenim el resultat següent.

6.2.5 Proposició. *Per a tot $r \in \mathbb{Z}$, existeix una aplicació*
$$w = w_r : \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R}) \times \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \{\pm 1\}$$
tal que per a tot $M, N \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ i tot $Z \in \mathcal{H}_n$ és
$$J_r(MN,Z) = w_r(M,N)J_r(M,N\langle Z\rangle)J_r(N,Z).$$
L'aplicació w_r només depèn de la classe de congruència de $r \pmod 2$; i se satisfà que w_r és constant i igual a 1 si, i només si, r és parell. $\square$

6.2.6 Definició. Siguin $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ un subgrup de congruència i $r \in \mathbb{Z}$ un nombre enter. Un sistema de multiplicadors per a Γ, de pes $\frac{r}{2}$, és una aplicació
$$v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
tal que

(a) per a tot $M, N \in \Gamma$ és $v(MN) = w_r(M,N)v(M)v(N)$; i

(b) si $-1 \in \Gamma$, llavors $v(-1)\det(0Z-1)^{r/2} = 1$.

6.2.7 Observacions. • En el cas r parell, un sistema de multiplicadors no és res més que un caràcter del grup Γ.

• Si v és un sistema de multiplicadors (per a Γ, de pes $r/2$), llavors, per a l'aplicació
$$\begin{aligned} J_{r,v} : \Gamma \times \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (M,Z) &\mapsto v(M)J_r(M,Z) = \\ &\qquad v(M)\det(CZ+D)^{r/2} \end{aligned}$$
se satisfà la condició de cocicle:
$$J_{r,v}(MN,Z) = J_{r,v}(M,N\langle Z\rangle)J_{r,v}(N,Z).$$

• Com abans, aquesta condició només depèn de $r \pmod 2$.

6.2.2 Acció sobre les funcions

6.2.8 Definició. Donades una funció $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$, un nombre enter $r \in \mathbb{Z}$, i una matriu $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, considerarem l'acció de pes r de M sobre f com la funció

$$f|M := f|_r M : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

definida per

$$f|M(Z) := \det(CZ + D)^{-r/2} f(M\langle Z\rangle) = J_{-r}(M, Z) f(M\langle Z\rangle).$$

D'aquesta manera, tenim que

$$F|(MN) = w_r(M, N)(F|M)|N;$$

per tant, per a $r \equiv 1 \pmod 2$, això no és realment una acció del grup Γ en el conjunt de les funcions.

La caracterització següent pot ser útil.

6.2.9 Proposició. *Una funció $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ és un sistema de multiplicadors (per a Γ, de pes $r/2$), si, i només si, existeix una funció no nul·la $f : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que per a tot $M \in \Gamma$ és $f|_r M = v(M) f$.* $\square$

6.2.3 El sistema de multiplicadors theta

El sistema de multiplicadors theta és un sistema de multiplicadors associat al grup theta, $\Gamma_{n,\theta}$, i que té relació amb un dels *Thetanullwerte* més senzills. Comencem per escriure aquesta funció.

6.2.10 Lema. *La sèrie*

$$\theta(Z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i g^t Z g)$$

defineix una funció holomorfa en $\mathcal{H}_n$.

Demostració: La sèrie és uniformement convergent en dominis de la forma $\{Z \in \mathcal{H}_n : Y - \delta 1 \geq 0\}$, per a $\delta > 0$. $\square$

6.2.11 Proposició. *Existeix un sistema de multiplicadors*

$$v_\theta : \Gamma_{n,\theta} \longrightarrow \mathbb{C}^*,$$

de pes $\frac{1}{2}$*, tal que per a tot* $Z \in \mathcal{H}_n$ *i tota matriu* $M \in \Gamma_{n,\theta}$ *és*

$$\theta(M\langle Z\rangle) = v_\theta(M)\sqrt{\det(CZ+D)}\,\theta(Z).$$

A més a més, $v_\theta(M)^8 = 1$*, per a tot* $M \in \Gamma_{n,\theta}$*.* $\square$

6.2.12 Observació. Sigui $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un sistema de multiplicadors per a Γ de pes $r/2$, $r \in \mathbb{Z}$. Llavors, la funció

$$\begin{aligned} \Gamma \cap \Gamma_{n,\theta} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ M &\mapsto \frac{v(M)}{v_\theta(M)^r} \end{aligned}$$

és un caràcter. Es pot provar que, per a $n > 1$, existeix un subgrup de congruència $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \cap \Gamma_{n,\theta}$ tal que les restriccions a Γ_0 de v_θ^r i de v coincideixen; és a dir, que v coincideix amb una potència de v_θ en Γ_0.

6.2.13 Hipòtesi. Fins i tot per al cas $n = 1$, tots els sistemes de multiplicadors que considerarem coincideixen amb una potència del sistema de multiplicadors theta, v_θ, en un cert subgrup de congruència.

Per a descriure les propietats més importants del sistema de multiplicadors theta ens cal la definició següent.

6.2.14 Definició. Una matriu real M s'anomena projectivament racional si és un múltiple escalar d'una matriu racional.

6.2.15 Notació. Escriurem Ω_n per a denotar el subgrup de $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ format per les matrius $M \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ que són, a més a més, projectivament racionals.

6.2.16 Lema. *Siguin* $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ *un subgrup de congruència i* $N \in \Omega_n$*. Llavors,*

(a) $\Gamma^N := N^{-1}\Gamma N$ *també és un subgrup de congruència.*

(b) *Si* $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *és un sistema de multiplicadors de pes* $r/2$*,* $r \in \mathbb{Z}$*, llavors, l'aplicació* $v^N : \Gamma^N \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *definida per*

$$v^N(N^{-1}MN) := v(M)w_r(M,N)w_r(N,N^{-1}MN),$$

per a $M \in \Gamma$*, és un sistema de multiplicadors per a* Γ^N*, de pes* $r/2$*.* $\square$

6.2.17 Definició. Aquest sistema s'anomena el sistema de multiplicadors conjugat (per N) de v.

6.2.18 Observació. Cal veure que v^N satisfà la hipòtesi 6.2.13 de més amunt. I això és suficient veure-ho per a $v = v_\theta$.

6.2.19 Proposició. (a) La hipòtesi 6.2.13 se satisfà per a tot conjugat de v_θ.

(b) La classe dels sistemes de multiplicadors per als quals se satisfà la hipòtesi 6.2.13 és tancada per conjugació.

(c) v_θ i tots els seus conjugats v_θ^N, amb $N \in \Omega_n$, coincideixen en el grup d'Igusa $\Gamma_n[4,8]$. A més a més, v_θ^2 és trivial en aquest grup. □

6.3 Formes modulars de Siegel

6.3.1 Representacions

Per a la definició de les formes modulars de Siegel, ens cal fixar una representació

$$\rho_0 : \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathcal{Z}),$$

on $\mathcal{Z}$ és un $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió finita.

A més a més, suposarem que ρ_0 és racional; és a dir, que existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que la representació $A \mapsto (\det A)^{-k}\rho_0(A)$ és polinòmica.

6.3.1 Observació. Per a una representació racional, sempre existeix un valor màxim de k tal que $A \mapsto (\det A)^{-k}\rho_0(A)$ és polinòmica; aquest màxim, $k := k(\rho_0)$, s'anomena el pes de ρ_0.

6.3.2 Definició. Es diu que una representació racional ρ_0 és reduïda si $k(\rho_0) = 0$; és a dir, si és polinòmica i no s'anul·la en la hipersuperfície $\det A = 0$.

6.3.3 Definició. Dues parelles (ρ_0, r), (ρ_0', r'), on ρ_0, ρ_0' són representacions racionals i $r, r' \in \mathbb{Z}$ són nombres enters, s'anomenen equivalents si

(a) $r \equiv r' \pmod 2$; i

(b) per a tot $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, és $\rho_0'(A) = \rho_0(A)(\det A)^{\frac{r-r'}{2}}$.

Denotarem la classe d'equivalència per $\rho = [\rho_0, r]$.

6.3.4 Observacions. • A cada classe d'equivalència hi ha exactament un representant (ρ_0, r) tal que ρ_0 és reduïda; anomenarem r el pes de ρ.

• Si r és parell, la classe d'equivalència $\rho = [\rho_0, r]$ és unívocament determinada per la representació

$$\rho : A \mapsto \rho_0(A)(\det A)^{r/2}.$$

• En qualsevol cas, escriurem $\rho(A) = \rho_0(A)(\det A)^{r/2}$ per a indicar la classe d'equivalència. Notem que, un cop haguem triat l'arrel quadrada $\sqrt{\det(CZ+D)}$, l'expressió

$$\rho(CZ+D) := \rho_0(CZ+D)\sqrt{\det(CZ+D)}^{\,r}$$

està ben definida i només depèn de la classe ρ.

6.3.2 Formes modulars de Siegel

Siguin, ara, $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ un subgrup de congruència i $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un sistema de multiplicadors de pes $r/2$. Llavors, per a

$$M \mapsto v(M)\rho(CZ+D), \qquad Z \in \mathcal{H}_n,$$

se satisfà la condició de cocicle.

Doncs, té sentit considerar funcions holomorfes $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{Z}$, de valors en l'espai de la representació $\mathcal{Z}$, per a les quals se satisfaci la llei de transformació

$$f(M\langle Z\rangle) = v(M)\rho(CZ+D)f(Z),$$

per a $M \in \Gamma$, $Z \in \mathcal{H}_n$.

Per a aquestes funcions, i de la hipòtesi 6.2.13 sobre v, se segueix que existeix una xarxa L de matrius simètriques reals per a la qual la funció f és periòdica, de xarxa de períodes L; i, per tant, f admet un desenvolupament en sèrie de Fourier de la forma

$$f(Z) = \sum_{T \in L^*} a(T) \exp(2\pi i \operatorname{tr}(TZ)),$$

on $\operatorname{tr}(TZ)$ és la traça de TZ, $L^* := \{T \in \mathbf{M}(n, \mathbb{R}) : T = T^t, \operatorname{tr}(TX) \in \mathbb{Z},$ per a tot $X \in L\}$ és la xarxa dual de L, i, naturalment, $a(T) \in \mathcal{Z}$.

El fet que per a f se satisfaci la llei de transformació

$$f(M\langle Z\rangle) = v(M)\rho(CZ+D)f(Z),$$

implica que per a tota matriu $N \in \Omega_n$, la funció conjugada

$$f^N(Z) := (f|_\rho N)(Z) = \rho(CZ+D)^{-1}f(N\langle Z\rangle)$$

hereta de f una fórmula de transformació per al grup conjugat $N^{-1}\Gamma N$; més concretament:

$$f^N(M\langle Z\rangle) = v^N(M)\rho(CZ+D)f^N(Z).$$

Per tant, f^N també admet un desenvolupament en sèrie de Fourier

$$f^N(Z) = \sum_T a^N(T)\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}(TZ)),$$

on T recorre una xarxa que depèn de f i de N.

6.3.5 Definició. Siguin $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ un subgrup de congruència, $r \in \mathbb{Z}$ un nombre enter, $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un sistema de multiplicadors de pes $r/2$, $\rho_0 : \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathcal{Z})$ una representació racional, i $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{Z}$ una funció holomorfa.

Es diu que f és una forma modular de Siegel respecte de Γ, $\rho := [\rho_0, r]$, i v, si se satisfà la llei de transformació

$$f(M\langle Z\rangle) = v(M)\rho(CZ+D)f(Z), \qquad Z \in \mathcal{H}_n,\ M \in \Gamma,$$

i, a més a més, per a tota matriu $N \in \Omega_n$ se satisfà que

$$a^N(T) \neq 0 \Rightarrow T \geq 0.$$

S'anomena pes de f la meitat del pes de ρ.

6.3.3 Formes parabòliques

Posem $\Omega_{n,0} \subseteq \Omega_n$ el subgrup de $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ format per les matrius projectivament racionals de la forma

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

6.3.6 Observacions. • La propietat $a^N(T) \neq 0 \implies T \geq 0$ només depèn de la doble classe en $\Gamma\backslash\Omega_n/\Omega_{n,0}$. I, com que el conjunt $\Gamma\backslash\Omega_n/\Omega_{n,0}$ és finit, només cal comprovar una quantitat finita de condicions $a^N(T) \neq 0 \implies T \geq 0$.

• A més a més, en el cas $\Gamma = \Gamma_n = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z})$, és suficient considerar $N = 1$. I, en el cas $n > 1$, aquestes condicions es dedueixen de la fórmula de transformació, de manera que ni tan sols cal posar-les a la definició.

6.3.7 Definició. Una forma modular s'anomena parabòlica si se satisfà la condició més forta

$$a^N(T) \neq 0 \implies T > 0.$$

6.3.8 De nou, només cal considerar un conjunt de representants N de $\Gamma\backslash\Omega_n/\Omega_{n,0}$.

6.3.9 Notació. Posarem $[\Gamma, \rho, v]$ per a l'espai de totes les formes modulars, i $[\Gamma, \rho, v]_0$ per al subespai de les formes parabòliques. Són espais vectorials complexos de dimensió finita.

6.3.10 Proposició.

(a) *Tota forma modular de pes negatiu és idènticament nul·la.*

(b) *Tota forma modular de pes zero és constant.* □

6.4 Els Thetanullwerte com a formes modulars

Recordem que la sèrie

$$\theta(Z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i g^t Z g), \qquad Z \in \mathcal{H}_n.$$

defineix una funció holomorfa en el semiespai $\mathcal{H}_n$. Es tracta d'establir el resultat següent.

6.4.1 Teorema.

$$\theta \in [\Gamma_{n,\theta}, 1/2, v_\theta].$$

En altres paraules, la sèrie $\theta(Z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i g^t Z g)$ defineix una forma modular de Siegel de pes $1/2$ respecte del grup theta $\Gamma_{n,\theta}$, i del sistema de multiplicadors v_θ.

En particular, se satisfà la llei de transformació

$$\theta((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = v_\theta(M)\sqrt{\det(CZ+D)}\;\theta(Z),$$

per a tot $Z \in \mathcal{H}_n$ *i tota matriu* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_{n,\theta}$.

Dedicarem la resta d'aquesta secció a fer un esboç d'una demostració.

6.4.1 Thetanullwerte amb característiques i amb factors exponencials

6.4.2 Definició. Cal considerar les característiques, que són vectors de la forma

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C}^n,$$

i també els Thetanullwerte amb característica:

$$\theta[\mathbf{m}](Z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i((g+a)^t Z(g+a) + 2(g+a)^t b)).$$

6.4.3 Observació. Notem que hi ha una certa similitud de la definició de la funció $\theta[\mathbf{m}](Z)$ (respecte de la $\theta(Z)$) amb la definició de la funció ζ de Hurwitz (respecte de la ζ de Riemann).

6.4.4 Proposició. (a) *La sèrie* $\theta[\mathbf{m}](Z)$ *defineix una funció holomorfa (de* Z *i de* $\mathbf{m}$*) en* $\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^{2n}$.

(b) *Llevat d'un factor constant,* $\theta[\mathbf{m}](Z)$ *només depèn de* $\mathbf{m}$ (mod 1)*; amb més precisió, si* $\mathbf{m} \equiv \tilde{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}$ (mod 1)*, llavors*

$$\theta[\mathbf{m}] = \exp(2\pi i a^t(b-\tilde{b}))\theta[\tilde{\mathbf{m}}]. \ \square$$

6.4.5 Observació. Notem l'aparició dels Thetanullwerte amb factors exponencials.

Cal estudiar el comportament de les característiques sobre les matrius.

6.4.6 Definició. Per a $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2n}$ i $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_n$, posem

$$M\{\mathbf{m}\} := (M^t)^{-1}\mathbf{m} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (CD^t)_0 \\ (AB^t)_0 \end{bmatrix},$$

on, per a una matriu simètrica S, $S_0 := \begin{bmatrix} s_{1,1} \\ \vdots \\ s_{n,n} \end{bmatrix}$ és el vector format pels elements de la diagonal principal de S.

Se satisfan les propietats següents.

6.4.7 • $1\{\mathbf{m}\} = \mathbf{m}$;

• Per a $M, N \in \Gamma_n$ i per a $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2n}$, és $(MN)\{\mathbf{m}\} \equiv M\{N\{\mathbf{m}\}\}$ (mod 1).

És a dir, Γ_n opera per l'esquerra en $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{2n}$.

6.4.2 Fórmula de transformació dels Thetanullwerte

6.4.8 Proposició. *Per a $M \in \Gamma_n$, $Z \in \mathcal{H}_n$, i $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2n}$, se satisfà que*

$$\theta[M\{\mathbf{m}\}](M\langle Z\rangle)$$
$$\shortparallel$$
$$v(M,\mathbf{m})\sqrt{\det(CZ+D)}\;\theta[\mathbf{m}](Z),$$

on $v(M,\mathbf{m})$ indica un cert nombre complex independent de Z.

A més a més, si $\mathbf{m}$ és real se satisfà que $|v(M,\mathbf{m})| = 1$, i si $\mathbf{m}$ és enter se satisfà que $v(M,\mathbf{m})^8 = 1$.

Demostració: És suficient fer la prova per als generadors de Γ_n; és a dir, per a les translacions $M = \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, amb $S = S^t$, i per a la simetria $M = I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Per al cas de les translacions, se satisfà la propietat següent.

- Si $\tilde{\mathbf{m}} := \begin{bmatrix} a \\ b + Sa + \frac{1}{2}S_0 \end{bmatrix}$, llavors

$$\theta[\mathbf{m}](Z+S) = \exp(\pi i a^t Sa)\theta[\tilde{\mathbf{m}}](Z).$$

I, per al cas de la simetria, cal provar la fórmula d'inversió:

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (-Z^{-1}) = \exp(2\pi i a^t b)\sqrt{\det(Z/i)}\ \theta \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} (Z),$$

on la branca de l'arrel quadrada és definida per $\sqrt{\det(Z/i)} = 1$, per a $Z := i1$. $\square$

Per a estudiar com depenen els nombres $v(M, \mathbf{m})$ de la característica $\mathbf{m}$, tenim el resultat següent.

6.4.9 Proposició.

$$v(M, \mathbf{m}) = v_\theta(M)\exp(2\pi i \Phi_{\mathbf{m}}(M)),$$

on

$$-2\Phi_{\mathbf{m}}(M) := a^t(B^tD)a + b^t(A^tC)b - 2a^tB^tCb - (Da - Cb)^t(AB^t)_0. \ \square$$

Si posem tot això junt, obtenim la fórmula de transformació dels Thetanullwerte sota l'acció del grup simplèctic.

6.4.10 Teorema. *Per a $M \in \Gamma_n$, $Z \in \mathcal{H}_n$, i $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2n}$, se satisfà que*

$$\theta[M\{\mathbf{m}\}](M\langle Z\rangle)$$
$$\shortparallel$$
$$v_\theta(M)\exp(2\pi i \Phi_{\mathbf{m}}(M))\sqrt{\det(CZ+D)}\ \theta[\mathbf{m}](Z),$$

on

$$-2\Phi_{\mathbf{m}}(M) := a^t(B^tD)a + b^t(A^tC)b - 2a^tB^tCb - (Da - Cb)^t(AB^t)_0. \ \square$$

En el cas en què M pertany al grup theta, la fórmula de transformació és més senzilla.

6.4.11 Teorema. *Per a la funció theta modificada*

$$\tilde{\theta}[\mathbf{m}] := \exp(-\pi i a^t b)\theta[\mathbf{m}],$$

i per a $M \in \Gamma_{n,\theta}$, $Z \in \mathcal{H}_n$, *i* $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$, *se satisfà que*

$$\tilde{\theta}\left[\begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix}\mathbf{m}\right](M\langle Z\rangle) = v_\theta(M)\sqrt{\det(CZ+D)}\;\tilde{\theta}[\mathbf{m}](Z),$$

on $v_\theta(M)$ *és una arrel vuitena de la unitat, independent de* $\mathbf{m}$. □

Notem que $\begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix} = (M^t)^{-1}$.

6.4.3 Sumes de Gauss

Es tracta d'expressar el sistema de multiplicadors theta a partir de sumes de Gauss, en el cas en què D és invertible. Cal començar per elegir una arrel quadrada de $\det(CZ+D)$.

Sigui $h(Z) := \sqrt{\det(Z/i)}$ l'única funció holomorfa en $\mathcal{H}_n$ tal que

$$h(Z)^2 = \det(Z/i); \qquad h(i1) = 1.$$

Aleshores, definim

$$\sqrt{\det(CZ+D)} := \sqrt{\det D}\; h(Z)\, h(-Z^{-1} - D^{-1}C),$$

on

$$\begin{aligned} \sqrt{\det D} > 0, &\quad \text{si } \det D > 0; \\ -i\sqrt{\det D} > 0, &\quad \text{si } \det D < 0. \end{aligned}$$

Se satisfà el resultat següent.

6.4.12 Proposició. *Sigui* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_{n,\theta}$, *i suposem que* $\det D \neq 0$. *Llavors,*

$$v_\theta(M) = (\det D)^{-1/2} \sum_{h \in \mathbb{Z}^n/D\mathbb{Z}^n} \exp(\pi i h^t B D^{-1} h). \ \square$$

6.4.13 Definició. Siguin $C, D \in \mathbf{M}(n, \mathbb{Z})$ tals que $\det D \neq 0$, $CD^t \equiv 0 \pmod 2$, i $[C\ D]$ és la segona fila d'una matriu del grup $\Gamma_{n,\theta}$. Definim la suma de Gauss simplèctica

$$G_D(C) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n/D\mathbb{Z}^n} \exp(\pi i g^t C D^{-1} g).$$

6.4.14 Observació. En el cas $n = 1$, aquesta definició proporciona la igualtat

$$\begin{aligned} G_d(2c) &= \sum_{g \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \exp(2\pi i c g^2/d) \\ &= \sum_{t=0}^{d-1} \exp(2\pi i c t^2/d) \\ &=: G(c, d); \end{aligned}$$

és a dir, la suma de Gauss clàssica.

6.5 Varietats modulars de Siegel

Sigui $\Gamma \subseteq \Gamma_n$ un subgrup de congruència. L'espai quocient $\Gamma \backslash \mathcal{H}_n$ és una varietat analítica complexa amb $\mathcal{H}_n$ com el seu recobridor universal. Es tracta d'establir una immersió quasiprojectiva complexa d'algunes varietats modulars de Siegel $\Gamma \backslash \mathcal{H}_n$.

6.5.1 Teoria clàssica de la reducció

Sigui $Y \in \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$, $Y = Y^t$, $Y > 0$, una forma bilineal real definida positiva. Comencem per recordar la teoria clàssica de reducció de formes quadràtiques.

6.5.1 Lema. (Descomposició de Jacobi.) *Existeix una matriu triangular superior i amb els elements de la diagonal principal tots iguals a* 1,

$U \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$, *tal que* U^tYU *és una matriu diagonal amb els elements de la diagonal principal tots positius.* $\square$

6.5.2 Lema. (Teorema d'Hadamard.) $\det Y \leq Y_{1,1} \cdot \ldots \cdot Y_{n,n}$. $\square$

6.5.3 Lema. (Teorema d'Hermite.) *Sigui* $\mu(Y) := \min\{g^tYg \,:\, g \in \mathbb{Z}^n,\, g \neq 0\}$. *Llavors,*

$$\mu(Y)^n \leq (4/3)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det Y. \,\square$$

6.5.4 Definició. Es diu que Y és M-reduïda (M, per Minkowski) si se satisfan les dues propietats següents:

(a) per a tot $g \in \mathbb{Z}^n$, si $\mathrm{mcd}(g_k,\ldots,g_n) = 1$ per a algun k, llavors $Y_{k,k} \leq g^tYg$;

(b) per a tot k, $1 \leq k \leq n-1$, és $Y_{k,k+1} \geq 0$.

Denotarem per $\mathcal{R}_n$ el conjunt de les matrius Y que són M-reduïdes.

6.5.5 Lema. *Per a tota matriu* $Y = Y^t \in \mathbf{M}(n,\mathbb{R})$, $Y > 0$, *existeixen matrius* $U \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{Z})$ *i* $Y' \in \mathcal{R}_n$ *tals que* $Y = UY'$. $\square$

6.5.6 Lema. (Teorema de Minkowski.) *Existeixen dues constants positives* c_1, c_2 *tals que per a tota* $Y \in \mathcal{R}_n$ *és*

$$c_1 Y_{1,1} \cdot \ldots \cdot Y_{n,n} \leq \det Y \leq c_2 Y_{1,1} \cdot \ldots \cdot Y_{n,n}. \,\square$$

6.5.2 Domini fonamental

6.5.7 Definició. Sigui $Z = X + iY \in \mathcal{H}_n$, amb $X, Y \in \mathbf{M}(n,\mathbb{R})$, $X = X^t$, $Y = Y^t$, $Y > 0$. Es diu que Z és S-reduïda (S, per Siegel) si se satisfan les propietats següents:

(a) per a tot $M \in \Gamma_n$, $\det \mathrm{Im}(M\langle Z\rangle) \leq \det \mathrm{Im}(Z)$;

(b) Y és M-reduïda;

(c) per a $1 \leq i,j \leq n$, $|X_{i,j}| \leq 1/2$.

6.5.8 Observacions. • El conjunt $\mathcal{R}_n$ és tancat en el conjunt de les matrius simètriques (reals) definides positives. Com a conseqüència, el conjunt de les matrius S-reduïdes, posem $\mathcal{Z}_n$, és tancat en el semiespai de Siegel $\mathcal{H}_n$.

• El conjunt $\mathcal{S}_n$ també és tancat en el conjunt de totes les matrius simètriques, $\mathbb{Z}_n$.

6.5.9 Proposició. $\Gamma_n \cdot \mathcal{S}_n = \mathcal{H}_n$. $\square$

És a dir, tota matriu del semiespai de Siegel és la transformada per una matriu de $\Gamma_n = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z})$ d'una matriu S-reduïda. Dit d'una altra manera, el conjunt $\mathcal{S}_n$ conté un domini fonamental per a Γ_n.

6.5.10 Lema. *Per a tot $c > 0$, el subconjunt*

$$\mathcal{S}_n(c) := \{Z \in \mathcal{S}_n : \det(\mathrm{Im}(M)) \leq c\}$$

o bé és buit o bé és compacte. $\square$

6.5.11 Lema. *Per a tot $M' \in \mathcal{S}_{n-1}$ existeix $\lambda_0 > 0$ tal que per a tot $\lambda \geq \lambda_0$ és* $M := \begin{bmatrix} M' & 0 \\ 0 & i\lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_n$. $\square$

6.5.3 Immersions de varietats modulars

Una de les aplicacions més interessants del Thetanullwerte és que proporcionen immersions projectives de les varietats modulars de Siegel. A tall d'exemple, enunciem un teorema que fa referència a les varietats que corresponen als grups d'Igusa $\Gamma_n[q^2, 2q^2]$, per a q parell.

6.5.12 Teorema. *Per a $q \equiv 0 \pmod 2$, l'aplicació $\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{P}^{q^{2n}-1}(\mathbb{C})$ definida per $Z \mapsto (\theta[\mathbf{m}](Z))_{\mathbf{m}}$, quan $\mathbf{m}$ recorre el conjunt $((1/q)\mathbb{Z}^{2n})/\mathbb{Z}^{2n}$, és holomorfa i dóna lloc a una aplicació injectiva*

$$\Gamma_n[q^2, 2q^2]\backslash\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{P}^{q^{2n}-1}(\mathbb{C})$$

que aplica biholomòrficament un entorn de cada punt en una subvarietat de l'espai projectiu.

A més a més, l'adherència de la imatge és una varietat projectiva de dimensió $\dfrac{n(n+1)}{2}$, i la diferència entre aquesta adherència i la pròpia imatge està inclosa en un tancat de Zariski de dimensió $\leq \dfrac{n(n-1)}{2}$. $\square$

6.6 Sèries theta generalitzades

6.6.1 Sèries theta de formes quadràtiques amb característiques i coeficients harmònics

Per a definir les sèries theta de formes quadràtiques definides positives i de coeficients harmònics, ens cal parlar de les funcions coeficient.

6.6.1 Definició. Sigui $\mathcal{V}$ un espai vectorial complex. Una funció coeficient de grau n en $\mathcal{V}$ és una aplicació

$$P : \mathcal{V} \times \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que per a tot $g \in \mathcal{V}$ i tot $Z \in \mathcal{H}_n$ és

$$P(g, Z) = \sum_{j=1}^{k} P_j(g) A_j(Z),$$

on $A_j : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ són funcions holomorfes i $P_j : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ són funcions polinòmiques de les coordenades en alguna base.

I també ens cal parlar d'arrels quadrades de formes quadràtiques. Per a això, disposem del resultat següent.

6.6.2 Proposició. *Existeix una única aplicació holomorfa $l : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{Z}_n$ tal que*

$$\exp(l(Z)) = Z/i; \qquad \textit{i, si } Y > 0, \ \textit{llavors } l(iY) \ \textit{és real.} \ \square$$

6.6.3 Notació. Escriurem $S^{1/2} := \exp(\frac{1}{2} l(S))$. Aquesta notació apareix a la definició següent.

6.6.4 Considerarem funcions theta amb característica i coeficients:

$$\theta_P[\mathbf{m}](S; Z)$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{G \in \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{Z})} P(S^{1/2}(G+U), Z) e^{\pi i \operatorname{tr}((G+U)^t S (G+U) Z + 2V^t (G+U))},$$

on $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$, per a $U, V \in \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{C})$, és la característica, $S \in \mathbf{M}(r, \mathbb{R})$, $S = S^t > 0$, és una forma quadràtica definida positiva, i $P(g) = P(g, Z)$ és una funció coeficient, $P : \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$.

I també considerarem aquestes sèries modificades amb factors exponencials:

$$\tilde{\theta}_P[\mathbf{m}](S;Z) := \exp(-\pi i \operatorname{tr}(U^t V))\theta_P[\mathbf{m}](S;Z).$$

6.6.5 Observacions. • En el cas en què $S = [1] \in \mathbf{M}(1, \mathbb{R})$, recuperem les sèries de més amunt, amb un canvi de característica:

$$\begin{aligned} \theta_P[\mathbf{m}']([1];Z) &= \theta_P[\mathbf{m}](Z); \\ \tilde{\theta}_P[\mathbf{m}']([1];Z) &= \tilde{\theta}_P[\mathbf{m}](Z). \end{aligned}$$

• Recíprocament, les noves es poden recuperar de les antigues. Per a això es fa ús de la immersió d'Eichler.

6.6.2 La immersió d'Eichler

Recordem que, donades dues matrius $A \in \mathbf{M}(m \times n, R)$, $B \in \mathbf{M}(r \times s, R)$, podem considerar el producte

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} Ab_{1,1} & \dots & Ab_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{r,1} & \dots & Ab_{r,s} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(mr \times ns, R).$$

6.6.6 Proposició. *Siguin $A \in \mathbf{M}(m, R)$, $B \in \mathbf{M}(n, R)$ matrius simètriques, $G = [g_1, \dots, g_n] \in \mathbf{M}(m \times n, R)$, amb $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{M}(m \times 1, R)$, i posem $g := \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$, el vector columna de mn components. Llavors,*

$$g^t (A \otimes B) g = \operatorname{tr}(G^t A G B). \ \square$$

6.6.7 Corol·lari. *Si $S = S^t \in \mathbf{M}(r, \mathbb{R})$, $Y = Y^t \in \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$ són matrius definides positives, llavors $S \otimes Y$ també és simètrica i definida positiva.* $\square$

6.6.8 Definició. Podem definir, doncs, una immersió $\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{nr}$ per $Z \mapsto S \otimes Z$.

6.6.9 Proposició. *La immersió $Z \mapsto S \otimes Z$ és compatible amb l'acció dels grups simplèctics $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$, $\mathbf{Sp}(nr,\mathbb{R})$ en el sentit que l'aplicació*

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbf{Sp}(nr,\mathbb{R}) \\ M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &\mapsto M^S := \begin{bmatrix} 1 \otimes A & S \otimes B \\ S^{-1} \otimes C & 1 \otimes D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

és un morfisme de grups injectiu tal que

$$M^S \langle S \otimes Z \rangle = S \otimes (M\langle Z \rangle). \ \square$$

6.6.10 Definició. Per a cada matriu racional simètrica i definida positiva $S \in \mathbf{M}(r,\mathbb{R})$, posarem

$$\Gamma_n(S) := \{M \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R}) : \ M^S \in \Gamma_{nr,\theta}\}.$$

6.6.11 Observació. Com que S és una matriu racional, llavors $\Gamma(S)$ és un subgrup de congruència.

6.6.12 Definició. Una matriu S s'anomena parella si és entera i els seus elements diagonals són parells. Equivalentment, si per a $g \in \mathbb{Z}^r$ és $g^t S g \equiv 0 \pmod 2$.

6.6.13 Proposició. (a) *Si S és una matriu parella i q és un nombre natural tal que la matriu qS^{-1} també és parella, llavors el grup $\Gamma_n(S)$ conté $\Gamma_{n,0}[q]$.*

(b) *Si q és un nombre natural tal que qS i qS^{-1} són totes dues parelles, llavors $\Gamma(S)$ conté el grup d'Igusa $\Gamma_n[q,2q]$.* $\square$

6.6.14 Notació. Sigui $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$ el vector $g \in \mathbb{C}^{rn}$ format pels n vectors columna d'una matriu $G = [g_1, \ldots, g_n]$. Escriurem $G \leftrightarrow g$ per a indicar que la matriu $G \in \mathbf{M}(r \times n,\mathbb{C})$ es correspon amb el vector g via l'isomorfisme natural $\mathbf{M}(r \times n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{rn}$.

6.6.15 Proposició. *Suposem que $A \in \mathbf{M}(r,\mathbb{C})$, $B \in \mathbf{M}(n,\mathbb{C})$, i que g és el vector que es correspon amb G per l'isomorfisme anterior. Llavors, el vector que correspon a la matriu AGB^t és $(A \otimes B)g$. En símbols, si $G \leftrightarrow g$, llavors $AGB^t \leftrightarrow (A \otimes B)g$.* $\square$

6.6.3 Sèries theta generalitzades i Thetanullwerte

6.6.16 Proposició. *Per a tota funció holomorfa* $A : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ *existeix una altra funció holomorfa* $B : \mathcal{H}_{rn} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que* $B(S \otimes Z) = A(Z)$. $\square$

6.6.17 Proposició. *Per a cada funció coeficient* $P : \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *existeix una funció coeficient* $P_0 : \mathbb{C}^{rn} \longrightarrow \mathbb{C}$ *per a la qual se satisfà que* $P_0(g, S \otimes Z) = P(S^{1/2}G, Z)$. $\square$

6.6.18 Proposició. *Siguin* a, b *els vectors columna que es corresponen amb les matrius* U, V, *respectivament. Siguin* P, P_0 *funcions coeficient holomorfes connectades per la relació de la poposició anterior:* $P_0(g, S \otimes Z) = P(S^{1/2}G, Z)$, *amb* $g \leftrightarrow G$. *Llavors,*

$$\theta_P \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = \theta_{P_0} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (S \otimes Z); \ \textit{i també}$$

$$\tilde{\theta}_P \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = \tilde{\theta}_{P_0} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (S \otimes Z). \ \square$$

Finalment, enunciem la fórmula de transformació per a aquestes funcions theta.

6.6.19 Teorema. *Sigui* S *una matriu real, simètrica i definida positiva. Llavors, existeix una acció del grup* $\Gamma_n(S)$ *en l'espai de les funcions coeficient de la forma* $P : \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$, *que escriurem en la forma* $(P, M) \mapsto P^M$, *i que satisfà les propietats següents.*

(a) *Si* P *és constant, llavors* $P^M = P$.

(b) *Per a tot* $M \in \Gamma(S)$ *i tot* $Z \in \mathcal{H}_n$ *se satisfà la igualtat:*

$$\tilde{\theta}_{P^M} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{bmatrix} (S; M\langle Z \rangle) = v_S(M) \det(CZ + D)^{r/2} \tilde{\theta}_P \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z).$$

Aquí, s'ha escrit

$$\tilde{U} = UD^t - S^{-1}VC^t, \quad \tilde{V} = -SUB^t + VA^t, \quad v_S(M) := v_\theta(M^S). \ \square$$

6.6.20 Observació. En el cas en què $\det D \neq 0$, l'acció en les funcions coeficient es pot descriure a partir de transformades de Gauss, de manera similar a com s'ha fet més amunt amb sumes de Gauss simplèctiques.

Bibliografia

[Fr 91] Freitag, E.: *Singular Modular Forms and Theta Relations*. LNM **1487**. Springer, 1991.

[Ig 72] Igusa, K.: *Theta Functions*. GMW **194**. Springer, 1972.

[Sc 74] Schoeneberg, B.: *Elliptic Modular Functions*. GMW 203, Springer-Verlag, 1974.

[Sh 76] Shimura, G.: Theta functions with complex multiplication. *Duke Math. J.* **43**, n. 4 (1976), p. 673-696.

A. Travesa

Dept. d'Àlgebra i Geometria

Universitat de Barcelona

Gran Via de les Corts Catalanes, 585

E-08007, Barcelona

travesa@mat.ub.es