NOTES DEL SEMINARI

REPRESENTACIONS AUTOMORFES DE GL(2)

Parts IV, V i VI

Barcelona *1997*

3

Notes del Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC)

Comitè editorial
P. Bayer E. Nart J. Quer

REPRESENTACIONS AUTOMORFES DE GL(2)

Parts IV, V i VI

Edició a cura de

P. Bayer A. Travesa

Amb contribucions de

M. Alsina	F. Bars	P. Bayer	J. Coll
J. Dexeus	B. Plans	J.-J. Ramon	A. Travesa
M. Vela	N. Vila	*	*

P. Bayer, A. Travesa
Facultat de Matemàtiques, UB
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona. Espanya

Comitè editorial

P. Bayer
Fac. de Matemàtiques
Univ. de Barcelona
Gran Via de les Corts
Catalanes, 585
08007 Barcelona
Espanya

E. Nart
Fac.de Ciències
Univ. Autònoma de
Barcelona
Dep. de Matemàtiques
08193 Bellaterra
Espanya

J. Quer
Fac. de Matemàtiques
i Informàtica
Univ. Politècnica de
Catalunya
Pau Gargallo, 5
08228 Barcelona
Espanya

Classificació AMS
Primària: 11F, 11R, 11S
Secundària: 20G

Barcelona, 1997
Amb suport parcial de DGICYT: PB93-0034, PB93-0815
ISBN: 84-923250-2-X (de l´obra sencera)
ISBN: 84-923250-1-1 (d´aquest volum)

Contingut

Pàg.

PART IV: **Representacions de grups adèlics** 1

CAPÍTOL 16, per Josep J. Ramon
REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS
SOBRE LES ADELES (I) 3
§1: Repàs dels conceptes generals 3
§2: Productes tensorials restringits i àlgebra de Hecke global ... 5
§3: Producte tensorial restringit d'espais vectorials 6
§4: El cas de grups reductius adèlics: àlgebra de Hecke global .. 8
§5: El teorema de Gelfand, Graev i Piatetski-Shapiro 10
§6: Prova d'un teorema sobre productes tensorials 14
§7: Prova dels lemes tècnics 19
Bibliografia 23

CAPÍTOL 17, per Bernat Plans
REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS
SOBRE LES ADELES (II) 25
§1: Formes automorfes i representacions automorfes 26
§2: Representacions automorfes i formes modulars 33
Bibliografia 37

CAPÍTOL 18, per Montserrat Vela
TEOREMES DE MULTIPLICITAT 1 39
§1: Models de Whittaker 40
§2: Teorema de multiplicitat 1 44
§3: Teorema fort de multiplicitat 1 47
Bibliografia 51

PART V: **Funcions L** 53

CAPÍTOL 19, per Francesc Bars
FUNCIONS L AUTOMORFES (I) 55
§1: Introducció i notació 55
§2: Motivacions per a la definició de la funció L 56
§3: Representacions irreductibles admissibles 59
§4: Teoria de Jacquet-Langlands 63
§5: Funció L i un petit càlcul 67
§6: El resultat $L(s, \pi_f) = L(s', f)$ 70
Bibliografia 73

CAPÍTOL 20, per Jaume Coll
FUNCIONS L AUTOMORFES (II) 75
§1: L-grups 75
§2: Subgrups parabòlics de ${}^LG$ 76
§3: Subgrups de Levi 77
§4: Representacions i grups de Weil. Factors locals 78
§5: Definició de $\Phi(G)$ 78
§6: Condicions dels conjunts Π_ϕ 80
§7: Factors locals 80
§8: Problemes d'aixecament 80
Bibliografia 83

CAPÍTOL 21, per Pilar Bayer
LA CORRESPONDÈNCIA LOCAL DE
JACQUET-LANGLANDS 85
§1: La sèrie discreta per a $\mathbf{GL}(2, \mathrm{R})$ 86
§2: La sèrie discreta per a $\mathbf{GL}(2, F)$ 88
§3: La representació de Weil 88
§4: La corresponència local de Jacquet-Langlands 93
Bibliografia 95

CAPÍTOL 22, per PILAR BAYER
LA CORRESPONDÈNCIA GLOBAL DE JACQUET-LANGLANDS 97
§1: Representacions automorfes de $H^*(\mathrm{A}_F)$ 97
§2: Funció L associada a una representació automorfa en el cas quaterniònic 99
§3: La correspondència global de Jacquet-Langlands 100
§4: Imatge de la correspondència global de Jacquet-Langlands . 103
Bibliografia 105

CAPÍTOL 23, per ARTUR TRAVESA
GRUPS DE WEIL 107
§1: El transferidor 107
§2: Repàs de la teoria de cossos de classes 114
§3: Definició del grup de Weil 117
§4: Construcció de grups de Weil 124
§5: Unicitat dels grups de Weil 127
§6: Casos especials 128
Bibliografia 135

CAPÍTOL 24, per PILAR BAYER
LA FÓRMULA DE LES TRACES 137
§1: Una mica d'anàlisi 138
§2: La fórmula de les traces en dimensió 1 140
§3: El cas de quocient compacte 141
§4: El cas del grup lineal adèlic 143
§5: Càlcul de nuclis integrals 145
§6: Obtenció de la segona forma de la fórmula de les traces: cas del grup lineal 147
§7: El cas quaterniònic adèlic 149
§8: Aplicacions 150
Bibliografia 153

CAPÍTOL 25, per Artur Travesa
CANVIS DE BASE 155
§1: Canvi de base per a $\mathbf{GL}(1)$ 155
§2: Quasicaràcters, funcions L i factors ε 159
§3: Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en els L-grups 167
§4: Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas local 170
§5: Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas global 173
Bibliografia 175

CAPÍTOL 26, per Joan-Carles Lario
FILOSOFIA D'ARTIN. REPRESENTACIONS DE WEIL. CONJECTURA DE LANGLANDS LOCAL PER A $\mathbf{GL}(2)$ 177

CAPÍTOL 27, per Pilar Bayer
CONJECTURES GLOBALS DE LANGLANDS 179
§1: La llei de reciprocitat de Langlands 179
§2: Funcions L de motius 182
§3: Conjectures globals de Langlands 184
§4: Varietats de Shimura 185
Bibliografia 189

PART VI: **Aplicacions** 191

CAPÍTOL 28, per Jordi Guàrdia
TEOREMES DE CARAYOL (I) 193

CAPÍTOL 29, per Josep Gonzàlez
TEOREMES DE CARAYOL (II) 195

CAPÍTOL 30, per Pilar Bayer
EL TEOREMA DE DIAMOND-TAYLOR 197
§1: El teorema de Diamond-Taylor 197
§2: Consideracions preliminars 200
§3: El cas $\mathbf{GL}(2)$ 203

§4: El cas quaterniònic definit 205
§5: El cas quaterniònic indefinit 207
§6: La prova del teorema 210
Bibliografia 213

CAPÍTOL 31, per Pilar Bayer
EL TEOREMA DE LANGLANDS 215
§1: Representacions de Galois de tipus tetraèdric 215
Bibliografia 221

CAPÍTOL 32, per Teresa Crespo
EL TEOREMA DE TUNNELL 223

Contingut del primer volum

INTRODUCCIÓ 1

PART I: **Representacions de grups de Lie compactes** 3

CAPÍTOL 1, per Josep J. Ramon
REPRESENTACIONS DE GRUPS COMPACTES 5
§1: Mesures de Haar per a grups localment compactes 5
§2: Representacions de grups localment compactes 7
§3: El cas dels grups de Lie 8
§4: Grups compactes 10
§5: Lema de Schur i relacions d'ortogonalitat 11
§6: Caràcters 14
§7: El teorema de Peter-Weyl 17
§8: Enunciat final i prova del teorema de Peter-Weyl 19
§9: La representació regular 21
§10: Representacions induïdes. Reciprocitat de Frobenius 24
§11: L'àlgebra de grup i els seus idempotents. Funcions de classe 26
§12: Teoremes de descomposició de representacions de grups compactes 28
Bibliografia 31

CAPÍTOL 2, per Jordi Quer
ÀLGEBRES I GRUPS DE LIE 33

CAPÍTOL 3, per Maria Font
SISTEMES D'ARRELS I DIAGRAMES DE DYNKIN 35

CAPÍTOL 4, per Gabriel Cardona
CLASSIFICACIÓ DE LES ÀLGEBRES DE LIE COMPLEXES SIMPLES 37

CAPÍTOL 5, per Artur Travesa
REPRESENTACIONS DE **SO**(3) 39
§1: Representacions dels grups compactes 40
§2: Tors maximals 44
§3: Representacions de **so**(3) 48
§4: Representacions de **SU**(2) i de **SO**(3) 56
§5: Els harmònics esfèrics 62
§6: L'equació de Schrdinger 68
Bibliografia 77

CAPÍTOL 6, per Pilar Bayer
SU(2) 79
§1: Principis generals de la mecànica quàntica 79
§2: L'espai-temps de Minkowski 85
§3: Principis de la mecànica quàntico-relativista 90
§4: Invariància relativista de l'equació de Dirac 95
§5: Una classificació relativista de sistemes mecànico-quàntics .. 96
§6: El grup petit 99
§7: L'àtom d'hidrogen relativista i amb espín 101
Bibliografia 103

CAPÍTOL 7, per Josefina Dexeus
REPRESENTACIONS DE GRUPS DE LIE SEMISIMPLES I COMPACTES 105
§1: Formes reals compactes 106
§2: Tors maximals dels grups de Lie compactes 109
§3: Representacions de les àlgebres de Lie semisimples complexes 112
§4: La fórmula de Weyl dels caràcters 116
§5: Representacions dels grups clàssics 119
Bibliografia 127

PART II: **Representacions de grups reductius** 129

CAPÍTOL 8, per MONTSERRAT ALSINA
GRUPS REDUCTIUS 131
§1: Sistemes d'arrels i dades d'arrels 131
§2: Grups algebraics reductius. Cas absolut 134
§3: Grups reductius amb cos base k. Cas relatiu 138
§4: Descomposicions d'una classe de grups de Lie 142
Bibliografia 145

CAPÍTOL 9, per SALVADOR COMALADA
GRUPS REDUCTIUS SOBRE COSSOS LOCALS
..... 147

CAPÍTOL 10, per JORDI QUER
REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS REALS
..... 149

CAPÍTOL 11, per SALVADOR COMALADA
REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS
SOBRE COSSOS LOCALS NO ARQUIMEDIANS
..... 151

CAPÍTOL 12, per PILAR BAYER
REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS
ASSOCIATS A ÀLGEBRES CENTRALS I SIMPLES
SOBRE COSSOS LOCALS 153
§1: Grups algebraics reductius 153
§2: Representacions absolutament cuspidals 156
§3: Factors locals ultramètrics 157
§4: La representació especial 162
§5: Factors locals en el cas arquimedià 162
§6: El cas unitari 164
Bibliografia 165

PART III: **Formes automorfes** 167

CAPÍTOL 13, per Núria Vila
FORMES AUTOMORFES SOBRE GRUPS REDUCTIUS REALS 169
§1: Definició de forma automorfa sobre grups reductius reals ... 169
§2: Formes modulars clàssiques "versus" formes automorfes 174
Bibliografia 181

CAPÍTOL 14, per Pilar Bayer
TEORIA ANALÍTICA DE FORMES AUTOMORFES SOBRE GRUPS D'IDELES LINEALS 183
§1: Grups d'ideles: el cas $\mathbf{GL}(2)$ 183
§2: Formes automorfes en dimensió 1 186
§3: Formes automorfes en dimensió 2 187
§4: Sèries de Poincaré 191
§5: Sèries d'Eisenstein 192
§6: Sèries d'Eisenstein i representacions 197
Bibliografia 199

CAPÍTOL 15, per Pilar Bayer
TEORIA ANALÍTICA DE FORMES AUTOMORFES SOBRE GRUPS D'IDELES QUATERNIÒNICS 201
§1: Aritmètica d'àlgebres de quaternions 201
§2: Grups idèlics associats a àlgebres de quaternions 204
§3: Teoria analítica global de les formes automorfes associades a àlgebres de quaternions 210
Bibliografia 213

Capítol 16

Representacions de grups reductius sobre les adeles (I)

Josep J. Ramon Sessió 1a. del dia 12 de febrer de 1997

§1. Repàs dels conceptes generals

1.1. Notació En aquesta secció, G denota un grup localment compacte i totalment disconnex i K un subgrup compacte i obert.

1.2. Definició. Una representació $G \to \mathbf{GL}(V)$ és llisa si, i només si, per a tot v de V, $\mathrm{Stab}(v)$ és obert.

1.3. Definició. Una representació llisa π és admissible si, i només si, per a tot K és $\dim V^K < \infty$.

1.4. Definició. L'àlgebra de Hecke $H(G)$ és l'àlgebra de convolució de les funcions $G \to \mathbb{C}$ localment constants amb suport compacte. Si $K \subset G$, definim $e_K = \mu(K)^{-1}\, 1_K$.

e_K és un idempotent de $H(G)$.

$H(G,K) = e_K\ H(G)\ e_K$ o, equivalentment, la subàlgebra de les funcions localment constants de G en $\mathbb{C}$ que tenen suport en una unió finita de subconjunts de la forma KgK.

1.5. Observació. Un G-mòdul llis és de forma natural un $H(G)$-mòdul, en virtut del teorema de representació de Riesz (això és explicat amb detall en els capítols anteriors sobre grups reductius reals i p-àdics).

1.6. Observació. Si G no és compacte, aleshores $H(G)$ no és un anell unitari, en general; no obstant, les subàlgebres $H(G,K)$ sí que ho són, i la unitat és precisament l'idempotent e_K.

1.7. Observació. Si W és un G-mòdul llis, aleshores W^K és un $H(G,K)$-mòdul que és donat en termes de l'estructura de $H(G)$-mòdul per $W^K = e_K W$.

Donem ara un criteri d'irreductibilitat on ja entra l'àlgebra de Hecke.

1.8. Proposició. (Criteri d'irreductibilitat) *Sigui W un G-mòdul llis. Són equivalents:*

a) W és irreductible.

b) W^K és un $H(G,K)$-mòdul irreductible per a tot K.

DEMOSTRACIÓ. Si N és un $H(G,K)$-submòdul, aleshores $(H(G)N)^K = N$. L'equivalència demanada és clara d'aquí. $\square$

1.9. Observació. Per comprovar el criteri, només cal veure $b)$ per a un sistema (K_i) de subgrups compactes que sigui base d'entorns de $\mathbf{1}$ en G.

1.10. Corol·lari. *Siguin $K \subset G$ tal que $H(G,K)$ és commutatiu i W un G-mòdul llis irreductible. Aleshores* $\dim W^K \leq 1$.

§2. Productes tensorials restringits i àlgebra de Hecke global

2.1. Teorema. (El cas finit) *Siguin G_i, $i = 1,2$, grups localment compactes, totalment disconnexos i $G = G_1 \times G_2$. Llavors:*

a) Si π_i són representacions admissibles irreductibles de G_i, aleshores $\pi_1 \otimes \pi_2$ també ho és.

b) Si π és una representació admissible irreductible de G, aleshores existeixen π_i, representacions de G_i tals que $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$.

DEMOSTRACIÓ. Enunciem els fets següents, els quals són de comprovació directa:

1) $H(G_1 \times G_2) = H(G_1) \otimes H(G_2)$.

2) $H(G_1 \times G_2, K_1 \times K_2) = H(G_1, K_1) \otimes H(G_2, K_2)$.

3) $(W_1 \times W_2)^{K1 \times K_2} = W1^{K_1} \otimes W_2^{K_2}$.

De 3) i del criteri d'irreductibilitat ja vist es dedueix a).

b) Si π és una representació admissible de G, prenem $K = K_1 \times K_2$. Tindrem, per un resultat de [**Bo58**, p. 94], que existeixen $H(G_i, K_i)$-mòduls $W_i^{K_i}$ irreductibles, $W_1^{K_1}$ i $W_2^{K_2}$, que satisfan que $W^K = W_1^{K_1} \otimes W_2^{K_2}$, via un isomorfisme a_K. De moment, remarquem que K_i només són utilitzats com a índexs, i no tindran altre significat fins que la prova del teorema estigui acabada. Anem a obtenir W_i a partir de sistemes filtrants formats per W_i en variar K_i dins de G.

Si $K_1' \subset K_1$, $K_2' \subset K_2$, prenem $K' = K_1' \times K_2'$. Tindrem $H(G_i, K_i)$-morfismes

$$b(K_i, K_i') : W_i^{K_i} \to W_i^{K_i'}$$

que faran commutatiu el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} W^K & \xrightarrow{a_K} & W_1^{K_1} \otimes W_2^{K_2} \\ {\scriptstyle incl.}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_1 \otimes b_2} \\ W^{K'} & \longrightarrow & W_1^{K_1'} \otimes W_2^{K_2'}. \end{array}$$

D'aquesta manera, prenent $W_i = \varinjlim W_i^{K_i}$ obtenim mòduls admissibles W_i que cercàvem, i que donen sentit a la notació $W_i^{K_i}$, que satisfan $W = W_1 \otimes W_2$. $\square$

2.2. Observació. G, G_i només han aparegut a la prova a través de les seves àlgebres de Hecke. Aquest pas serà clau més endavant. Tot el que hem fet ho tractarem de generalitzar de forma satisfactòria, si més no per als casos de més interés per a nosaltres, al cas en què tenim un producte directe restringit (infinit) de grups G_i.

2.3. Observació. Encara podem generalitzar més la proposició. Definim àlgebra idempotentada com una àlgebra A tal que $A = \bigcup eAe$, on e recorre un cert sistema d'idempotents E de A, i definim també (A, E)-mòdul admissible com un A-mòdul M tal que $\dim eM < \infty$ per a tot e de E.

D'aquesta manera, en reformular el teorema i la seva prova en aquests termes, obtindríem un resultat més general.

§3. Producte tensorial restringit d'espais vectorials

Siguin $(W_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una família d'espais vectorials, Σ un subconjunt finit de Λ. Per a cada índex $\lambda \in \Lambda - \Sigma$, triem un element $x_\lambda \in W_\lambda - \{0\}$. Definim el producte tensorial restringit dels W_λ respecte de la família x_λ com el límit d'aquesta família dirigida d'espais vectorials:

$$\bigotimes_{x_\lambda} W_\lambda = \varinjlim (W_S, f_{S,S'}),$$

on S recorre els subconjunts finits de Λ tals que $\Sigma \subset S$, i W_S denota l'espai vectorial $\bigotimes_{\lambda\in S} W_\lambda$. Els "morfismes de pas" són descrits per

$$f_{S,S'}(\otimes_{\lambda\in S} w_\lambda) = (\otimes_{\lambda\in S'-S}\ x_\lambda) \otimes (\otimes_{\lambda\in S'}\ x_\lambda).$$

Clarament, $\bigotimes_{x_\lambda} W_\lambda$ està generat pel subconjunt $\otimes_\lambda w_\lambda$, amb $w_\lambda = x_\lambda$ per a quasi tot λ.

3.1. Propietats bàsiques.

• Sigui $B_\lambda \in \mathrm{End}(W_\lambda)$ una família d'endomorfismes, cadascun triat com a endomorfisme diferent d'un espai vectorial de la família, i $x_\lambda \in W_\lambda$ una subfamília d'elements que satisfan, per a quasi tot λ, la relació

$$B_\lambda x_\lambda = x_\lambda.$$

La família B_λ determina un element $B \in \mathrm{End}(\bigotimes W_\lambda)$ de forma unívoca de la manera següent:

$$B(\otimes w_\lambda) = \otimes B_\lambda w_\lambda.$$

• (Exemple important) Sigui G el producte directe restringit dels grups localment compactes i totalment disconnexos G_λ respecte de la família de subgrups oberts i compactes K_λ, quasi per a tot λ. Aleshores, $G = \prod (G_\lambda : K_\lambda)$ és localment compacte i totalment disconnex. Trobarem l'àlgebra de Hecke de G en funció de les àlgebres idempotentades $H(G_\lambda, K_\lambda)$ en unes condicions prou generals que incloguin el nostre cas, el dels grups reductius sobre les adeles.

Aquest és, doncs, l'anàleg "adèlic" del cas finit ja exposat al teorema **2.1**.

3.2. Observació. Sigui $(W_\lambda)_\lambda$ una família d'espais vectorials, i siguin $e_\lambda, f_\lambda \in W_\lambda$ dues famílies d'elements. Siguin W^e i W^f els productes directes restringits de la família d'espais vectorials W_λ respecte a les dues famílies d'elements distingits $e_\lambda, f_\lambda \in W_\lambda$. Suposem que, a més, se satisfà que e_λ, f_λ són linealment dependents quasi per a tot λ. Aleshores, existeix un isomorfisme natural entre W^e i W^f.

Aquesta darrera observació serà clau en el que segueix.

3.3. Teorema. *Sigui (G_λ, K_λ) una família de grups localment compactes, totalment disconnexos i, per a cadascun d'aquests grups (quasi per a tot λ, de fet) considerem un subgrup obert i compacte K_λ. Suposem que l'àlgebra $H(G_\lambda, K_\lambda)$ és commutativa quasi per a tot λ. Aleshores, tota representació admissible irreductible W de l'àlgebra de Hecke global $H(G, K)$ és factoritzable,*

$$W = \bigotimes W_\lambda,$$

i les classes d'isomorfia dels $H(G_\lambda, K_\lambda)$-mòduls W_λ són determinades per la classe d'isomorfia del $H(G,K)$-mòdul W.

DEMOSTRACIÓ. És qüestió de factoritzar $W^{K'}$, on $K' = \prod K'_i$. Després es reprodueix l'esquema de la prova del teorema **2.1**. Per l'observació **1.7**, la classe d'isomorfia de W_λ és determinada per la classe d'isomorfia de W. □

§4. El cas de grups reductius adèlics: àlgebra de Hecke global

Sigui G un grup algebraic connex reductiu sobre un cos global F, i notem

$$G(\mathbb{A}_F) = \prod_v (G(F_v) : K_v),$$

on K_v denota el subgrup compacte maximal (que existeix en cas que v sigui un primer finit). Aprofitarem les construccions de la secció anterior per expressar l'àlgebra de Hecke de $G(\mathbb{A})$ en funció de les àlgebres de Hecke $H(G_v, K_v)$, en el cas que F sigui un cos de nombres, i demostrarem un teorema de factorització en el cas que F sigui de característica positiva. D'entrada, aprofitant els resultats de la secció anterior obtenim, tot seguit, el següent

4.1. Teorema. *Si F és un cos global de característica positiva, aleshores tota representació admissible de $H(G(\mathbb{A}_F))$ és factoritzable.*

Els objectius de la resta d'aquesta secció són:

• Definir l'àlgebra de Hecke de $G(\mathbb{A})$ de manera apropiada.

• Definir representació admissible de $G(\mathbb{A})$ de manera que concordi amb el cas local ja estudiat en anteriors capítols. Es recorda que es tenen definicions clares de representació admissible en el cas local (arquimedià i no arquimedià).

• Establir una relació, tal com s'ha fet en la secció anterior i també en el cas local, entre les representacions admissibles de $G(\mathbb{A})$ i els $H(G(\mathbb{A}))$-mòduls admissibles, en hipòtesis prou generals.

• Establir teoremes de factorització semblants al teorema **3.3** en hipòtesis convenients.

Es recorda que ja tenim definida l'àlgebra de Hecke local per a totes les places de F. D'altra banda, el resultat següent (que figura a l'exposició de Tits del volum [**AD (I) 79**]) serà clau per demostrar els teoremes de factorització:

• Sigui G un grup reductiu connex sobre un cos de nombres F; aleshores, $H(G_v)$ és commutativa per a quasi tot v valor absolut (finit). Definim d'una vegada l'àlgebra de Hecke global de G de la manera següent: prenem

$$G_\infty = \prod_{v\ arqu.} G_v.$$

És clar que $H(G_\infty) = \bigotimes_{v\ arqu.} H(G_v)$. D'altra banda, definint $G(\mathbb{A}_f) = \prod_{v\ finit} (G_v : K_v)$, tenim per la secció anterior que

$$H(G(\mathbb{A}_f)) = \bigotimes_{e_{K_v},\ v\ finit} H(G_v).$$

Definirem $H(G)$ de la manera que ens sembla més natural:

$$H(G) := \bigotimes_{e_K} H(G_v).$$

Ara definirem, també de la manera més natural possible, $H(G)$-mòdul admissible; d'entrada, fixem les notacions següents: direm $K_\infty = \prod_{v\ arqu} K_v$, $K = \prod_v K_v$.

4.2. Definició. Sigui W un espai de Hilbert. Direm que W és admissible si, i només si, W és un $(\mathrm{Lie}\, G_\infty, K_\infty)$-mòdul i un $(G(\mathbb{A}_f)$-mòdul llis tal que:

a) L'acció de $G(\mathbb{A}_f)$ commuta amb la de $\mathrm{Lie}\, G_\infty$ i la de K_∞.

b) Per a tota classe d'isomorfia γ de representacions irreductibles (contínues) de K, la component γ-isotípica de W és de dimensió finita.

Es té el teorema de factorització següent:

4.3. Teorema. *Tota representació de $G(\mathbb{A}_F)$ és factoritzable, si F és un cos global. Els factors són únics llevats d'equivalència.*

DEMOSTRACIÓ. Com ja va essent usual, simplement cal apel·lar a les àlgebres de Hecke. Es recorda que si v és un primer de l'infinit, un $H(G(F_v))$-mòdul és admissible si, i només si, és $(\mathrm{Lie}\, G_v, K_v)$-admissible; això ens mostra que s'ha triat la manera adequada de donar una àlgebra de Hecke en els primers infinits. Per acabar de demostrar el teorema, només cal procedir com en el teorema **3.3**. □

4.4. Teorema. *Sigui F un cos de nombres. Tota representació admissible i irreductible de $G(\mathbb{A}_F)$ factoritza. Els factors són únics llevat d'equivalència.*

(La prova, ara que ja tenim les àlgebres de Hecke corresponents, que concorden també amb les definicions d'admissibilitat en el cas local arquimedià, és calcada a la ja feta en el cas de cossos globals de característica positiva.)

Tots aquests teoremes d'admissibilitat completen el quadre que havíem iniciat en aquest capítol. Això no obstant, donarem un criteri analític fàcil d'usar que ens donarà condicions suficients d'admissibilitat. Això correspon a la secció següent.

§5. El teorema de Gelfand, Graev i Piatetski-Shapiro

Com ja comentàvem a la secció anterior, donarem condicions analítiques senzilles, suficients perquè una representació prou general de $G(\mathbb{A})$ en un espai de Hilbert H sigui admissible. Avancem el resultat anunciat a la secció anterior, que serà conseqüència del que demostrarem en les pàgines següents.

5.1. Teorema. *Siguin G un grup algebraic reductiu i connex sobre un cos de nombres F, i $T : G(\mathbb{A}_F) \to \mathbf{GL}(H)$ una representació unitària irreductible. Aleshores:*

a) Existeixen representacions irreductibles i unitàries T_v de $G(F_v)$, no ramificades quasi per a tota v, tals que $T = \otimes T_v$. Els factors T_v són únics llevats d'isomorfisme.

b) Per a cada classe γ de representacions irreductibles de K (subgrup de $G(\mathbb{A})$ definit en **4.1***), la component γ-isotípica de T és de dimensió finita.*

c) L'espai vectorial de vectors K-finits de T es de manera natural un $G(\mathbb{A})$-mòdul admissible i irreductible. Sigui $T^K = \otimes T_v^K$ la factorització de T^K donada pel teorema **4.1**. *Aleshores, T_v^K és isomorfa, com a $G(F_v)$-mòdul admissible, a l'espai de vectors K_v-finits de T_v.*

5.2. Alguns fets sobre la teoria d'anells d'operadors en un espai de Hilbert. Dels fets que exposarem, es poden trobar demostracions en els llibres d'anàlisi funcional. Una referència bàsica per al llenguatge d'operadors és [**Tr 67**].

Sigui H un espai de Hilbert. Es coneixen amb el nom d'anells de von Neumann (associats a H) els subanells $\mathfrak{R}$ de l'anell $L(H,H)$ d'operadors lineals continus (i subespais vectorials) que satisfan les condicions següents:

a) $1 \in \mathfrak{R}$.

b) Si $A \in \mathfrak{R}$, aleshores $A^* \in \mathfrak{R}$.

c) $\mathfrak{R}$ és un tancat de $L(H,H)$ en la topologia feble.

Sigui S un subconjunt de $L(H,H)$. Denotarem per S' el subanell d'operadors que commuten amb tots els operadors de S (és a dir, el centralitzador de S).

5.3. Propietats bàsiques.

• Suposem que S és tancat per $A \to A^*$. Aleshores, S' és un anell de von Neumann.

• Suposem que S és un anell de von Neumann. Aleshores, S' també ho és, i també $(S')' = S$

• S'observa que si $\mathfrak{R}$ és un anell de von Neumann, $\mathfrak{R}$ és de fet una subàlgebra de $L(H,H)$ amb involució.

5.4. Definició. Direm que un anell de von Neumann és un factor si, i només si, el centre de R consta (exactament) dels operadors escalars. Dit d'una

altra manera, si R' és el centralitzador de R, R és un factor si, i només si, $R \cap R' = \mathbb{C}\,1$.

5.5. Exemple. En el cas que $H = H_1 \otimes H_2$ (com a espais de Hilbert), considerem $\mathfrak{R} = \{A \otimes 1 : A \in L(H_1, H_1)\}$. Aleshores, $\mathfrak{R}' = \{1 \otimes B : B \in L(H_2, H_2)\}$. $\mathfrak{R}$ és doncs un factor.

• Vegem que, en cas que $\dim H < \infty$, l'exemple donat és de fet l'únic exemple de factor.

5.6. Teorema. *Siguin H un espai unitari i $\mathfrak{R}$ un factor de H. Aleshores, existeixen dos espais unitaris H_1, H_2 tals que $H = H_1 \otimes H_2$, i $\mathfrak{R} = \mathrm{End}(H_1) \otimes \mathbf{1}$.*

Demostració. Les eines que farem servir són a qualsevol tractat complet sobre teoria de cossos de classes; hem fet servir aquí els apunts de J. S. Milne, que es poden aconseguir per Internet. Els lemes que enunciarem estan demostrats en un apèndix al final de l'exposició.

Pas 1: Demostrarem que $\mathfrak{R}$ és una àlgebra simple central. En ser una $\mathbb{C}$-àlgebra, serà un àlgebra de matrius sobre $\mathbb{C}$.

5.7. Lema. *L'àlgebra $\mathfrak{R}$ és semisimple.*

Demostrem, sabent que $\mathfrak{R}$ és semisimple, que és de fet una àlgebra simple. Pel teorema de Wedderburn, el centre de $\mathfrak{R}$ és un producte (com a anells) de tantes còpies de $\mathbb{C}$ com àlgebres simples hi ha en la descomposició de $\mathfrak{R}$ que l'esmentat teorema ens dóna. En el nostre cas, és clar, doncs, que només hi ha una còpia de $\mathbb{C}$ i, per tant, $\mathfrak{R}$ és una àlgebra de matrius (és a dir, una àlgebra simple sobre $\mathbb{C}$). Considerem el centralitzador de $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$. Raonant igual, tenim que també és una àlgebra de matrius. Sabem que l'àlgebra $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ és un quocient de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}'$, i com que aquesta última també és una àlgebra simple i central, no té ideals bilàters; en conclusió, $\mathfrak{R}\mathfrak{R}' \cong \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}'$, i els dos factors són àlgebres de matrius.

Pas 2: El pas següent és veure que

$$\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}' = \mathrm{End}(H).$$

Aquest pas és fàcil de veure usant el teorema del doble centralitzador: n'hi

ha prou amb veure, fent servir aquest teorema, que el centralitzador de $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ en $\mathrm{End}(H)$ consta únicament de $\mathbb{C}\,1$. Això és conseqüència trivial del fet que $\mathfrak{R}$ és un factor i, per tant, el centralitzador cercat és $\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{R} = \mathbb{C}\,1$. Hem vist, doncs, que $\mathrm{End}(H) = \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}'$; observem que l'isomorfisme es té a nivell d'àlgebres simples amb involució. Fent anar el detall aquest de la involució, ens agradaria veure que H és producte tensorial de dos espais euclidians H_i. S'observa que si E és un espai hermític de dimensió finita, aleshores la involució $A \to A^*$ de $\mathrm{End}(E)$ depèn únicament i exclusivament del producte escalar hermític de E. Volem, d'alguna manera, recuperar l'estructura d'espai hermític de H a partir del fet que $\mathrm{End}(H) = \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}'$. Ho farem a partir d'aquest

5.8. Lema. *Siguin H, H' dos espais hermítics de dimensió finita n, i suposem que existeix un isomorfisme d'àlgebres amb involució*

$$\Theta : \mathrm{End}(H) \to \mathrm{End}(H').$$

Aleshores, existeix una isometria $\phi : H \to H'$ tal que

$$\Theta(f) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}, \ \forall f \in \mathrm{End}(H).$$

Si ens el creiem primer, vegem com podem deduir-ne el resultat final. Tenim que $\mathfrak{R} \cong \mathrm{End}(H_1)$ com a àlgebres amb involució, i també que $\mathfrak{R}' \cong \mathrm{End}(H_2)$. Aleshores,

$$\mathrm{End}(H) \cong \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}' \cong \mathrm{End}(H_1 \otimes H_2)$$

com a àlgebres amb involució. En aplicar el lema, obtenim directament que, en efecte, H és isomorf i isomètric a $H_1 \otimes H_2$. El lema **5.7** també serà demostrat més endavant. $\square$

Quan l'espai de Hilbert H és de dimensió infinita, no tots els factors són d'aquesta forma. Els factors de $L(H, H)$ que poden obtenir-se com a l'exemple s'anomenen "factors de tipus I". Una representació T d'un grup G s'anomena una "representació-factor" si, i només si, l'anell generat (topològicament) pels operadors $T(g)$, $g \in G$, és un factor. Direm que el grup G és de tipus I si, i només si, cada representació-factor és de tipus I (i és,

per tant, un múltiple —tensorialment parlant, s'entén— d'una representació irreductible). Siguin G_1, G_2 dos grups i T una representació irreductible de $G = G_1 \times G_2$. Denotem per R_i l'anell engendrat per $T(g)$, $g \in G_i \subset G$. Aleshores, si R_i' denoten els centralitzadors respectius de R_i (amb les notacions d'abans) tenim de la irreductibilitat de T que $R_1' \cap R_2' = \mathbb{C}$. A més, $R_1 \subset R_2'$ i respectivament amb R_2. Per tant,

$$R_1 \cap R_1' \subset R_2' \cap R_1' = \mathbb{C}$$

i aleshores R_1 és un factor. El mateix se satisfà per a R_2. Suposem que un dels dos grups és de tipus I. Aleshores, la restricció de T a aquest grup és un múltiple d'una representació irreductible. En aquest cas, és fàcil deduir que la representaació T és de la forma $T_1 \otimes T_2$, on T_i són representacions de G_i. $\square$

§6. Prova d'un teorema sobre productes tensorials

Sigui G un grup algebraic connex sobre un cos de nombres F, i suposem que els G_v són grups de tipus I, els quals satisfan, per a totes les places v llevat d'un nombre finit, la condició següent: cada representació irreductible de G_v conté no més d'un vector invariant linealment independent per a un subgrup compacte maximal. (Sabem que aquestes hipòtesis es satisfan si el grup és reductiu). En aquestes hipòtesis, veurem que tota representació unitària i irreductible de $G(\mathbb{A})$ és un producte tensorial de representacions (unitàries) T_v, i que totes, llevat d'un nombre finit, són de classe I. D'entrada, analitzem el cas següent (que resultarà ser l'únic cas): Suposem que per a cada v tenim una representació unitària irreductible d'un espai de Hilbert H_v; suposem també que, excepte un nombre finit de v, existeix com a molt un vector linealment independent invariant per a U_v (anomenàvem a aquestes representacions "de classe I"). Considerem H com el producte tensorial restringit de la família H_v; com que els H_v són separables, H també ho serà. La irreductibilitat de la representació T és clara pels criteris ja donats aquí. Es té la fórmula següent per al caràcter de T: $\operatorname{tr}\ T(g) = \prod \operatorname{tr}\ T_v(g_v)$, on $\operatorname{tr}\ T_v$ és un caràcter de $T_v(g_v)$, com ja sabem. Aquí hem d'entendre $\operatorname{tr}\ T(g)$ com una "funció generalitzada", és a dir, com un funcional en una família

ben triada de funcions de $G_{\mathbb{A}}$ (les funcions a què ens referim són precisament les funcions de Schwarz-Bruhat, i són un anàleg adèlic de les funcions de Schwarz o *test functions* clàssiques). (Per a més detalls, consulteu el llibre **[GGP-S 86]**).

6.1. Teorema. *Suposem que els grups G_v satisfan la següent condició per a quasi tot v:*

• *Cada representació irreductible de G_v conté com a molt un vector invariant per un subgrup compacte maximal.*

Aleshores, tota representació irreductible i unitària de $G_{\mathbb{A}}$ és un producte tensorial restringit de representacions irreductibles i unitàries de les representacions T_v de G_v, i gairebé totes les T_v són representacions de classe I.

6.2. Observació. La condició sobre els G_v se satisfà en el nostre cas (la representació és admissible i irreductible).

6.3. Lema. *Suposem que un grup localment compacte $\mathfrak{G}$ és el producte directe de dos subgrups, $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$, on almenys un dels dos factors, per exemple $\mathfrak{G}_1$, és de tipus I. Aleshores, tota representació irreductible unitària de $\mathfrak{G}$ és un producte tensorial de representacions de $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_2$.*

Demostració. Sigui $T(g)$ una representació unitària de (G) en un espai de Hilbert H. Considerem els anells R_1 i R_2 engendrats topològicament (en la topologia feble) pels operadors $T(g_1)$, $g_1 \in \mathfrak{G}_1$ i $T(g_2)$, $g_2 \in \mathfrak{G}_2$ respectivament. Siguin R_i' els respectius centralitzadors en $L(H,H)$. Igual que en la secció 5, es dedueix que R_1 és un factor. Per hipòtesi, aquest factor és de tipus I. Això vol dir que H és el producte tensorial de H_1 i H_2 i, per tant, que R_1' consta dels operadors $1 \otimes B$. Per tant, és clar que els operadors de la representació són de la forma

$$T(g_1, g_2) = T(g_1) \otimes T(g_2). \square$$

6.4. Lema. *Siguin G un grup topològic i $T(g)$ una representació unitària de G en un espai de Hilbert H. Si G conté una cadena de subgrups compactes V_n que convergeix al grup trivial, aleshores per a n prou gran existeix un vector f en H invariant per a tots els operadors $T(g)$, $g \in V_n$.*

DEMOSTRACIÓ. Introduim l'operador

$$P_n = \int_{V_n} T(v_n) dv_n, \tag{1}$$

on integrem respecte de la mesura de Haar (normalitzada) de V_n. Provarem que la successió d'operadors P_n és una aproximació a la identitat, és a dir, convergeix fortament a 1 (cf. el primer capítol).

Per definició de la cadena decreixent V_n, si $v_n \in V_n$, la successió d'operadors $T(v_n)$ convergeix uniformement respecte de v_n a l'operador identitat. Per tant, $T(v_n) - 1$ tendeix a zero uniformement en $v_n \in V_n$ i, en integrar, obtenim que $\forall f \in H$, $P_n f - f$ convergeix a 0 en n.

És clar, doncs, que P_n és no idènticament nul per a $n >> 0$. Sigui w un vector de $\operatorname{Im} P_n$. De la definició de P_n, es dedueix que $T(v_n)P_n = P_n$; per tant, $T(v_n)w = w$ si $n \geq n_0, v_n \in V_n$, i el lema queda demostrat. □

6.5. Nota. Per comoditat, fixem un ordre en el conjunt dels valors absoluts del cos de nombres F.

DEMOSTRACIÓ. S'observa que, fixat un primer v de F, $G(\mathbb{A})$ descompon en producte directe

$$G(\mathbb{A}) = G_v \times G'_v.$$

Per tant, pel lema anterior, T és el producte tensorial d'una representació irreductible i unitària de G_v, que anomenarem H_v, i d'una altra de G'_v, H'_v. Tenim, doncs, els candidats a T_v. De moment, per a tot v, tenim que

$$H = H_v \otimes H'_v.$$

Aquestes representacions no són arbitràries; de fet, satisfan la condició següent.

Si v és prou gran, l'espai de representació H_v de $T_v(g_v)$ conté un vector f_v invariant per a $T(U_v)$. Denotem per V_v el subgrup de les adeles que consta dels elements de la forma $(1, \ldots, 1, u_v, \ldots)$. Aquesta successió de subgrups convergeix al grup trivial. Per tant, llevat d'un nombre finit de v, i gràcies al lema, existeix un vector f invariant per $T(V_v)$.

Sigui, doncs, $v \geq v_0$. Aleshores, el vector invariant f pot expressar-se de manera única en forma de suma: $f = \sum f_{v,i} \otimes \psi_i$, on $f_{v,i}$ són vectors de

H_v, i ψ_i són d'una base ortonormal fixada de H'_v. Com que U_v està inclòs en V_{v_0}, en ser $v \geq v_0$, tenim que $T(u_v)f = f$ per a tot u_v en U_v. Però $T(u_v)f = \sum(T_v(u_v)f_{v,i}) \otimes \psi_i$, i, per tant, tenim que $T_v(u_v)f_{v,i} = f_{v,i}$. En conseqüència, les T_v són, llevat d'un nombre finit, de classe I.

Fins ara tenim que T_v són (unitàries) de classe I, i tenim, gràcies al lema, descomposicions

$$H = (\otimes_{v'<v} H_{v'}) \otimes H''_v, \tag{3}$$

on H''_v és l'espai de la representació irreductible i unitària T'' del grup G''_v dels elements de $G(\mathbb{A})$ de la forma $(1, \ldots, 1, g_v, \ldots)$.

És fàcil verificar que d'entre els vectors en H que són invariants per als operadors $T(w_{v_0})$, hi ha un vector de la forma següent:

$$f = \prod_{v \leq v_0} f_{q,1} f',$$

on f' és un vector en H''_{v_0} invariant per als operadors $T''(w_{v_0})$. Suposem que la norma de f' és 1.

També és fàcil comprovar que per a tot $v \geq v_0$ el vector f' té, en virtut de l'expressió (1), la forma següent:

$$f' = \prod_{v_0 \leq v' \leq v} f_{v',1} f''_v \text{on } f''_v \in H''_v, \tag{4}$$

on f' és un vector de H''_{v_0}. Per (4), l'element f''_v es pot representar de la forma següent:

$$f''_v = \prod_{v'>v} f_{q,1}.$$

En H, considerem tots els vectors de la forma

$$\prod_{v'<v} f_{v',i_{v'}} f''_v = \prod_{v'<v} f_{v',i(v')} \prod_{v' \geq v} f_{v',1}. \tag{5}$$

El vector f''_v està definit per (2). Naturalment, aquests vectors formen un sistema ortonormal en H.

L'operador de la representació $T(g)$ actua en aquests vectors de la manera següent:

$$T(g)\prod_{v<v'} f_{v,i_v}f''_v = \prod_{v'<v}\left(T_{v'}(g_{v'}f_{v',i_{v'}})\right)\left(T''_v(g''_v)f''_v\right) =$$
$$\prod_{v'<v}\left(T_{v'}(g_{v'})f_{v',i_{v'}}\right)\prod_{v\leq v'<w}\left(T_{v'}(g_{v'})f_{v',i_{v'}}\right)\left(T''_w(g''_w)f''_w\right),$$

on $g''_v \in G''_v$. Per tant, és fàcil veure que el vector

$$T(g)\prod_{v<v'} f_{v',i_{v'}}f''_v$$

és de nou una combinació lineal de la forma (5). Això es dedueix immediatament del fet que per a cada $g \in G(\mathbb{A})$ existeix un $w > v_0$ tal que $g''_w \in V_w$; en conseqüència, tenim que

$$T''_w(g''_w)f''_w = f''_w. \tag{6}$$

D'aquesta manera, el subespai H' generat topològicament pels vectors de la forma (5) és invariant per als operadors $T(g)$. Com que $T(g)$ és irreductible, tenim que $H' = H$, això és, els vectors de la forma (5) formen un sistema ortonormal complet en H.

La fórmula (6) és el que cerquem, ja que expressa la representació donada $T(g)$ del grup d'adeles G_A en termes de les representacions $T_v(g_v)$ dels grups g_v. □

6.6. Pregunta: ([**GGP-S 86**, p. 278]) Seria interessant esbrinar la qüestió següent, relacionada amb el teorema que acabem d'exposar.

Donat un grup algebraic i semisimple G, és cert que només un nombre finit de G_v poden tenir representacions unitàries que continguin més d'un vector linealment independent invariant per als subgrups U_v?

§7. Prova dels lemes tècnics

Anem a demostrar els lemes tècnics que ens fan de pedra angular a la demostració del teorema. Recordem que H és un espai hermític de dimensió finita.

7.1. Lema. *Tot factor $\mathfrak{R}$ de H és una àlgebra semisimple.*

DEMOSTRACIÓ. Veurem aquest resultat usant els resultats sobre grups de Lie dels capítols anteriors.

Pas 1: $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} \cap \mathbf{GL}(H)$. Sigui $\phi \in \mathbf{GL}(H) \cap \mathfrak{R}$. Aleshores, com que ϕ^{-1} és un polinomi en ϕ, tenim que $\phi^{-1} \in \mathfrak{R}$. S'observa que, com que $1 \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ és un obert (no buit) de $\mathfrak{R}$.

Pas 2: $G = \mathfrak{R} \cap \mathbf{SL}(H)$ genera $\mathfrak{R}$ com a espai vectorial. S'observa en primer lloc que $\mathfrak{R}^* \supset \mathbb{C}^*$. D'aquí deduim que

$$\mathfrak{R}^* = \mathbb{C}^* \mathbf{SL}(H).$$

N'hi ha prou amb veure que

$$\forall A \in \mathfrak{R}, \exists \phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{R}^* \text{ tals que } A = \phi_1 - \phi_2.$$

Aquesta última afirmació és directa si prenen $\phi_1 = A + \lambda\, 1$, $\phi_2 = \lambda\, 1$, on $\lambda \in \mathbb{C}$ és un escalar convenient.

7.2. Observació. Del pas 2 deduim que si tenim un $\mathfrak{R}$-mòdul a l'esquerra, M, aleshores els G-submòduls de M són de fet $\mathfrak{R}$-submòduls.

Pas 3: G és un grup de Lie semisimple. G és clarament invariant per a $(A \mapsto A^*)$. Aleshores, G és reductiu, pels resultats del capítol 10, sobre grups reductius reals. D'altra banda, és un fet conegut que un grup de Lie reductiu és semisimple si, i només si, el seu centre és un subgrup discret. Aquesta afirmació és conseqüència directa del fet que en tota àlgebra de Lie reductiva L, el radical de L coincideix amb el seu centre (cf. [**Po 82**, p. 358]). G és, doncs, un grup (algebraic) reductiu i semisimple, ja que pels passos anteriors es té que $Z(G) = Z(\mathfrak{R}) \cap G \subset \mu_n$ on $n = \dim H$.

Pas 4: Vegem finalment que $\mathfrak{R}$ és semisimple. Sigui V un $\mathfrak{R}$-mòdul (de dimensió finita). Donat que els $\mathfrak{R}$-submòduls de V coincideixen amb

els G-submòduls de V, tenim que V és $\mathfrak{R}$-semisimple, per ser G-semisimple. Hem vist, doncs, que $\mathfrak{R}$ és una àlgebra semisimple. $\square$

7.3. Lema. *Sigui $\Theta : \mathrm{End}(H) \to \mathrm{End}(H')$ un isomorfisme d'àlgebres amb involució, on H i H' són espais hermítics de dimensió finita. Aleshores, Θ és induït per una isometria; és a dir, existeix un isomorfisme isomètric $\phi : H \to H'$ tal que*

$$\Theta(f) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}, \ \forall f \in \mathrm{End}(H).$$

DEMOSTRACIÓ. La idea és que si E és un espai unitari, aleshores en $\mathrm{End}(E)$ es reflecteix el producte escalar de E (per exemple, amb la involució $(.)^*$). $\mathrm{End}(E)$ té una estructura natural d'espai unitari en funció de la de E prenent com a producte escalar el següent:

$$< A, B >= \mathrm{Tr}(A^* B).$$

Es recorda que tota àlgebra simple sobre $\mathbb{C}$ té una traça canònica associada (cf. [**Mu 70**, p. 179]); en el nostre cas, la traça és la traça matricial usual. Per tant, Θ és una isometria entre les dues àlgebres de matrius. La idea és traslladar aquesta isometria als espais H, H'. Recordem també que si R_1 i R_2 són dues àlgebres simples sobre un cos infinit, aleshores la traça en $R_1 \otimes R_2$ és el producte tensorial de les dues traces respectives tr_{R_i}.

• Sigui E un espai unitari de dimensió finita; anem a construir un monomorfisme isomètric de E en $\mathrm{End}(E)$. Després, aquesta injecció serà usada per demostrar el lema **7.5**. La idea és fixar-nos en les matrius de rang 1, concretament en els projectors de rang 1.

7.4. Observacions.

1) Sigui p un projector en un espai vectorial V de dimensió finita. Aleshores, $\mathrm{tr}\ p = \mathrm{rg}\ p$. Com que la traça es conserva per Θ, tota projecció $p : H \to H$ passa a ser una projecció del mateix rang.

2) Un projector $e : H \to H$ és hermític si, i només si, és una projecció ortogonal.

3) Suposem que $\dim H = n$. Aleshores, una família d'idempotents hermítics $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ (no nuls) satisfà que $0 = \epsilon_i \epsilon_j \ \forall i \neq j$ si, i només

si, $\operatorname{Im}\epsilon_i$ són rectes ortogonals dues a dues. A més, en aquest cas, $\sum \epsilon_i = 1$. A més, existeix una bijecció entre els dos conjunts següents:

$$\{\text{bases ortonormals de H}\} \to \{\text{famílies } (\epsilon_i)\}.$$

Per ser exactes, la bijecció es té mòdul la relació d'equivalència següent:

$$\{e_1, \ldots, e_n\} \sim \{f_1, \ldots, f_n\} \text{ si, i només si, } < e_i >=< f_i > \ \forall i.$$

Se'ns fa necessari un altre lema per acabar la prova d'aquest.

7.5. Lema. *Sigui H un espai hermític (de dimensió finita n) i siguin $\{\epsilon_1, \ldots \epsilon_n\}$, $\{\epsilon'_1, \ldots \epsilon'_n\}$ dues famílies d'idempotents hermítics que satisfacin l'observació* 3)*. Aleshores, existeix una isometria $\phi \in U(H)$ tal que*

$$\phi \epsilon_i \phi^{-1} = \epsilon'_i.$$

DEMOSTRACIÓ. L'observació 3) ens dóna la clau: la família d'idempotents ϵ_i està associada a una base ortonormal e_i, i la família ϵ'_i a una base ortonormal e'_i. N'hi ha prou amb prendre l'únic element $\phi \in U(H)$ tal que $\phi(e_i) = e'_i$. □

Acabem la prova del lema **7.3** fent servir el lema **7.5**. Considerem bases ortonormals e_i de H i e'_i de H'. Aleshores, si ϵ_i és la imatge per Θ d'una família ortogonal d'idempotents hermítics de rang **1** de $\operatorname{End}(H)$, η_i, pels comentaris anteriors ϵ_i també ho són. És fàcil veure que hi ha una isometria $\psi : H \to H'$ tal que $\psi \circ \eta_i \circ \psi^{-1} = \epsilon_i$. Pel teorema de Skolem-Noether, tenim que existeix un endomorfisme $A \in \operatorname{End}(H')$ tal que $\Theta(f) \equiv A\left(\psi \circ f \circ \psi^{-1}\right) A^{-1}$. Anomenem $\phi = A \circ \psi$. ϕ indueix, doncs, un isomorfisme que preserva la involució entre $\operatorname{End}(H)$ i $\operatorname{End}(H')$; per tant, ϕ és una semblança; vegem-ho amb detall. Com que l'isomorfisme induït per ϕ preserva la involució, tenim que

$$\left(\phi \circ f \circ \phi^{-1}\right)^* \equiv \phi \circ f^* \circ \phi^{-1}.$$

Aleshores,

$$\phi^* \phi \circ f \circ (\phi^* \phi)^{-1} \equiv f$$

i, per tant, $\phi^*\phi \in Z(\mathrm{End}(H))$, amb la qual cosa tenim que ϕ és una semblança.

Podem suposar, doncs, que ϕ és una isometria. $\square$

Bibliografia

[**AD (I) 79**] *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, n. 34, AMS, 1979. (2 volums); exposés de Flath i de Tits.

[**Bo 58**] Bourbaki, N.: *Algebre, Cap VIII: Modules et anneaux semi-simples*, Hermann, 1958.

[**GGP-S 86**] Gelfand, Graev, Piatetski-Shapiro: *Representation Theory and Automorphic Functions*, Academic Press, 1986.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R. P.: *Automorphic forms on* $\mathbf{GL}(2)$, LNMS, n. 114, 1970.

[**Mu 70**] D. Mumford, D.: *Abelian Varieties*, Oxford Univ. Press, 1970.

[**Po 82**] Postnikov, M.: *Lie groups and Lie algebras*, Nauka, 1982.

[**Ru 79**] Rudin, W.: *Análisis Funcional*, Reverté, 1979.

[**Tr 67**] Treves, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, 1967.

Capítol 17

Representacions de grups reductius sobre les adeles (II)

Bernat Plans Sessió 2a. del dia 12 de febrer de 1997

Els objectius principals d'aquesta exposició són, d'una banda, la introducció del concepte general de representació automorfa (adèlica), i de l'altra, l'estudi de la relació entre el cas particular corresponent a $\mathbf{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ i les formes modulars clàssiques; cadascun d'ells constitueix el contingut d'un apartat d'aquest capítol.

Podem pensar que un dels punts de partida del programa de Langlands és la consideració del següent objectiu (aproximat):

Obtenir una família d'objectes "globals" (relatius a un cos global i que siguin "producte" dels corresponents objectes "locals") als quals saber associar sèries L de manera que:
• aquestes sèries L descomponguin en producte d'Euler dels factors locals corresponents i siguin "prou bones" (admetin perllongació meromorfa, satisfacin equació funcional, ...);
• aquesta família produeixi totes les sèries L globals "prou bones" –i "eulerianes"– conegudes (obtingudes de caràcters de Hecke, formes modulars, representacions d'Artin, varietats sobre cossos globals, ...).

L'exposició anterior fa que no ens sembli antinatural començar considerant la família de representacions irreductibles i admissibles de grups reductius (adèlics) sobre cossos globals (donat que són factoritzables); associades a aquestes representacions es poden definir (en molts casos) sèries L "eulerianes". La proposta de Langlands (...) és que el fet que una d'aquestes representacions sigui automorfa hauria de caracteritzar que la

seva sèrie L (i les seves "torçades") fos "prou bona". A més, la condició addicional de cuspidalitat hauria de correspondre a perllongació entera, enlloc de simplement meromorfa.

Les formes automorfes ens proporcionaran els espais de representació de les representacions automorfes; les definirem de manera que aquestes últimes siguin admissibles i, per tant, factoritzables (seran irreductibles per definició).

En aquest capítol ens limitarem a establir la definició general de representació automorfa, mentre que l'estudi de les sèries L corresponents serà l'objectiu de capítols posteriors (com a mínim, per a $\mathbf{GL}_n$).

Plantejarem les representacions automorfes associades a formes modulars (cuspidals, valor propi, ...) com un cas particular de representacions automorfes (de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$), tot i que és convenient veure-les com a motivació per a les definicions en la situació general.

Les referències bàsiques usades en les dues situacions esmentades són, respectivament, [**Bo-Ja 79**] i [**Ge 75**].

§1. Formes automorfes i representacions automorfes

Totes les definicions que donarem en aquest apartat tenen sentit per a un cos global F qualsevol; nosaltres, però, ens restringirem al cas en què F és un cos de nombres. Cal fer notar que, per a cossos de funcions en una indeterminada amb coeficients en un cos finit, els conceptes a introduir esdevenen essencialment més "simples" gràcies a l'absència de primers arquimedians (cf. [**Bo-Ja 79**, §5]).

Comencem establint (i recordant) algunes notacions i definicions bàsiques. Considerem:

F un cos de nombres,

V_∞ el conjunt de primers arquimedians d'F,

V_f el conjunt de primers no arquimedians d'F,

$V = V_\infty \bigcup V_f$ el conjunt de primers d'F,

$\mathbb{A} := \mathbb{A}_F$ l'anell d'adeles d'F,

$\mathbb{A}_f$ l'anell d'adeles finites d'F,

F_v el completat d'F en v,

G un grup reductiu connex sobre F,

$G_v := G(F_v)$,

Z el més gran tor F-split del centre de G.

Recordem que el grup d'adeles de G es pot definir com:

$$G(\mathbb{A}) = G_\infty \times G_f,$$

on $G_\infty := \prod_{v \in V_\infty} G_v$ i $G_f := G(\mathbb{A}_f)$ és el producte restringit de $\{G_v : v \in V_f\}$ respecte certs subgrups compactes maximals K_v de G_v.

Per a cada $v \in V$, $\mathcal{H}_v$ denotarà l'àlgebra de Hecke (local) de G_v (ja definides en capítols anteriors).

Per als $v \in V_\infty$, suposem també fixat un subgrup compacte maximal K_v de G_v (i els pensem com a grups de Lie reals), respecte al qual definim $\mathcal{H}_v$.

G_∞ s'identifica amb el grup de punts reals del grup reductiu connex obtingut de G per restricció d'escalars a $\mathbb{Q}$; denotarem per $\mathcal{G}_\infty$ la seva àlgebra de Lie i per $Z(\mathcal{G}_\infty)$ el centre de l'àlgebra envolvent universal de $(\mathcal{G}_\infty)_{\mathbb{C}}$.

Notem

$$\mathcal{H}_\infty := \bigotimes_{v \in V_\infty} \mathcal{H}_v.$$

Per a cada $v \in V_f$ podem considerar l'idempotent $\xi_v \in \mathcal{H}_v$ associat a K_v i, pel capítol 16, sabem que

$$\mathcal{H}_f := \bigotimes_{v \in V_f}{}' \mathcal{H}_v \qquad \text{(restringit respecte els } \xi_v\text{)}$$

és l'àlgebra de Hecke de G_f.

1.1. Definició. Definim l'àlgebra de Hecke (global) de $G(\mathbb{A})$ $(= G_\infty \times G_f)$ com:

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_\infty \bigotimes \mathcal{H}_f.$$

1.2. Definició. Direm que $\xi \in \mathcal{H}$ és simple si $\xi = \xi_\infty \otimes \xi_f$, amb $\xi_f \in \mathcal{H}_f$ i $\xi_\infty \in \mathcal{H}_\infty$ idempotent.

Observem que, si ξ_L és l'idempotent associat a un subgrup obert i compacte L de G_f, aleshores $f * \xi_L = f$ si, i només si, f és L-invariant a la dreta.

Ara introduirem el concepte de forma automorfa adèlica, generalitzant el de forma automorfa real ja definit. Podem pensar que les formes automorfes (reals) en G_∞ s'obtenen com a "restriccions a l'infinit" de formes automorfes (adèliques) en $G(\mathbb{A})$.

Sigui K_∞ un subgrup compacte maximal de G_∞.

1.3. Definició. Direm que una funció complexa f de $G(\mathbb{A})$ és una forma automorfa en $G(\mathbb{A})$ respecte K_∞ si satisfà:

a) f és llisa, i.e., és contínua i, com a funció de $G_\infty \times G_f$, és $\mathcal{C}^\infty$ respecte el primer argument i localment constant respecte el segon;

b) $f(\gamma x) = f(x), \quad \forall \gamma \in G(F)$;

c) $\exists \xi \in \mathcal{H}$ simple tal que $f * \xi = f$;

d) $\exists J \subset Z(\mathcal{G}_\infty)$ ideal de codimensió finita que anul·la f;

e) $\forall y \in G_f$, la funció en G_∞ definida per $x \mapsto f(xy)$ és de creixement lent (en el sentit definit en el capítol 13).

En aquest cas, direm que f és de tipus (ξ, J, K_∞) i $\mathcal{A}(\xi, J, K_\infty)$ denotarà l'espai de formes automorfes del mateix tipus.

1.4. Observació. Igual que en el cas real, les propietats c) i d) de la definició s'han d'interpretar com condicions de K-finitud i $Z(\mathcal{G}_\infty)$-finitud d'f, respectivament.

1.5. Definició. Direm que una funció contínua $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ és cuspidal si, per a tot F-subgrup propi parabòlic P de G amb radical unipotent N, es satisfà:

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} f(nx)dn = 0\,, \quad \forall x \in G(\mathbb{A}).$$

1.6. Definició. Una forma cuspidal (de tipus (ξ, J, K_∞)) és una forma automorfa (de tipus (ξ, J, K_∞)) cuspidal.

$^0\mathcal{A}(\xi, J, K_\infty)$ és l'espai de formes cuspidals del mateix tipus.

Tenint en compte que els elements de $\mathcal{H}_f$ són funcions (de G_f) localment constants i amb suport compacte, donat $\xi_f \in \mathcal{H}_f$, sempre existeix un subgrup obert i compacte L de G_f tal que $\xi_f * \xi_L = \xi_f$. Així, si $\xi = \xi_\infty \otimes \xi_f$, amb ξ_∞ idempotent, tindrem

$$\mathcal{A}(\xi, J, K_\infty) \subseteq \mathcal{A}(\xi_\infty \otimes \xi_L, J, K_\infty)\ ,$$

i el mateix val per a formes cuspidals.

1.7. Observació. Si $L' \subset L$ (subgrups oberts i compactes de G_f) aleshores $\xi_L * \xi_{L'} = \xi_L$ i tenim la inclusió anàloga a l'esmentada. Això ens permet identificar l'espai $\mathcal{A}(\xi_\infty, J, K_\infty)$, generat per les formes automorfes de tipus $(\xi_\infty \otimes \xi_f, J, K_\infty)$ amb $\xi_f \in \mathcal{H}_f$ arbitrari, amb el límit inductiu

$$\varinjlim_L \mathcal{A}(\xi_\infty \otimes \xi_L, J, K_\infty)\ ,$$

i el mateix val per a formes cuspidals.

És suficient, doncs, estudiar els espais de formes automorfes (resp. cuspidals) de tipus $(\xi_\infty \otimes \xi_L, J, K_\infty)$; centrant-nos en aquests espais, obtindrem la relació desitjada entre formes automorfes adèliques i formes automorfes reals i podrem deduir propietats de les primeres directament dels resultats anàlegs (ja vistos) per a les segones.

Concretament, donat un subgrup obert i compacte L de G_f, el conjunt de dobles classes laterals de $G(\mathbb{A})$ per $G(F)$ a l'esquerra i per $G_\infty \cdot L$ a la dreta és finit; així, existeix un conjunt finit C, que podem suposar contingut a G_f, tal que:

$$G(\mathbb{A}) = G(F) \cdot C \cdot G_\infty \cdot L;$$

per tant, $G(\mathbb{A})$ és reunió disjunta finita dels oberts $\{G(F) \cdot c \cdot G_\infty \cdot L\}_{c \in C}$.

Per a cada $c \in C$, podem considerar:

- $f_c : G_\infty \to \mathbb{C}$, definida per $x \mapsto f(cx)$;

- $\Gamma_c := G(F) \cap (G_\infty \times c \cdot L \cdot c^{-1})$ que, identificat amb el corresponent subgrup de G_∞, és un subgrup aritmètic de G_∞.

D'aquesta manera, l'assignació $f \mapsto (f_c)_{c \in C}$ defineix una bijecció entre els espais de funcions complexes en $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/L$ i en $\coprod_{c \in C} (\Gamma_c \backslash G_\infty)$; tenint en compte que les formes automorfes de tipus $(\xi_\infty \otimes \xi_L, J, K_\infty)$ són L-invariants a la dreta (i $G(F)$-invariants a l'esquerra), de les definicions es dedueix que la bijecció anterior dóna lloc a un isomorfisme

$$\mathcal{A}(\xi_\infty \otimes \xi_L, J, K_\infty) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{c \in C} \mathcal{A}(\Gamma_c, \xi_\infty, J, K_\infty),$$

on els espais d'arribada són els espais de formes automorfes reals (en G_∞) definits en capítols anteriors.

A més, f és cuspidal si, i només si, f_c és cuspidal, $\forall c \in C$; per a comprovar l'anul·lació de les integrals corresponents cal observar que, si N és el grup unipotent involucrat, es té l'isomorfisme

$$N(F)\backslash N(\mathbb{A}) \cong (N(F) \cap (N_\infty \times c \cdot L \cdot c^{-1}))\backslash N_\infty = (\Gamma_c \cap N_\infty)\backslash N_\infty;$$

aquest isomorfisme és conseqüència del fet que N satisfà la propietat d'aproximació forta (per ser unipotent) i, per tant, $N(\mathbb{A}) = N(F) \cdot N_\infty \cdot Q$, per a tot subgrup obert i compacte Q de N_f.

En definitiva, la bijecció esmentada també defineix un isomorfisme

$${}^0\mathcal{A}(\xi_\infty \otimes \xi_L, J, K_\infty) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{c \in C} {}^0\mathcal{A}(\Gamma_c, \xi_\infty, J, K_\infty).$$

1.8. Observació. (cf. [**Bo 63**]) La descomposició $G(\mathbb{A}) = G(F) \cdot C \cdot G_\infty \cdot L$ esmentada, amb C finit, equival a la mateixa expressió amb C subconjunt compacte de $G(\mathbb{A})$ (donat que tot compacte està contingut en una unió finita de traslladats esquerres de $G_\infty \cdot L$), i és vàlida en hipòtesis encara més generals que les nostres. Per a $G = \mathbf{GL}_n$ s'obté C de cardinal igual al nombre de classes d'F; ja hem comentat que per a un grup reductiu G que satisfaci la propietat d'aproximació forta ($\mathbf{SL}_n$, grups unipotents, ...) hi ha una única doble classe lateral i, per tant, en aquest cas, formes automorfes en $G(\mathbb{A})$ de tipus $(\xi_\infty \otimes \xi_L, J, K_\infty)$ es corresponen amb formes automorfes en G_∞ de tipus $(\Gamma_e, \xi_\infty, J, K_\infty)$.

Gràcies als isomorfismes obtinguts, ara és clar que les dues proposicions següents són conseqüència directa dels resultats anàlegs vistos per a formes automorfes reals.

1.9. Proposició. (Formes automorfes)

a) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(\xi, J, K_\infty) < +\infty$ *(Harish-Chandra).*

b) Si f és una funció en $G(\mathbb{A})$ que satisfà a), b), c) *i* d) *de la definició de forma automorfa, i tal que*

$$f(zx) = \chi(z) f(x)\,, \quad \forall z \in Z(\mathbb{A}),\ \forall x \in G(\mathbb{A})$$

per a un caràcter χ de $Z(\mathbb{A})/Z(F)$, aleshores $|f|$ defineix una funció en l'espai de mesura finita $Z(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A})$. Si, per a algun $p \geq 1$, $|f| \in L^p(Z(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$, aleshores f és de creixement lent (en el sentit de e)*) i, per tant, és una forma automorfa.*

c) Tota forma automorfa és $C(G(\mathbb{A}))$-finita, on $C(G(\mathbb{A}))$ és el centre de $G(\mathbb{A})$.

1.10. Observació. Igual que en el cas real, *c)* és conseqüència del fet que $C(G(\mathbb{A}))$ actua (per translació) en els espais $\mathcal{A}(\xi, J, K_\infty)$ que, per *a)*, són de dimensió finita.

D'aquesta proposició es dedueix el següent resultat essencial, que podem veure com a motivació de la definició donada de forma automorfa.

1.11. Corol·lari. *Si f és una funció en $G(\mathbb{A})$ que satisfà* a), b), c) *i* e) *de la definició* **1.3** *aleshores són equivalents:*

1) *f satisfà* d) *de la definició, i.e., és una forma automorfa.*

2) *$\forall v \in V_\infty$, $f * \mathcal{H}_v$ és un $\mathcal{H}_v$-mòdul admissible.*

3) *$\forall v \in V$, $f * \mathcal{H}_v$ és un $\mathcal{H}_v$-mòdul admissible.*

4) *$f * \mathcal{H}$ és un $\mathcal{H}$-mòdul admissible.*

1.12. Observació. Que 1) implica 4) és conseqència de l'apartat a) de la proposició.

1.13. Proposició. (Formes cuspidals) *Si f és una funció cuspidal en $G(\mathbb{A})$ que satisfà* a), b), c), d) *de la definició* **1.3** *i tal que*

$$f(zx) = \chi(z)f(x)\,, \quad \forall z \in Z(\mathbb{A}),\ \forall x \in G(\mathbb{A})$$

per a un caràcter χ de $Z(\mathbb{A})/Z(F)$, aleshores són equivalents:

1) *f satisfà* e) *de la definició, i.e., és una forma cuspidal;*

2) *f és afitada;*

3) $|f| \in L^2(Z(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$.

Donem, per fi, la definició de representació automorfa.

1.14. Definició. Direm que una representació de $\mathcal{H}$ és automorfa (resp. cuspidal) si és isomorfa a un subquocient irreductible d'una representació d'$\mathcal{H}$ en l'espai de formes automorfes (resp. cuspidals) en $G(\mathbb{A})$.

1.15. Observació. Recordem que un subquocient d'una representació Π en un espai V és una representació (obtinguda de Π) del tipus U/U', amb $U' \subset U$ subespais invariants (per Π) de V.

Pel corol·lari anterior, tota representació automorfa és admissible i, per tant, factoritzable (per ser irreductible).

Tal com les hem definides, les representacions automorfes (de $G(\mathbb{A})$) no són $G(\mathbb{A})$-mòduls; el "problema" és que l'admissibilitat s'ha de llegir en termes d'àlgebres de Hecke (per causa de la component arquimediana); sí són, però, G_f-mòduls. Quan F és un cos de funcions en una indeterminada amb coeficients en un cos finit, les representacions automorfes es defineixen com a representacions de $G(\mathbb{A})$.

En la direcció del comentari anterior, es defineix:

1.16. Definició. Una representació (contínua) de $G(\mathbb{A})$ és automorfa (resp. cuspidal) si el subespai de vectors admissibles és una representació automorfa (resp. cuspidal) de $\mathcal{H}$.

Si χ és un caràcter de $Z(\mathbb{A})/Z(F)$, definim $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\chi$ com l'espai de funcions $f : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ tals que $|f| \in L^2(Z(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ i $f(zx) = \chi(z)f(x)$, $\forall z \in Z(\mathbb{A})$, $\forall x \in G(\mathbb{A})$.

Amb les definicions donades, tot subespai tancat irreductible i G-invariant (respecte la representació regular dreta) de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\chi$ és un (G-mòdul) automorf, gràcies al teorema de Gelfand, Graev i Piatetski-Shapiro (cf. el capítol 16).

A més, també es té el resultat següent (cf. el capítol 18).

1.17. Teorema. *Denotem per* ${}^0L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\chi$ *el subespai de les funcions cuspidals de* $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\chi$. *Aleshores, la representació regular dreta (unitària) de* $G(\mathbb{A})$ *en* ${}^0L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\chi$ *descompon en suma discreta de representacions irreductibles (unitàries i, per tant, admissibles) de* $G(\mathbb{A})$, *cadascuna amb multiplicitat finita.*

Els subespais irreductibles de ${}^0L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_\chi$ (tancats, i $G(\mathbb{A})$-invariants) donats pel teorema corresponen, doncs, a totes les (classes d'isomorfisme de) representacions cuspidals en què $Z(\mathbb{A})$ actua amb caràcter χ; els vectors admissibles en aquests subespais són precisament les formes cuspidals que satisfan $f(zx) = \chi(z)f(x)$, $\forall z \in Z(\mathbb{A})$, $\forall x \in G(\mathbb{A})$.

Acabem aquest apartat amb l'enunciat del resultat següent, que serà útil (en capítols posteriors) a l'hora de definir sèries L de representacions automorfes (a partir de la definició per a representacions cuspidals).

Cal veure'l com la versió global dels resultats locals ja vistos (tant en el cas arquimedià com en el no arquimedià) que ens permetien classificar les representacions irreductibles i admissibles de grups reductius sobre cossos locals.

1.18. Teorema. (cf. [**La 79**]) *Una representació de* $G(\mathbb{A})$ *és automorfa si, i només si, és un subquocient irreductible d'una representació induïda per una representació cuspidal d'un subgrup parabòlic* P *de* G.

§2. Representacions automorfes i formes modulars

En aquesta secció ens proposem donar exemples de representacions automorfes, obtinguts de la teoria de les formes modulars. Concretament,

veurem com associar representacions automorfes (de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$) a determinades formes modulars; si volem obtenir una representació factoritzable (les automorfes ho són), és natural exigir a la forma modular de partida que sigui vector propi dels operadors de Hecke, donat que això caracteritza el fet que (la seva sèrie L) sigui "factoritzable".

En tot l'apartat usarem les notacions introduïdes a l'anterior, sempre amb $G = \mathbf{GL}_2$ i $F = \mathbb{Q}$.

Comencem recordant un resultat que ja ha aparegut en capítols anteriors.

2.1. Proposició. *Sigui ψ un caràcter de Dirichlet mòdul N. Aleshores:*

1) *ψ defineix un grössencharakter de $\mathbb{Q}$.*
2) *Si notem també per ψ el caràcter de $Z(\mathbb{A})/Z(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ obtingut a 1), tenim que*

$$S_k(N,\psi) \subset {}^0L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))_\psi,$$

on identifiquem els elements de $S_k(N,\psi)$ amb les formes automorfes en $G(\mathbb{A})$ que defineixen (via l'assignació que notàvem $f \mapsto \phi_f$).

Volem veure de quina manera una forma cuspidal clàssica de $S_k(n,\psi)$, vector propi dels operadors de Hecke en $(p,N) = 1$, defineix un subquocient irreductible de la representació regular dreta de $G(\mathbb{A})$ en ${}^0L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))_\psi$, ρ_0^ψ (i.e., una representació cuspidal de $G(\mathbb{A})$ en la qual $Z(\mathbb{A})$ actua amb caràcter ψ).

2.2. Observació. En capítols anteriors ja es va comentar que la representació regular dreta ρ de $G(\mathbb{A})$ en $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ descompon com

$$\int L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))_\psi d\psi,$$

on ψ recorre els caràcters de $Z(\mathbb{A})/Z(\mathbb{Q})$. A més, l'espectre continu de ρ^ψ en $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))_\psi$ és conegut gràcies a la teoria de les "sèries d'Eisenstein"; l'objectiu enunciat ens proporcionarà exemples de representacions irreductibles que apareixen en l'espectre discret de ρ^ψ.

Sigui $f(z) \in S_k(N,\psi)$, vector propi dels operadors de Hecke per als primers $(p,N) = 1$. Considerem:

- $H(f) \subset {}^0L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))_\psi$ el subespai generat pels $G(\mathbb{A})$-traslladats a la dreta de la forma automorfa $\phi_f(g)$ corresponent a $f(z)$ (és a dir, $H(f) := \rho_0^\psi(G(\mathbb{A}))\phi_f(g)$);
- π_f la representació (regular dreta) de $G(\mathbb{A})$ en $H(f)$.

Pel teorema **1.17**, sabem que π_f és suma discreta de representacions (unitàries) irreductibles (i, per tant, admissibles) de $G(\mathbb{A})$ que apareixen a ρ_0^ψ.

Es pot comprovar (cf. [**Ge 75**, p. 93]) que:

2.3. Proposició. *Totes aquestes representacions tenen les mateixes components locals en $p = \infty$ i $(p, N) = 1$.*

El teorema **1.17** també ens diu que cadascuna d'aquestes representacions apareix a ρ_0^ψ amb multiplicitat finita. De fet, en el capítol 18, veurem el resultat següent.

2.4. Teorema.

a) La multiplicitat de tot subquocient irreductible de ρ_0^ψ és **1**.

b) Dos subquocients irreductibles de ρ_0^ψ amb quasi tots els factors locals isomorfs són iguals.

Del lema i del teorema deduïm que Π_f és un subquocient irreductible de ρ_0^ψ.

L'assignació $f \mapsto \Pi_f$ que acabem d'establir admet una recíproca. De fet, es té el resultat següent.

2.5. Teorema. *Sigui $\psi : Z(\mathbb{A})/Z(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to \mathbb{C}$ un caràcter trivial a $(\mathbb{R}_+)^*$ (i.e., que correspon a un caràcter de Dirichlet ψ).*

Per a cada Π, subquocient irreductible de ρ_0^ψ (amb component a l'infinit Π_∞ de la sèrie discreta?) de conductor N (cf. el capítol 19), considerem la classe d'equivalència $\{f_\Pi\}$ de funcions $f_\Pi \in S_k(N, \psi)$ tals que:

1) *totes tenen els mateixos valors propis per als operadors de Hecke en els primers p tals que $(p, N) = 1$;*

2) *$\phi_{f_\Pi}(g)$ pertany a l'espai de Π.*

Aleshores: $\{f\} \longleftrightarrow \Pi_f$ *defineix una correspondència bijectiva. A més, la correspondència a nivell de funcions (enlloc de classes de funcions) també és bijectiva quan la restringim a formes noves (i no ho és per a formes velles).*

DEMOSTRACIÓ. Cf. cf. [**Ge 75**, Thm. 5.19]. □

En determinades situacions particulars, els factors locals de Π_f es poden descriure explícitament en termes d'f (cf. el capítol 19).

Bibliografia

[**Bo 63**] Borel, A.: Some finiteness theorems for adele groups over number fields, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **16** (1963), 101–126.

[**Bo-Ja 79**] Borel, A.; Jacquet, H.: Automorphic Forms and Automorphic Representations, en el llibre *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1979, pp. 189–202.

[**Ge 75**] Gelbart, S. S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Princeton Univ. Press, 1975.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic Forms on* $\mathbf{GL}(2)$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

[**La 79**] Langlands, R.P.: On the notion of an Automorphic Representation A supplement to the preceding paper, en el llibre *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1979, pp. 203–207.

Capítol 18

Teoremes de multiplicitat 1

Montserrat Vela Sessió 1a. del dia 19 de febrer de 1997

L'objectiu d'aquest capítol és provar els teoremes de multiplicitat 1. El text de referència ha estat, essencialment, [**Pi-Sh 79**].

Sigui F un cos, que serà global a partir del punt **1.6**. Considerarem el grup $G = \mathbf{GL}_n$ i posarem $G_F = G(F)$ i $G_{\mathbb{A}} = G(\mathbb{A})$, on $\mathbb{A}$ són les adeles del cos F.

Sigui X el subgrup estàndard maximal de G, format per les matrius triangulars superiors amb 1 a la diagonal $X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Posem $X_{\mathbb{A}} = X(\mathbb{A})$ i $X_F = X(F)$.

Estudiarem els dos resultats següents:

- La multiplicitat d'una representació irreductible, llisa i admissible de $G(\mathbb{A})$ en l'espai de formes cuspidals (de quadrat integrable) és igual a 0 o a 1.
- Si tenim dues representacions irreductibles $\Pi_i = \otimes \Pi_{i,v}$, $i = 1, 2$, que són isomorfes quasi per a tota valoració v, llavors són iguals.

Per fer l'estudi d'aquests dos resultats, l'eina principal que necessitem són els models de Whittaker d'una representació, que també estudiarem.

L'estructura del capítol és la següent:

§1 Models de Whittaker

Models de Whitttaker locals

Models de Whitttaker globals.

Propietats

§2 Teorema de multiplicitat 1
Enunciat
Explicació de l'enunciat
Propietats del model de Whittaker en aquest cas
Demostració

§3 Teorema fort de multiplicitat 1
Enunciat
Lema petit
Demostració

§1. Models de Whittaker

Donada $\Pi : G_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$ una representació admissible, llisa, irreductible, definirem el seu model de Whittaker. Aquest model és un conjunt de funcions llises de $G_{\mathbb{A}}$ en $\mathbb{C}$. Es pot definir de dues maneres: una, directament com a conjunt de funcions que satisfan unes propietats; i una altra, veient-lo com la imatge de V per un element de $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}(G, X, \psi))$, on ψ és un cert caràcter.

Començarem estudiant la noció de model de Whittaker en el cas local, mitjançant la representació induïda, i després estudiarem aquests models en el cas global.

1.1. Models de Whittaker locals Sigui F un cos local. Començarem recordant la noció de representació induïda.

- Si F és real, aquesta noció s'ha explicat en el capítol 10.
- Si F és local no arquimedià, s'ha explicat en el capítol 11.

Suposarem ara que F és un cos local no arquimedià, recordarem explícitament la noció de representació induïda en aquest cas, l'aplicarem al cas d'un caràcter, i definirem el model de Whittaker en aquest cas.

1.2. Definició. Siguin F un cos local no arquimedià, G un grup reductiu, i posem també $G = G_F$ el grup de punts sobre el cos. Siguin H un subgrup tancat de G i $\Pi : H \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$ una representació llisa de H. Definim el

conjunt $L(G,\Pi)$ com el conjunt de les funcions $f : G \longrightarrow V$ tals que

a) $f(hg) = \Pi(h)f(g), \forall h \in H,\ g \in G$; i

b) $\exists K \subset G$, subgrup compacte obert, tal que $f(gk) = f(g), \forall k \in K,\ g \in G$.

(La segona condició ens diu que aquestes funcions són localment constants.) (Cf. [**Ca 79**, p. 125.])

La representació induïda de Π, posem $\tau_\Pi = \mathrm{Ind}(G,H,\Pi)$, és:

$$\begin{aligned} \tau_\Pi : G &\to \mathbf{GL}(L(G,\Pi)) \\ g \mapsto \tau_\Pi(g) : L(G,\Pi) &\to L(G,\Pi) \\ f \mapsto \tau_\Pi(g)(f) : G &\to V \\ g' &\mapsto f(g'g). \end{aligned}$$

Apliquem això al nostre cas (representació induïda d'un caràcter). Fixem un caràcter additiu $\psi_0 : F \longrightarrow \mathbb{C}$. Sigui X_F el subgrup unipotent estàndard maximal de G_F definit al començament. A partir d'aquest caràcter, definim:

$$\begin{aligned} \psi : X_F &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow \psi_0(x_1 + \cdots + x_{n-1}), \end{aligned}$$

on

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ddots & & x_{n-1} \\ & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, $L(G,\psi)$ és el conjunt format per les funcions $f : G \to \mathbb{C}$ tals que

a) $f(xg) = \psi(x)f(g), \forall x \in X,\ g \in G$, i

b) $\exists K \subset G$, subgrup compacte obert, tal que $f(gk) = f(g), \forall k \in K,\ g \in G$;

i la representació induïda, posem $\tau = \mathrm{Ind}(G,X,\psi)$, és:

$$\begin{aligned} \tau_\Pi : G &\to \mathbf{GL}(L(G,\Pi)) \\ g \mapsto \tau_\Pi(g) : L(G,\Pi) &\to L(G,\Pi) \\ f \mapsto \tau_\Pi(g)(f) : G &\to V \\ g' &\mapsto f(g'g). \end{aligned}$$

1.3. Definició. Un model de Whittaker per a (Π, V) respecte de ψ, que denotarem per $W(\Pi, \psi)$, és la imatge de V per un element f de $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau)$. Un tal f és una aplicació lineal entre els espais V i $L(G, \psi)$ tal que

$$f \circ \Pi(g) = \tau(g) \circ f, \forall g \in G,$$

és a dir, $f : V \longrightarrow L(G, \psi)$ lineal tal que:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Pi(g)} & V \\ f\Big\downarrow & & f\Big\downarrow \\ L(G,\psi) & \xrightarrow{\tau(g)} & L(G,\psi). \end{array}$$

Un model de Whittaker és $W(\Pi, \psi) = f(V) \subset L(G, \psi)$, on $f \in Hom_G(\Pi, \tau)$.

Explícitament, $W(\Pi, \psi)$ és el conjunt de funcions $W_v : G \to \mathbb{C}$, $W_v \in L(G, \psi)$, per a $v \in V$, tals que

a) $W_v(xg) = \psi(x) W_v(g), \forall x \in X,\ g \in G$;

b) $\exists K \subset G$, subgrup compacte obert, tal que $f(gk) = f(g), \forall k \in K,\ g \in G$; i

c) $W_{\Pi(g)v}(g') = W_v(g'g), \forall g, g' \in G$.

1.4. Observació. Les propietats *a*) i *b*) són les que se satisfan per ser elements de $L(G, \psi)$, i *c*), per la commutativitat del diagrama. En alguns textos, la propietat *b*) es substitueix per funcions llises.

1.5. Propietats.

1) $W(\Pi, \psi)$ és únic com a conjunt de funcions.

2) L'aplicació

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow W(\Pi, \psi) \\ v &\longrightarrow W_v \end{aligned}$$

és un G-isomorfisme de grups.

1.6. Models de Whittaker globals. Sigui ara F un cos global. La noció de model de Whittaker global la podem donar com a conjunt de funcions. Suposo que també a partir de la representació induïda. La noció

de representació induïda global no l'hem estudiada. Almenys, per al cas $n=2$ (cf. [**La 79**, p. 203]),

$$\mathrm{Ind}(G,H,\Pi) = \otimes \mathrm{Ind}(G_v, H_v, \Pi_v).$$

Donarem la definició de model de Whittaker com a conjunt de funcions.

Sigui $\Pi : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$ una representació admissible, llisa i irreductible. Sigui $\psi_0 : \mathbb{A}/F \longrightarrow \mathbb{C}$ un caràcter no trivial i definim, com abans,

$$\begin{aligned} \psi : X_{\mathbb{A}}/X_F &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow \psi_0(x_1 + \cdots + x_{n-1}), \end{aligned}$$

on

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ddots & & x_{n-1} \\ & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.7. Definició. Un model de Whittaker per a (Π, V) respecte de ψ, que denotarem per $W(\Pi,\psi)$, és un conjunt de funcions llises: $W_u : G_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbb{C}$, per a $u \in V$, tals que

a) $W_u(xg) = \psi(x) W_u(g)$, $\forall x \in X_{\mathbb{A}},\ g \in G$;

b) $W_{\Pi(g)u}(g') = W_u(g'g)$, $\forall g, g' \in G$; i

c) Si K és un cos de nombres i v una valoració arquimediana, $\forall u \in V$, $\exists N \in \mathbb{R}$ tal que $W_u\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = O(|\, a \,|^N)$, si $a \to \infty$ en F_v^*.

La darrera condició és per a $n = 2$. Per a n més grans, no l'he trobada enlloc (cf. [**Ja-La 70**, p. 317]).

1.8. Propietats.

1) El model de Whittaker de Π (per a ψ fixat) $W(\Pi,\psi)$ és únic com a conjunt de funcions.

2) L'aplicació

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow W(\Pi,\psi) \\ v &\longrightarrow W_v \end{aligned}$$

és un G-isomorfisme de grups.

3) Si $\Pi = \otimes \Pi_v$, i Π_v és de dimensió infinita per a tota valoració v, llavors el model de Whittaker existeix. De fet, aquesta propietat només l'he vista escrita per a $n = 2$ (cf. [**Ja-La 70**, p. 317]).

4) Si $\Pi = \otimes \Pi_v$, llavors

$$W(\Pi, \psi) = \otimes W(\Pi_v, \psi_v).$$

1.9. Nota. Per fer aquest producte tensorial, tal com vam veure en el capítol 16, es necessitaven fixar unes funcions. Passo a explicitar les que són necessàries en aquest cas.

F_v és un subgrup de $\mathbb{A}$, per a v valoració, i $\psi_v = \psi \mid_{F_v}$ és no trivial. Per tant, si $W(\Pi, \psi)$ existeix, llavors $\forall v$, $W(\Pi_v, \psi_v)$ està definit. Aleshores, existeix una única funció $\varphi_v^0 \in W(\Pi_v, \psi_v)$, tal que $\varphi_v^0(g_v k_v) = \varphi_v^0(g_v)$ $\forall k_v \in K_v$ (K_v és el subgrup compacte estàndard maxinal de G_v). Llavors, $\varphi_v^0(k_v) = 1$, $\forall k_v \in K_v$.

Aleshores, Π actua en $\otimes_{\varphi_v^0} W(\Pi_v, \psi_v)$, i podem definir

$$\begin{aligned} \varphi : G_{\mathbb{A}} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longrightarrow \Pi_v \varphi_v(g_v), \end{aligned}$$

on $\varphi_v(g_v) = 1$ quasi per a tot v.

L'aplicació $\otimes \varphi_v \mapsto \varphi$ s'estén a una aplicació de $\otimes W(\Pi_v, \psi_v)$ en $W(\Pi, \psi)$, que és un isomorfisme (cf. [**Ja-La 70**, p. 318]).

§2. Teorema de multiplicitat 1

2.1. Teorema. *Sigui Π una representació irreductible, llisa, admissible de $G_{\mathbb{A}}$. Llavors, la multiplicitat de Π en l'espai de formes automorfes cuspidals és igual a 1 o a 0.*

2.2. Explicació de l'enunciat. Recordem que en el capítol 17 es van definir nocions diferents. Anem a recordar-les. Teníem la definició de funció llisa i també vam definir (cf. [**Bo-Ja 79**, p. 193 i s.]):

$$\mathcal{A}(\xi, J, K_\infty) = \{f : G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C} \mid f \text{ forma automorfa de tipus } (\xi, J, K_\infty)\},$$
$${}^0\mathcal{A}(\xi, J, K_\infty) = \{f \mid f \text{ és forma automorfa cuspidal}\};$$

on una forma automorfa cuspidal f és una forma automorfa que satisfà que

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} f(nx)dn = 0, \qquad \forall x \in G_{\mathbb{A}},$$

on N és el radical unipotent de qualsevol subgrup propi parabòlic P de G.

D'aquestes funcions automorfes cuspidals, teníem, associades a un caràcter, les de quadrat integrable. Sigui Z un tor del centre de G K-split maximal. Donat un caràcter

$$\chi : Z_{\mathbb{A}}/Z(F) \longrightarrow \mathbb{C},$$

considerem el conjunt ${}^0L^2_\chi$ de les formes automorfes cuspidals f tals que $f(zx) = \chi(z)f(x)$, $\forall z \in Z(\mathbb{A}), x \in G(\mathbb{A})$. Aquesta condició del caràcter, tal com ja vam veure en el capítol 17, implica que $|f|$ és de quadrat integrable mòdul $Z_{\mathbb{A}} \cdot G_F$.

Llavors, tenim una representació, dita la representació regular, de la manera següent:

$$\begin{aligned} R : G_{\mathbb{A}} &\to \mathbf{GL}({}^0L^2_\chi) \\ g \mapsto R_g : {}^0L^2_\chi &\to {}^0L^2_\chi \\ f \mapsto R_g(f) : G_{\mathbb{A}} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(xg). \end{aligned}$$

2.3. Teorema. *Aquesta representació descompon en suma directa de representacions irreductibles, cadascuna amb multiplicitat finita. (*[**Sh 74**, p. 187]*)*

Per tant, el teorema inicial ens diu que la multiplicitat de Π en aquesta representació R és 1 o 0.

2.4. Propietats del model de Whittaker, si V és un subespai de ${}^0L^2_\chi$. Sigui (Π, V) una representació admissible, llisa, irreductible de $G_{\mathbb{A}}$,

on V és un espai format per formes cuspidals de quadrat integrable; és a dir, $V \in {}^0L^2_\chi$. Recordem que teníem fixat un caràcter $\psi : X_{\mathbb{A}}/X_F \to \mathbb{C}$ (a partir d'un caràcter no trivial de $\mathbb{A}/F$).

2.5. Definició. Sigui $\varphi \in V$. Definim la funció $W_\varphi : G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$, per l'expressió

$$W_\varphi(g) = \int_{X_F \backslash X_{\mathbb{A}}} \varphi(xg)\psi^{-1}(x)dx.$$

2.6. Proposició. *El conjunt de funcions $\{W_\varphi \mid \varphi \in V\}$ és el model de Whittaker $W(\Pi, \psi)$ de (Π, V).*

2.7. Proposició. *Les funcions W_φ les podem mirar com una "transformada de Fourier" i ens determinen unívocament una forma cuspidal. De fet, podem recuperar φ a partir de W_φ. Explícitament:*

$n = 2$ *Siguin $\varphi \in V$ i $W_\varphi \in W(\Pi, \psi)$; llavors, podem recobrir φ pel seu model de Whittaker de la manera següent. Sigui $g \in G_{\mathbb{A}}$; llavors*

$$\varphi(g) = \sum_{x \in F^*} W_\varphi\left(\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) g\right).$$

([**Ja-La**, p. 354 i s.])

En particular, a partir de les funcions W_φ del model de Whittaker, determinem la forma cuspidal φ.

$n \geq 3$ *En aquest cas, hi ha fórmula de sumació semblant. Posem*

$$d[x] := \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & Id_{n-m} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{si } x \in \mathbf{GL}_{\mathbb{A}}(m), \qquad (1 \leq m \leq n).$$

En particular, si $x \in \mathbf{GL}_{\mathbb{A}}(n-1)$, $d[x] = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\varphi \in V$, tenim, llavors, que

$$\varphi(e) = \sum_{x \in X_F(n-1) \backslash \mathbf{GL}_{\mathbb{A}}(n-1)} W_\varphi(d[x]).$$

(Cf. [**Sh 74**. p. 188].*)*

Aquesta segona part es prova per inducció.

2.8. Pregunta. És veritat que

$$\varphi(g) = \sum_{x \in X_F(n-1)\backslash \mathbf{GL}_{\mathbb{A}}(n-1)} W_\varphi(d[x]g)?$$

DEMOSTRACIÓ (del teorema de multiplicitat 1). Suposem que Π és una component de R. Si no ho és, la multiplicitat és 0 i ja hem acabat.

Com que R descompon en suma directa de representacions irreductibles, podem escriure

$${}^0L^2_\chi = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r \cdots$$

i, llavors,

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\Pi, R) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, {}^0L^2_\chi) = \#\{i \mid V \cong B_i\}.$$

Volem veure que n'hi ha un de sol; és a dir, que existeix una única i tal que $V \cong B_i$. Per a cada isomorfisme $I_i : V \cong B_i$, podem considerar un conjunt de funcions $\{W_{\varphi^i_v} \mid \varphi^i_v = I_i(v), v \in V$, que és el model de Whittaker $W(\Pi, \psi)$. I, com hem vist a les propietats, aquestes funcions $W_{\varphi^i_v}$ ens determinen unívocament φ^i_v. Com que el model de Whittaker és únic com a conjunt de funcions, existeixen unes úniques $W_{\varphi^i_v}$. Per tant, només pot haver-hi un isomorfisme I_i. $\square$

§3. Teorema fort de multiplicitat 1

3.1. Enunciat Recordem que qualsevol representació Π llisa, irreductible i admissible de $G_{\mathbb{A}}$ es pot escriure com $\Pi = \otimes_v \Pi_v$, on cada Π_v és una representació irreductible, llisa i admissible de G_v.

3.2. Teorema. (Teorema fort de multiplicitat 1) *Siguin $\Pi_1 = \otimes_v \Pi_{1,v}$ i $\Pi_2 = \otimes_v \Pi_{2,v}$ dues representacions irreductibles. Sigui S un conjunt finit de valoracions que, si $n \geq 3$, conté només valoracions finites. Suposem que $\Pi_{1,v} \cong \Pi_{2,v} \quad \forall p \notin S$. Llavors, $\Pi_{1,v} \cong \Pi_{2,v}$, $\forall v$, i, per tant, $\Pi_1 = \Pi_2$.*

3.3. Observació. En la demostració d'aquest teorema es fan servir essencialment dos ingredients: el lema petit i les propietats del model de Whit-

taker que hem estudiat a la secció anterior. Aquestes propietats les teníem en el cas que Π fos una component de la representació regular. Per tant, encara que l'article no digui res, farem la demostració en aquest cas.

3.4. Lema. (Lema petit) *Sigui $n = 2$.*

a) Siguin F un cos local no arquimedià i (Π_1, V_1), (Π_2, V_2) dues representacions irreductibles i admissibles amb models de Whittaker. Llavors, existeixen $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ tals que

$$W_{v_1}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = W_{v_2}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \qquad \forall x \in F,$$

on $W_{v_i} \in W(\Pi_i, \psi)$.

b) Siguin $F = \mathbb{R}$ o bé $\mathbb{C}$, i (Π_1, V_1), (Π_2, V_2) dues representacions irreductibles i unitàries de dimensió infinita. Llavors, existeixen $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, vectors llisos, tals que

$$W_{v_1}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = W_{v_2}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \qquad \forall x \in F,$$

on $W_{v_i} \in W(\Pi_i, \psi)$.

3.5. Observació.

- Per a F cos local no arquimedià, a la demostració es fan servir les funcions de Schwartz-Bruhat. De fet, cada V_i conté totes les que tenen suport compacte.
- En el segon cas, la condició que les representacions siguin unitàries i de dimensió infinita deu ser per assegurar l'existència del model de Whittaker.
- Per a la demostració, en aquest segon cas, es fa servir el teorema de Kirillov.

3.6. Lema. (Gelfand-Kazhdan) *Sigui $n \geq 3$. Suposem que F és un cos local no arquimedià, i siguin (Π_1, V_1), (Π_2, V_2) dues representacions irreductibles i admissibles amb models de Whittaker. Llavors, existeixen $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ i $W_{v_i} \in W(\Pi_i, \psi)$ tals que*

$$W_{v_1}\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W_{v_2}\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall h \in \mathbf{GL}_F(n-1).$$

3.7. Observació.

- Per provar-ho s'ha de fer servir inducció i usar arguments semblants al cas $n = 2$.
- És possible provar un lema anàleg per al cas en què F és un cos arquimedià.

DEMOSTRACIÓ (Teorema fort de multiplicitat 1). Farem la demostració per al cas $n = 2$ en diferents passos.

1) Si provem que

$$\Pi_{1,v} \cong \Pi_{2,v}, \quad \forall v,$$

obtindrem que $\Pi_1 \cong \Pi_2$ i, pel teorema de multiplicitat 1 de la secció anterior, tindrem la igualtat $\Pi_1 = \Pi_2$, perquè cada representació només pot estar un cop a la representació regular. Per tant, n'hi ha prou amb provar l'isomorfisme per a totes les valoracions.

2) Com (Π_1, V_1) i (Π_2, V_2) són irreductibles, els únics subespais estables per a $G_{\mathbb{A}}$ són el total i el (0). Per tant, si trobem $\varphi \in V_1 \cap V_2, \quad \varphi \neq 0$, ja haurem acabat. Cerquem, doncs, una tal φ.

3) Sigui $B \in G$ el subgrup de matrius triangulars superiors. Llavors, $B_F \setminus B_{\mathbb{A}}$ és dens en $G_F \setminus G_{\mathbb{A}}$. Per tant, n'hi ha prou amb construir dues funcions no nul·les $\varphi_1 \in V_1$ i $\varphi_2 \in V_2$ que coincideixin en $B_{\mathbb{A}}$. És a dir, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \qquad \forall x \in B_{\mathbb{A}}$.

4) Per les propietats del model de Whittaker , i com que

$$\varphi(g) = \sum_{x \in F^*} W_\varphi\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right),$$

n'hi ha prou amb fer funcions de Whittaker W_1, W_2 tals que

$$W_1\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = W_2\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{A}.$$

5) Podem suposar que aquestes funcions són de la forma $W_i = \otimes_v W_{i,p}$. Com que, per hipòtesi, $\Pi_{1,v} \cong \Pi_{2,v}$ llevat d'un nombre finit de v, només hem de construir $W_{i,v}$ per a un nombre finit de v.

6) Fent ús del lema petit, per a cada F_v, $v \in S$, podem construir $W_{1,v}$, $W_{2,v}$ tals que $W_{1,v}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = W_{2,v}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\forall x \in \mathbb{A}$, i, en fer $W_i = \otimes_v W_{i,p}$, tenim la funció que volíem. $\square$

3.8. Observació. Per fer la demostració per a n més grans, només s'han d'adaptar al cas general els passos (4) i (6). La resta del raonament és el mateix.

Bibliografia

[**Bo-Ja 79**] Borel, A.; Jacquet, H.: Automorphic forms and automorphic representations, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **33** (1979), 189–202.

[**Ca 79**] Cartier, P.: Representations of p-adic groups: A survey, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **33** (1979), 111–155.

[**Ja-La 79**] Jacquet, H.; Langlands, R. P.: *Automorphic Forms on* $\mathbf{GL}(2)$, Lecture Notes in Mathematics, n. 114, 1970.

[**La 79**] Langlands, R. P.: On the notion of an automorphic representation, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **33** (1979), 203–207.

[**Pi-Sh 79**] Piatetski-Shapiro: Multiplicity one theorems, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **33** (1979), 209–212.

[**Sh 74**] Shalika,J.A.: The multiplicity one theorem for $\mathbf{GL}_n$, *Annals of Mathematics* **100** (1974), 171–193.

Capítol 19

Funcions L automorfes (I)

Francesc Bars Sessió 2a. del dia 19 de febrer de 1997

§1. Introducció i notació

Considerarem sempre F un cos global i $\mathbb{A}$ l'anell de les adeles de F, F_v el cos local amb la valoració v, $G_{\mathbb{A}}$, G_F, G_{F_v} o G_v denotaran $\mathbf{GL}(2)$ de les adeles, del cos F o del cos F_v respectivament, igualment denotarem el compacte maximal d'aquests $\mathbf{GL}(2)$ per K si correspon a G_F i per K_v en el cas $G_{F_v} = G_v$.

Considerem ψ un grossencaràcter i considerem $R^\psi(g)$ la representació unitària de $G_{\mathbb{A}}$ en $L^2(G_F \setminus G_{\mathbb{A}}, \psi)$ donada per translació per la dreta. Llavors, es tenia una descomposició en components irreductibles

$$R^\psi(g) = \oplus_j \pi^j \oplus \int \pi^s \, ds,$$

on recordem que una representació irreductible unitària de $G_{\mathbb{A}}$ s'anomenava forma automorfa si era equivalent a algun π^j o π^s, i dèiem que era forma cuspidal si era equivalent a algun π^j per a algun grossencaràcter ψ.

La finalitat d'aquesta exposició és introduir uns objectes, les funcions L, que ens permetran caracteritzar les formes cuspidals anteriors, és a dir

$$R_0^\psi(g) = \oplus_j \pi^j.$$

Per aconseguir l'anterior, caldrà explotar el resultat següent, explicitat en el capítol 17:

1.1. Teorema. *Tota representació π irreductible admissible unitària de $G_{\mathbb{A}}$ és factoritzable; és a dir*

$$\pi = \otimes \pi_v,$$

on π_v són representacions irreductibles admissibles unitàries de G_v; a més, les π_v són unívocament determinades per π.

1.2. Nota. El resultat anterior és vàlid per a representacions irreductibles admissibles no necesàriament unitàries, on, llavors, els π_v corresponents són representacions irreductibles admissibles.

Fer esment que per poder construir el producte $\otimes \pi_v$ s'ha de satisfer que, si

$$\pi_v : G_v \longrightarrow H_v,$$

llavors, per a quasi tota valoració v s'ha de satisfer que $\dim H_v^{K_v} \geq 1$; així, tenim:

1.3. Definició. Una representació π_v irreductible admissible de G_v, v no arquimedià, s'anomena de clase 1 o esfèrica si la seva restricció a K_v conté la representació identitat com a mínim un cop.

§2. Motivacions per a la definició de la funció L

Fem un petit repàs de com s'havien assignat funcions L en casos coneguts.

2.1. Teoria de Hecke per a $\mathbf{GL}(1, \mathbb{A})$. Si definim aquí que una representació irreductible unitària de $\mathbb{A}^* = \mathbf{GL}(1, \mathbb{A})$ és forma automorfa si passa en la descomposició natural de la representació $R(g)$ de $\mathbb{A}^*$ en $L^2(F^* \setminus \mathbb{A}^*)$, obtenim que les formes automorfes són els grossencaràcters de F, i teníem unes funcions L associades a un grossencaràcter; recordem un xic com s'associaven aquestes funcions. Considerem ψ grossencaràcter, on ψ_v són quasicaràcters de F_v, i on

$$\psi = \prod_v \psi_v,$$

amb ψ_v no ramificat per a quasi tot v. Sigui B_ψ el conjunt format per les

valoracions v tals que ψ_v és ramificat; llavors, si $v \notin B_\psi$, posem $\chi(v) = \psi_v(\omega_v)$, on ω_v denota el generador de l'ideal primer de $\mathcal{O}_{F_v}$, i on χ és definit en el grup dels F-ideals relativament primers amb B_ψ; (el caràcter χ és el caràcter de Hecke associat al grossencaràcter ψ); es definia la funció L per:

$$L(s,\xi) = \prod_{v \notin B_\psi} (1 - \frac{\chi(v)}{(N(v))^s})^{-1} = \prod_{v \notin B_\psi} (1 - \frac{\psi_v(\omega_v)}{|\omega_v|^{-s}})^{-1}.$$

2.2. Teorema. *$L(s,\chi)$ té continuació analítica com a funció meromorfa al plà complex. Si χ no és trivial, llavors $L(s,\chi)$ és entera; altrament, té un pol simple en $s = 1$ i n'és l'única singularitat.*

$L(s,\chi)$ satisfà una equació funcional del tipus següent:

hi ha una constant c i un factor gamma $\Gamma(s,\chi)$ que satisfan que

$$R(s,\chi) = s(s-1)c^s\Gamma(s,\chi)L(s,\chi)$$

és entera i es satisfà

$$R(1-s,\chi^{-1}) = \alpha(\chi)R(s,\chi),$$

on $\alpha(\chi)$ és una constant de mòdul 1.

Tate, en la seva tesi, va introduir unes funcions zeta i zeta locals que permetien demostrar el resultat anterior sense passar per la teoria de funcions theta. Aquestes funcions de Tate eren les següents, respectivament:

$$\zeta(f,\psi,s) = \int_{\mathbb{A}^*} f(\beta)\psi(\beta)|\beta|^s \, d^*\beta,$$

$$\zeta_v(f_v,\psi_v,s) = \int_{F_v^*} f_v(\beta_v)\psi_v(\beta_v)|\beta_v|_v^s \, d^*\beta_v,$$

on $|\beta| = \prod_v |\beta_v|_v$, $\psi = \prod \psi_v$, $f \in S(\mathbb{A})$, funcions de Schwartz-Bruhat, i on $f = \prod_v f_v$. Es comprova que, per a $Re(s) > 1$,

$$\zeta(f,\psi,s) = \prod_v \zeta_v(f_v,\psi_v,s),$$

i es té el resultat de Tate següent:

2.3. Teorema. *La funció $\zeta(f,\psi,s)$ té prolongació analítica al pla complex, i és una funció entera si ψ no és trivial, i una funció meromorfa amb pols en 0 i 1, sinó. A més, se satisfà l'equació funcional*

$$\zeta(f,\psi,s)=\zeta(\widehat{f},\psi^{-1},1-s),$$

on $(\widehat{f})$ és la transformada de Fourier de $f\in S(\mathbb{A})$.

Es demostra que hi ha una elecció dels f_v, on

$$\prod_{v\notin B_\psi}\zeta_v(f_v,\psi_v,s)=L(s,\chi)\prod_{v\notin B_\psi}\chi(\partial_v)^{-1}N(\partial_v)^{s-\frac{1}{2}},$$

on ∂_v denota la diferent de F_v.

"Això motiva," en la situació $\pi=\otimes_v\pi_v$, definir uns factors locals per a cada π_v, on el producte ens doni la funció L, definint aquests factors locals mitjançant unes funcions "zeta locals" sobre un espai de funcions convenients.

2.4. La funció L com a transformada de Mellin. Recordem que quan teníem una forma cuspidal clàssica $f\in S_k(N,\psi)$ (on aquí ψ denota un caràcter de Dirichlet), se li associava una funció L com la transformada de Mellin

$$L(s,f)=\int_0^\infty f(iy)y^s\frac{dy}{y}.$$

Recordem que a cada forma cuspidal clàssica li fèiem correspondre una funció de $G_{\mathbb{A}}$ mitjançant:

$$f\longmapsto\phi_f(g):=f(g_\infty(i))j(g_\infty,i)^{-k}\psi(k_0),$$

on $g=\gamma g_\infty k_0$, $g\in G_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}$ (definida en el capítol 14).

Mirem d'"adelitzar" la integral anterior. Considerem $\psi=1$ i $N=1$; llavors, es pot provar que $\phi_f(g)$ és $K_0=\prod_{p<\infty}K_p$-invariant dreta i es pot escriure la integral anterior com:

$$L(s,f)=\int_{\mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^*}\phi_f\left(\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix}\right)|y|^{s-\frac{1}{2}}\,d^*y.$$

Es poden construir funcions C^∞ K-finites en $G_{\mathbb{A}}$, anomenades W_{ϕ_f}, on

$$\phi_f\left(\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\sum_{\xi\in\mathbb{Q}^*}W_{\phi_f}\left(\begin{bmatrix}\xi y&0\\0&1\end{bmatrix}\right),$$

on, llavors, es té que

$$\begin{aligned} L(s,f) &= \int_{\mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^*} \sum_{\xi\in\mathbb{Q}^*} W_{\phi_f}\left(\begin{bmatrix} \xi y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) |y|^{s-\frac{1}{2}}\, d^*y \\ &= \int_{\mathbb{A}^*} W_{\phi_f}\left(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) |y|^{s-\frac{1}{2}} d^*y. \end{aligned}$$

És a dir, la funció L de les formes cuspidals clàssiques es pot pensar com una transformada de Mellin adèlica d'una certa funció especial. Per veure la construcció més explicita de la funció W_{ϕ_f}, podeu consultar [**Ge75**, cap. 3, p. 106].

2.5. Suggeriment. La teoria de Hecke per al cas de $\mathbf{GL}(1)$ ens motiva a definir uns factors locals per a les representacions π_v, on el seu producte definirà una funció L que tingui propietats bones (prolongació analítica, equació funcional, ...), però la dificultat radica en com triar les funcions L locals i com aquestes donin en el cas global una funció que pugui ser com una transformada adèlica d'un cert tipus de funcions sobre $G_{\mathbb{A}}$. Vers aquest camí anem primer a fer un repàs de com eren π_v, representacions irreductibles admissibles, per assignar-les-hi després uns factors locals.

§3. Representacions irreductibles admissibles

En aquesta secció i en endavant ens centrarem en representacions irreductibles admissibles de dimensió infinita; el perquè d'aquesta reducció s'explicarà en l'inici de la cinquena secció.

3.1. Cas v valoració no arquimediana. Recordem que si μ_1, μ_2 són dos quasicaràcters de F_v^*, i si $\mathcal{H}(\mu_1,\mu_2)$ és l'espai de funcions localment constants ϕ en G_v que satisfan

$$\phi\left(\begin{pmatrix} t_1 & * \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(t_1)\mu_2(t_2)\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{1/2} \phi(g),$$

per a tot $t_1, t_2 \in F_v^*$, llavors el grup G_v actua en $\mathcal{H}(\mu_1,\mu_2)$ per translació per la dreta, i la representació resultant l'anomenàvem representació de sèrie principal, es denota per $\rho(\mu_1,\mu_2)$, i és admissible.

3.2. Teorema. *La representació $\rho(\mu_1, \mu_2)$ és irreductible, excepte quan $\mu(x) = \mu_1\mu_2^{-1}(x) = |x|$ o $|x|^{-1}$. Si $\mu(x) = |x|^{-1}$, llavors $\rho(\mu_1, \mu_2)$ conté un subespai 1-dimensional i la representació induïda en l'espai del factor resultant és irreductible. Si $\mu(x) = |x|$, llavors $\rho(\mu_1, \mu_2)$ conté un subespai irreductible de codimensió 1.*

3.3. Nota. Les representacions irreductibles $\rho(\mu_1, \mu_2)$ són denotades per $\pi_v(\mu_1, \mu_2)$, i s'anomenen representacions de sèrie principal; les representacions irreductibles de dimensió infinita que s'obtenen de representacions $\rho(\mu_1, \mu_2)$ quan aquestes són reductibles s'anomenen representacions especials i també les denotem per $\pi_v(\mu_1, \mu_2)$. Com són totes les representacions irreductibles admissibles? Això ho soluciona el resultat següent:

3.4. Teorema. *Sigui π_v una representació irreductible admissible de G_v. Si π_v no és supercuspidal, és una subrepresentació d'algun $\rho(\mu_1, \mu_2)$. Per altra banda, si π_v és supercuspidal, llavors no és equivalent a cap subquocient de $\rho(\mu_1, \mu_2)$.*

A nosaltres, però, per poder construir el producte $\pi = \otimes_v \pi_v$, ens interesa que, per a quasi tota v, π_v sigui de classe 1; anem a caracteritzar-ho:

3.5. Teorema. *Una representació irreductible admissible de dimensió no finita π_v de G_v és de classe 1 o esfèrica si, i nomes si, $\pi_v = \pi_v(\mu_1, \mu_2)$, per a algun parell de caràcters no ramificats de F_v^* i π_v no sigui una representació especial. A més, en aquest cas, la representació identitat és continguda exactament un cop en π_v. Més encara, si denotem per $\phi_1(g)$ qualsevol funció en l'espai dels vectors K_v-invariants en $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$ (que és 1-dimensional per l'afirmació anterior), i per T_{ω_v} l'operador de Hecke corresponent a la convolució sobre G_v amb la funció característica del doble conjunt $K_v\left(\begin{bmatrix} \omega_v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)K_v$, llavors s'obté que $\phi_1(g)$ és un vector propi de l'operador de Hecke, i*

$$\phi_1 * T_{\omega_v}(g) = \int_{G_v} \phi_1(gy^{-1})T_{\omega_v}(y)dy = q^{1/2}(q^{s_1} + q^{s_2})\phi_1(g),$$

si $\mu_i(x) = |x|^{s_i}$ (on ω_v generador de l'ideal de $\mathcal{O}_v$ i $q^{-1} = |\omega_v|$).

El resultat anterior ens diu que les representacions de classe 1 tenen un subespai 1-dimensional molt especial d'allà on es representa el grup. Què succeeix amb les que no són de classe 1?

3.6. Teorema. *Sigui π_v una representació irreductible admissible de dimensió no finita de G_v amb caràcter central ψ. Llavors, hi ha un ideal més gran posible $c(\pi_v)$ de $\mathcal{O}_v$, on l'espai de vectors u que satisfan*

$$\pi_v\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) u = \psi(a)u,$$

per a tota matriu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(c(\pi_v)) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K_v : c \equiv 0 \pmod{c(\pi_v)}\right\} =: K_v^{c(\pi_v)},$$

és un espai 1-dimensional; $c(\pi_v)$ s'anomena el conductor de π_v.

Taula de conductors.

Representació	Conductor
π_v, de classe 1	$\mathcal{O}_v$
$\pi_v = \pi_v(\mu_1, \mu_2)$, sèrie principal	$(\operatorname{cond}\mu_1) \cdot (\operatorname{cond}\mu_2)$
$\pi_v = \pi_v(\mu_1, \mu_2)$, repr. especial	$(\operatorname{cond}\mu_1)^2$, si $\mu = \mu_1\mu_2^{-1}$ no ramificat
$\pi_v = \pi_v(\mu_1, \mu_2)$, repr. especial	$\omega_v\mathcal{O}_v$, si μ ramificat
π_v, supercuspidal	$\omega_v^N\mathcal{O}_v$, N enter ≥ 2

També podem caracteritzar les representacions admissibles unitàries:

3.7. Teorema. *Les representacions irreductibles admissibles unitàries de G_v són:*

a) Les representacions supercuspidals amb caràcter central unitari.

b) La representació sèrie principal $\pi_v(\mu_1, \mu_2)$, amb μ_1, μ_2 unitàries.

c) La representació sèrie principal amb $\mu_2(x) = \overline{\mu_1}^{-1}(x)$ i $\mu(x) = |x|^\iota$, $0 < \iota < 1$.

d) La representació especial amb caràcter central unitari.

3.8. Cas v valoració arquimediana

Cas $G_{\mathbb{R}}$: Igual com en el cas no arquimedià, denotem per $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$ l'espai de funcions en $G_{\mathbb{R}}$ que són $K_{\mathbb{R}}$-finites i que satisfan la mateixa propietat que en el cas no arquimedià; és a dir:

$$\phi\left(\begin{bmatrix} t_1 & * \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} g\right) = \mu_1(t_1)\mu_2(t_2)\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{1/2}\phi(g),$$

per a tot $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^*$. Vam veure que tenim una representació $\rho(\mu_1, \mu_2)$ de l'àlgebra de Hecke de $G_{\mathbb{R}}$ denotada per $\mathcal{H}(G_{\mathbb{R}})$ en $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$.

3.9. Teorema. (D'irreductibilitat de $\rho(\mu_1, \mu_2)$)

a) Si $\mu_1\mu_2^{-1}$ no és de la forma $t \longmapsto t^n \operatorname{sgn}(t)$, n enter no nul, llavors $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$ és irreductible sota l'acció de $\mathcal{H}(G_{\mathbb{R}})$.

b) Si $\mu_1\mu_2^{-1} = t^n \operatorname{sgn}(t)$, amb n positiu, llavors $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$ conté exactament un subespai invariant $\mathcal{H}^s$, on $\mathcal{H}^f = \mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)/\mathcal{H}^s$ és de dimensió finita.

c) Si $\mu_1\mu_2^{-1} = t^n \operatorname{sgn}(t)$, amb n negatiu, llavors l'únic subespai invariant de $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$ és un subespai de dimensió finita que denotarem també per $\mathcal{H}^f$.

La representació $\rho(\mu_1, \mu_2)$ es denota per $\pi_{\mathbb{R}}(\mu_1, \mu_2)$ si és irreductible, i, en cas de no ser-ho, es denota igual la representació irreductible en la part finita; en canvi la representació que s'indueix en el subespai (o quocient) $\mathcal{H}^s$ la denotarem per $\sigma_{\mathbb{R}}(\mu_1, \mu_2)$ i es pot veure com un membre de la sèrie discreta de $G_{\mathbb{R}}$. Les representacions $\pi_{\mathbb{R}}(\mu_1, \mu_2)$ són les anomenades sèries principals de $G_{\mathbb{R}}$.

3.10. Teorema. *Tota representació irreductible admissible de $\mathcal{H}(G_{\mathbb{R}})$ és o bé $\pi_{\mathbb{R}}(\mu_1, \mu_2)$ o $\sigma_{\mathbb{R}}(\mu_1, \mu_2)$.*

3.11. Nota. Quant a notació, $\sigma_{\mathbb{R}}(\mu_1, \mu_2) = \pi_{\mathbb{R}}(n, t)$, on $n = s_1 - s_2$ i $t = s_1 + s_2$ si $\mu_i(t) = |t|^{s_i}(\operatorname{sgn}(t))^{m_i}$. Per a una justificació per a aquesta notació, consulteu [**Ge75**, p. 57-59].

Cas $G_{\mathbb{C}}$: Aquí també s'obté que tota representació irreductible admissible de l'àlgebra de Lie de $G_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{H}(G_{\mathbb{C}})$, és un subquocient d'algun $\rho(\mu_1, \mu_2)$, on ara

μ_1, μ_2 són quasicaràcters de $\mathbb{C}^*$; però aquí, a diferència del cas real, és que tot subquocient de $\rho(\mu_1, \mu_2)$ és equivalent a una representació irreductible $\rho(\mu_1', \mu_2')$, per a uns quasicaràcters apropiats μ_1' i μ_2'. Per tant, no hi ha sèrie discreta.

§4. Teoria de Jacquet-Langlands

Anem a assignar a cada representació π_v irreductible admissible de dimensió no finita, v una valoració de F, uns factors locals L i ε seguint la idea de Tate per al cas de $\mathbf{GL}(1)$.

Fixem en tota aquesta secció un caràcter additiu τ de $F \backslash \mathbb{A}$ i suposem que $\tau(x) = \prod_v \tau_v(x_v)$, per a $x = (x_v)$ en $\mathbb{A}$.

Recordem que en les representacions anteriors sempre existia un únic model de Whittaker local.

4.1. Definició. Siguin π_v una representació irreductible admissible de G_v i $W(\pi_v)$ de l'espai de Whittaker. Suposem ξ_v caràcter unitari de F_v^*, $g \in G_v$, $W_v \in W(\pi_v)$ i $s \in \mathbb{C}$; definim la funció zeta local per:

$$\zeta_v(g, \xi_v, W_v, s) = \int_{F_v^*} W_v\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g\right) \xi(a)|a|^{s-\frac{1}{2}} d^*a.$$

4.2. Teorema.

a) La integral que defineix $\zeta_v(g, \xi_v, W_v, s)$ convergeix per a s amb $|Re(s)|$ suficientment gran.

b) Hi ha un únic factor d'Euler llevat de constants, $L(s, \xi_v \otimes \pi_v)$, amb la propietat que

$$\frac{\zeta_v(g, \xi_v, W_v, s)}{L(s, \xi_v \otimes \pi_v)}$$

és una funció entera de s, $\forall g, \xi_v$, i W_v; que satisfà que:

$$\zeta_v(1, \xi_v, W_v^0, s) = L(s, \xi_v \otimes \pi_v),$$

per a un element apropiat W_v^0 de $W_v(\pi_v)$.

c) La funció $\zeta_v(g, \xi_v, W_v, s)$ té continuació analítica en tot el pla complex i satisfà l'equació funcional:

$$\frac{\zeta_v(g, \xi_v, W_v, s)}{L(s, \xi_v \otimes \pi_v)} \varepsilon(\pi_v, \xi_v, s) = \frac{\zeta_v(wg, \xi_v^{-1}\psi_v^{-1}, W_v, 1-s)}{L(1-s, \psi_v^{-1}\xi_v^{-1} \otimes \pi_v)},$$

on $\varepsilon(\pi_v, \xi_v, s)$ és independent de g i W_v, ψ_v és el caràcter central de π_v, i $w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.3. Notes. 1) En el cas v no arquimedià, és clar que $W_v \in W(\pi_v)$; llavors,

$$W_v \otimes \eta_v \in W(\pi_v \otimes \eta_v),$$

on η_v és un quasicaràcter de F_v.

2) Fent $\xi_v = 1$ en el teorema anterior, s'obtenen les definicions dels factors L i ε donades en [**Ja-La 70**, p. 75, 195 i 237]. En aquest cas, posem

$$\varepsilon(\pi_v \otimes \eta_v, s) := \varepsilon(\pi_v \otimes \eta_v, 1, s),$$

on η_v quasicaràcter de F_v, i es suposa que els factors L coincideixen.

3) El factor L local no depèn del caràcter additiu fixat al començament d'aquesta secció. En canvi, el factor ε sí; sigui $\tau_v'(x) = \tau_v(bx)$, $b \in F_v^*$; llavors, s'obté

$$\varepsilon_{\tau_v'}(\pi_v, s) = \psi_v(b)|b|^{2s-1}\varepsilon_{\tau_v}(\pi_v, s),$$

on ψ_v és el caràcter central de π_v.

4) La teoria de Tate afirma que hi ha un factor d'Euler $L(s, \eta_v)$ que, en la notació del capítol anterior, satisfà que

$$\frac{\zeta_v(f_v, \eta_v, s)}{L(s, \eta_v)}$$

és entera per a tota $f \in S(F_v)$ i

$$\frac{\zeta_v(f_v, \eta_v, s)}{L(s, \eta_v)} \varepsilon(\eta_v, s) = \frac{\zeta(f_v, \widetilde{\eta_v}, 1-s)}{L(1-s, \widetilde{\eta_v})},$$

per a alguna funció (exponencial) $\varepsilon(\eta_v, s)$, que és independent de s.

Un càlcul demostra que

$$L(s,\eta_v) = \frac{1}{1-\eta_v(\omega_v)q^{-s}}, \qquad \text{si } \eta_v \text{ és no ramificat,}$$

i $L(s,\eta_v) = 1$, altrament (v no arquimediana). En tots els casos, $L(s,\eta_v) = \zeta_v(f_v,\eta_v,s)$ per a una elecció apropiada dels f_v. És a dir, hi ha una analogia entre els casos $\mathbf{GL}(1,\mathbb{A})$ i $G_{\mathbb{A}}$. Notem que per al cas $\mathbf{GL}(1,\mathbb{A})$, els factors $\varepsilon(\eta_v,s) = 1$, si η_v és no ramificat, i $\varepsilon(\eta_v,s) = (\textit{arrel unitat})q^{\mathrm{cond}(\eta_v)(\frac{1}{2}-s)}$.

5) Les funcions especials de l'espai de Whittaker $W_v^0(g)$ del teorema són les funcions que ens permetran pensar la funció L global com una transformada de Mellin adèlica; és a dir, sempre que allò que s'escrigui tingui sentit, l'anterior ens diu que si denotem per

$$W^0(g) = \prod_v W_v^0(g_v),$$

se satisfà que

$$\prod_v L(s,\pi_v) = \int_{\mathbb{A}^*} W^0\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g\right) |x|^{s-\frac{1}{2}}\, d^*x.$$

La pregunta natural és: com aquests factors ens poden caracteritzar les representacions?

4.4. Teorema. *Siguin $\pi_{v,1}$ i $\pi_{v,2}$ dues representacions irreductibles admissibles de G_v amb el mateix caràcter central. Llavors, $\pi_{v,1}$ i $\pi_{v,2}$ són equivalents si, i només si,*

$$\varepsilon(\xi_v \otimes \pi_{v,1}, s)\frac{L(1-s,\xi_v^{-1}\otimes\widetilde{\pi_{v,1}})}{L(s,\xi_v\otimes\pi_{v,1})} = \varepsilon(\xi_v \otimes \pi_{v,2}, s)\frac{L(1-s,\xi_v^{-1}\otimes\widetilde{\pi_{v,2}})}{L(s,\xi_v\otimes\pi_{v,2})}$$

per a tot quasicaràcter ξ_v de F_v^*.

Descrivim els factors ε i L en el cas de representacions irreductibles admissibles de dimensió no finita.

4.5. Teorema. (Cas v no arquimedià)

π_v	$L(s,\pi_v)$	$\varepsilon(s,\pi_v)$
$\pi_v(\mu_1,\mu_2)$ (sèrie principal)	$L(s,\mu_1)L(s,\mu_2)$	$\varepsilon(s,\mu_1)\varepsilon(s,\mu_2)$ (= 1, si μ_1 i μ_2 són no ramificats)
$\pi_v(\mu_1,\mu_2)$ (repres. especial)	$L(s,\mu_1)$	$\varepsilon(s,\mu_1)\varepsilon(s,\mu_2)E(\mu_1,\mu_2,s)$
π_v supercuspidal	1	cf. [**Ja-La 70**]

on els factors L i ε són en la notació de la nota **4.3**, *quarta consideració, i*

$$E(\mu_1,\mu_2,s)=\begin{cases}1, & \textit{si } \mu_1 \textit{ ramificat}\\ -\mu_2(\omega_v)q^{-s}, & \textit{altrament.}\end{cases}$$

4.6. Teorema. (Cas v real)

$\pi_{\mathbb{R}}$	$L(s,\pi_{\mathbb{R}})$	$\varepsilon(s,\pi_{\mathbb{R}})$
$\pi_{\mathbb{R}}(\mu_1,\mu_2)$ (sèrie principal)	$L(s,\mu_1)L(s,\mu_2)$	$\varepsilon(s,\mu_1)\varepsilon(s,\mu_2)$
$\pi_{\mathbb{R}}=\sigma_{\mathbb{R}}(n,t)$ (sèrie discreta en $\pi_v(\mu_1,\mu_2)$	$(2\pi)^{-s-\frac{t+n}{2}}\Gamma(s+\frac{t+p}{2})$	cf. [**Ja-La 70**]

on

$$L(s,\mu_j)=\pi^{-\frac{s+r_j+m_j}{2}}\Gamma\left(\frac{s+r_j+m_j}{2}\right)$$

i $\varepsilon(s,\mu_j)=i$, *si* $\mu_j(x)=|x|^{r_j}\operatorname{sgn}(x)^{m_j}$.

Hi ha un resultat que ens diu com són les funcions especials del model de Whittaker local que ens donen el factor local L.

4.7. Proposició. (Descripció de $W_v^0(g_v)$)

Cas arquimedià $F_v=\mathbb{R}$.

Si π_v és de la sèrie principal de G_v, llavors $W_v^0(g)$ és l'única funció $O(2)$-invariant en $W(\pi_v)$.

Si π_v és equivalent a una serie discreta $\sigma_{\mathbb{R}}(p,t)$, llavors és la funció en $W(\pi_v)$ que satisfà que

$$\rho(\mu_1,\mu_2)\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) W_v^0 = i(p+1)W_v^0.$$

Cas no arquimedià.

Si π_v és de classe 1, llavors $W(\pi_v)$ conté exactament una funció K_v-invariant (1-dimensional) $W_v^0(g)$, que satisfà que $W_v^0(e)=1$.

Si π_v no és de classe 1, llavors $W_v^0(g)$ és igual a la funció en $W(\pi_v)$ que és $K_v^{c(\pi_v)}$ (1-dimensional) invariant per la dreta.

§5. Funció L i un petit càlcul

Sigui π una representació irreductible admissible unitària de $G_{\mathbb{A}}$; tenim, llavors, que

$$\pi = \otimes_v \pi_v,$$

on π_v representació irreductible admissible de classe 1, per a quasi tots els v. Suposem que els π_v són de dimensió no finita; llavors, cadascun té associat un únic model de Whittaker local $W(\pi_v)$ i l'espai de funcions de $G_{\mathbb{A}}$ generat per les funcions de la forma

$$W(g) = \prod_v W_v(g_v),$$

on $W_v = W_v^0$ per a quasi tota v, dóna un model de Whittaker global (únic) $W(\pi)$ per a π; en particular, l'acció de l'algebra de Hecke de $G_{\mathbb{A}}$, $\mathcal{H}(G_{\mathbb{A}})$ en $W(\pi)$ donada per convolució per la dreta és equivalent a π.

5.1. Nota. Si $\pi = \otimes_v \pi_v$, representació irreductible admissible, té espai de Whittaker global si, i només si, cada π_v és de dimensió no finita [**Ja-La 70**, prop. 9.2, 9.3].

Ja s'ha comentat en la introducció que interessa poder caracteritzar d'alguna manera R_0^{ψ}. Recordem que en el capítol anterior s'ha demostrat

que tota constituent irreductible de R_0^ψ té multiplicitat 1; a més, en la demostració de [**Ge75**, p. 84], es demostra que a la representació π se li associa un model de Whittaker global; per tant, amb la nota anterior, tenim que les representacions que ens interessa prioritàriament d'estudiar són representacions irreductibles admissibles unitàries $\pi = \otimes_v \pi_v$, on tots els π_v són de dimensió no finita, que són les representacions en què em centro.

5.2. Definició. Sigui η un grossencaràcter de F, on $\eta = \prod_v \eta_v$. Definim

$$\varepsilon_\tau(\pi \otimes \eta, s) := \prod_v \varepsilon_{\tau_v}(\pi_v \otimes \eta_v, s);$$

com que, per a quasi tot v, π_v és de classe 1, llavors $\varepsilon_{\tau_v}(\pi_v, s) = 1$; el producte anterior sempre té sentit (recordem que τ denota un caràcter additiu de $F \setminus \mathbb{A}$). Definim finalment la funció L global per

$$L(s, \eta \otimes \pi) = \prod_v L(s, \eta_v \otimes \pi_v).$$

5.3. Nota. La definició anterior és vàlida per a representacions irreductibles admissibles amb model global de Whittaker. No obstant, quan no hi ha model global de Whittaker, per al cas de $\mathbf{GL}(2)$ s'arriven a definir uns factors locals; on llavors la definició anterior seria general. Per aprofundir-hi, podeu consultar [**Ja-La70**, primer capítol].

5.4. Nota. En el llibre de Gelbart es considera implícitament que $\varepsilon_\tau(\pi \otimes \eta, s) = \prod_v \varepsilon_{\tau_v}(\pi_v, \eta_v, s)$, on $\varepsilon_{\tau_v}(\pi_v, \eta_v, s)$ definides com en el teorema **4.2** i suposarem que coincideixen.

5.5. Nota. Com afecta τ a $\varepsilon_\tau(\pi, s)$?

Fixem-nos que si denotem per $\tau'(x) = \tau(bx)$, $b \in F^*$, llavors, hem vist que per a cada v teníem

$$\varepsilon_{\tau'_v}(\pi_v, s,) = \psi_v(b)|b|_v^{2s-1}\varepsilon_{\tau_v}(\pi_v, s),$$

on ψ és el caràcter central de la representació π; observem, però, que

$$\prod_v \psi_v(b)|b|_v^{2s-1} = 1.$$

Anem a enunciar finalment el resultat principal d'aquest capítol, que és: com caracteritzar les representacions de R_0^ψ mitjançant les funcions L?

5.6. Lema. *Si π és una representació irreductible admissible unitària amb espai de Whittaker global, llavors la funció L global convergeix per a $\Re(s)$ suficientment gran.*

5.7. Teorema. (Caracterització de R_0^ψ) *Suposem que $\pi = \otimes_v \pi_v$ és una representació irreductible unitària admissible de $G_{\mathbb{A}}$ de caràcter central ψ. Llavors π és a R_0^ψ si, i només si, $L(s, \eta \otimes \pi)$ satisfà les propietats següents per a tot grossencaràcter η de F:*

$L(s, \eta \otimes \pi)$ s'estén a una funció entera acotada en les franges verticals;

$L(s, \eta \otimes \pi)$ satisfà l'equació funcional

$$L(s, \eta \otimes \pi) = \varepsilon(\pi \otimes \eta, s) L(1 - s, \eta^{-1} \otimes \widetilde{\pi}).$$

Finalment hem definit unes funcions L; podem fer-ne algun càlcul?.

El problema radica en com poder dir com són les representacions π_v, i en el cas de formes cuspidals clàssiques, Gelbart diu que no hi ha una "recepta" per poder dir com són; no obstant, hi ha un cas particular que sí.

5.8. Teorema. *Sigui $N = \prod_i p_i$ un producte de primers diferents. Sigui $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ una forma nova tal que $T(p)f = a_p f$, $\forall p$; llavors*

$$\pi_f = \otimes_p \pi_p$$

es pot descriure de la manera següent:

a) π_∞ és la representació de la sèrie discreta $\pi_{\mathbb{R}}(n, t)$ amb $n = k - 1$ i $t = 0$.

b) Si $(p, N) = 1$, π_p és de classe 1, es té que $\pi_p = \pi_p(\mu_1, \mu_2)$, on $\mu_1 \mu_2$ és trivial i $a_p = p^{\frac{k-1}{2}}(p^{s_1} + p^{s_2})$ si $\mu_i(t) = |t|^{s_i}$.

c) Si $p = p_i$, π_p és la representació especial de G_p amb caràcter central trivial.

5.9. Nota. Per a una prova del resultat anterior, consulteu [**Ge75**, cap. 5], on és la determinació anterior; és gràcies a saber com actuen l'operador

de Casimir i l'operador de Hecke i de conèixer la taula dels conductors de les representacions admissibles.

Fem un càlcul de funció L. Suposem ara que $f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ és vector propi dels operadors de Hecke $T(p)$ amb valors $a_p = p^{\frac{k-1}{2}}(p^{s_1}+p^{-s_1})$. Calculem-hi la funció $L(s,\pi_f) = \prod_{p\leq\infty} L(s,\pi_p)$. Tenim que

$$L(s,\pi_f) = (2\pi)^{-s-(\frac{k-1}{2})}\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right)\prod_{p<\infty}(1-p^{-s_1}p^{-s})^{-1}(1-p^{s_1}p^{-s})^{-1};$$

és a dir,

$$L(s,\pi_f) = (2\pi)^{-s-(\frac{k-1}{2})}\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right)\prod_{p<\infty}(1-a_p p^{-s-\frac{k-1}{2}}+p^{-2s})^{-1},$$

i observem que aquesta funció L coincideix amb la funció L de Hecke

$$L(s,\pi_f) = L(s',f) = (2\pi)^{-s'}\Gamma(s')D(s',f),$$

amb $s' = s + \dfrac{k-1}{2}$.

§6. El resultat $L(s,\pi_f) = L(s',f)$

Recordem que a una forma $f \in S_k(N,\psi)$ valor propi dels operadors de Hecke T_p per a tot primer p amb $(p,N)=1$, li definiem la representació de $G_{\mathbb{A}}$ donada per traslladats de $\phi_f(g)$. Per un resultat explicitat en el capítol 17, tenim que aquesta representació és irreductible. Si a mes és una forma nova segons Gelbart ($\psi = 1$) s'obté:

$$L(s,\pi_f) = \zeta(1,W,1,s) = \int_{\mathbb{A}^*} W\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)|x|^{s-\frac{1}{2}}d^*x,$$

per a una elecció concreta de l'espai de Whittaker, i com que $W_v^0(g)$ és K_0-invariant sota $\mathbf{SO}(2)$, es té, llavors, que

$$L(s,\pi_f) = \int_{\mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^*} \phi_f\left(\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)|y|^{s-\frac{1}{2}}d^*y,$$

d'on s'obté que

$$L(s,\pi_f) = \int_0^\infty f(iy)y^{s+\frac{k-1}{2}-1}dy = L(f,s').$$

6.1. Teorema. *Sigui $f \in S_k(\Gamma_0(N))^{new}$ valor propi de tots els operadors de Hecke; llavors, tenim que $L(\pi_f, s) = L(f, s')$, amb $s' = s + \dfrac{k-1}{2}$.*

La pregunta següent és si la mateixa resposta anterior és vàlida per a la part vella. Plasmem el que diu el llibre **[Ge 75]**. Ens enuncia el resultat següent:

6.2. Proposició. *Sigui $f \in S_k(\Gamma_0(N))$; llavors, es té que*

$$L(s,\pi_f) = L(s',f) \text{ (llevat d'una constant)} \iff f \in S_k(\Gamma_0(N))^{new},$$

on $s' = s + \dfrac{k-1}{2}$.

En **[Ge 75]**, ens fa la prova següent:

DEMOSTRACIÓ. Podem pensar f valor propi dels operadors de Hecke T_p amb $(p,N) = 1$. Si f és nova, pels arguments anteriors tenim que hi ha igualtat. Per altra banda, si f no és nova es té, llavors, que $f(z) = h(dz)$, amb h nova; tenim, llavors, que

$$L(s,\pi_f) = L(s,\pi_h) = L(s',h),$$

d'on, com que $L(s',h) \neq L(s',f)$, obtenim el resultat. □

Fem alguna consideració de la prova anterior.

6.3. Nota. El fet de considerar que la forma és valor propi dels operadors de Hecke coprimers amb el conductor N és perquè les representacions són irreductibles (resultat explicitat en el capítol 17).

Cal fer notar, via la demostració, que si en la demostració anterior posem $d = 1$, la funció $L(s,h) = L(s,f)$ i, per tant, un millor enunciat de la proposició anterior seria

6.4. Teorema. *Sigui $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ valor propi dels operadors de Hecke T_p amb $(p,N) = 1$; llavors es té que*

$$L(s,\pi_f) = L(s',f) \iff f \in S_k(\Gamma_0(M))^{new}$$

amb $M|N$.

Bibliografia

[**De 72**] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations de $\mathbf{GL}(2)$, en el llibre *Modular Functions of One Variable II*, LNM, n. 139, Springer, 1972.

[**Ge 75**] Gelbart, S. S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Princeton University Press, 1975.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic Forms on* $\mathbf{GL}(2)$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

Capítol 20

Funcions L automorfes (II)

Jaume Coll Sessió 1a. del dia 26 de febrer de 1997

L'objectiu és estudiar funcions L associades a representacions irreductibles admisibles automorfes π d'un grup reductiu G definit sobre un cos global k.

Gràcies a la descomposició $\pi = \otimes_v \pi_v$, on π_v és una representació irreductible admissible de $G(k_v)$, definirem la funció L associada a π com el producte d'Euler dels factors locals associats a π_v. Per poder definir aquests últims necessitem el concepte de L-grup de G (^LG.)

La funció L, l'associarem a π i a una representació de dimensió finita r de ^LG.

§1. L-grups

Existeix una bijecció canónica Ψ entre classes de isomorfismes de $\overline{k}$-grups reductius connexos i classes de isomorfisme de sistemes d'arrels:

$\Psi(G) = (X^*(T), \varphi, X_*(T), \varphi^*)$, on T és un tor maximal de G, $X^*(T)$ és el grup de caràcters de T, φ és el conjunt d'arrels de G respecte T.

L'elecció de un subgrup de Borel $B \supset T$ és equivalent a la tria d'una base Δ de $\varphi(B,T)$. També existeix una bijecció Ψ_0 entre classes de tripletes (G,B,T) i classes d'isomorfismes de dades d'arrels base $\Psi_0(G) = (X^*(T), \Delta, X_*(T), \Delta^*)$.

1.1. Definició. El sistema invers a la dada d'arrels base

$$\Psi_0(G) = (M, \Delta, M^*, \Delta^*)$$

és $\Psi_0^\vee = (M^*, \Delta^*, M, \Delta)$. Al $\overline{k}$-grup G li associem, mitjançant la bijecció Ψ_0, el grup ${}^LG^0$ tal que $\Psi_0({}^LG^0) = \Psi_0(G)^\vee$. Escrivim ${}^LT^0, {}^LB^0$ per al tor maximal i per al subgrup de borel definit per $\Psi_0^\vee$.

1.2. Exemple. Si $G = \mathbf{GL}_n$, aleshores ${}^LG^0 = \mathbf{GL}_n$.

Si $f : G \longrightarrow G'$ és un k-morfisme amb imatge normal, aleshores f indueix aplicacions $\Psi(f) : \Psi(G) \longrightarrow \Psi(G')$, $\Psi_0(f) : \Psi_0(G) \longrightarrow \Psi_0(G')$, i $\Psi_0^\vee(f) : \Psi_0({}^LG'^0) \longrightarrow \Psi_0({}^LG^0)$.

Donat $\sigma \in \mathrm{Gal}(k_s \mid k)$, existeix $g \in G(k_s)$ tal que $g \cdot {}^\sigma T \cdot g^{-1} = T$, $g \cdot^\sigma B \cdot g^{-1} = B$ i, per tant, una aplicació $\mu_G : \mathrm{Gal}(k_s \mid k) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\Psi_0(G)$.

$\mathrm{Aut}\,\Psi_0 = \mathrm{Aut}\,\Psi_0^\vee$ canònicament; si triem un monomorfisme

$$\mathrm{Aut}\,\Psi_0^\vee \longrightarrow \mathrm{Aut}({}^LG^0, {}^LB^0, {}^LT^0),$$

tenim un morfisme $\mu'_G : \mathrm{Gal}(k_s \mid k) \longrightarrow \mathrm{Aut}({}^LG^0, {}^LB^0, {}^LT^0)$.

1.3. Definició.

$${}^LG := {}^LG^0 \rtimes \mathrm{Gal}(k_s \mid k)$$

respecte a μ'_G.

§2. Subgrups parabòlics de ${}^LG$

$\mathcal{P}(G \mid k) := \{k\text{-subgrups parabòlics de } G\}$.

$\mathcal{P}(G) := \mathcal{P}(G \mid \overline{k})$.

$p(G \mid k) := \{\text{clases de conjugació de } k\text{-subgrups parabòlics}\}$.

$p(G) := p(G \mid \overline{k})$.

$p(G)_k := \{\text{classes de subgrups parabòlics definits sobre } k\}$.

En particular, $p(G \mid k) \hookrightarrow p(G)_k \hookrightarrow p(G)$.

Si G és quasi-split sobre k, aleshores $p(G \mid k) = p(G)_k$.

Recordem que existeix una bijecció canònica entre $p(G)$ i els subconjunts de Δ.

$p(G)_k$ es correspon amb els subconjunts de Δ que són $\mathrm{Gal}(k_s \mid k)$-estables.

$p(G \mid k)$, als subconjunts $\mathrm{Gal}(k_s \mid k)$-estables que contenen el conjunt Δ_0 d'arrels simples d'un subgrup de Levi d'un k-grup parabòlic minimal.

Donat $P \in \mathcal{P}(G)$, indiquem per $J(P)$ el subcojunt de Δ associat a la clase de P.

2.1. Definició. Els subgrups parabòlics de ${}^LG$ són els normalitzadors de subgrups parabòlics de ${}^LG^0$.

2.2. Definició. Un subgrup parabòlic P de ${}^LG$ és estàndard si conté ${}^LB$.

Els subgrups parabòlics estàndard són els subgrups ${}^LP^0 \rtimes \mathrm{Gal}(k_s \mid k)$, on ${}^LP^0$ recorre els subgrups estàndard de ${}^LG^0$ tals que $J({}^LG^0) \subset \Delta^\vee$ és estable per $\mathrm{Gal}(k_s \mid k)$.

Tot subgrup parabòlic de ${}^LG$ és conjugat a un únic subgrup parabòlic estàndard.

La bijecció $\Delta \longleftrightarrow \Delta^\vee$ ens proporciona una bijecció $p(G)_k \longleftrightarrow p({}^LG)$.

2.3. Definició. Un subgrup parabòlic de ${}^LG$ és relevant si la seva clase es correspon amb una de $p(G \mid k)$ mitjançant aquesta bijecció.

${}^L\mathcal{P}({}^LG) := \{\text{subgrups parabòlics relevants}\}$.

Per definició, $p(G \mid k) \longleftrightarrow^L p({}^LG)$.

§3. Subgrups de Levi

3.1. Definició. Sigui P un subgrup parabòlic de ${}^LG$. El radical unipotent N de P^0 és normal en P i també l'anomenem el radical unipotent de P. Aleshores, $P/N \cong P^0/N \rtimes \mathrm{Gal}(k_s \mid k)$. P és una extensió split de N i és el producte semidirecte de N pel normalitzador en P de cert subgrup de Levi M^0 de P^0. Aquests normalitzadors els anomenem subgrups de Levi de P.

Siguin $P \in \mathcal{P}(G \mid k)$ i M un k-subgrup de Levi de P. Sigui ${}^LP$ el subgrup parabòlic estàndard en la classe associada de P. Aleshores, ${}^LM$ es pot identificar a un subgrup de Levi de ${}^LP$.

3.2. Definició. Un subgrup de Levi d'un subgrup parabòlic P de ${}^LG$ és relevant si P ho és.

§4. Representacions i grups de Weil. Factors locals

Siguin k cos local, W_k el grup de Weil, i W_k' el grup de Deligne-Weil. Si H és k-grup reductiu, aleshores $\Pi(H(k))$ és el conjunt de classes d'equivalència infinitesimal de representacions irreductibles admissibles de $H(k)$. Sigui G un k-grup reductiu connex.

El problema principal és definir una partició de $\Pi(G(k))$ en conjunts finits $\Pi_{\varphi,G}$, indexat pel conjunt $\Phi(G)$ de morfismes admissibles de W_k' en ${}^LG$, mòdul automorfismes interns i que satisfan certes condicions. Aquesta parametrització assignarà canònicament factors L i ε a tot $\pi \in \Pi(G(k))$ i a tota representació complexa de ${}^LG$.

4.1. Definició. Dos elements π i π' del mateix conjunt Π_φ tindran els mateixos factors locals, i, per això, els anomenarem L-indistingibles.

§5. Definició de $\Phi(G)$

Si $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, aleshores $W_k' = W_k$ i tot element de W_k' és semisimple per definició.

Si k és no arquimedià, l'element $x \in W_k'$ és unipotent si, i només si, $x \in G_a$; x és semisimple si $\epsilon(x) \neq 0$ o x és del grup d'inèrcia, on $\epsilon : W_k' \longrightarrow W_k \longrightarrow k^* \longrightarrow \mathbb{Z}$. Tot element $x \in W_k'$ admet una única descomposició de Jordan $x = x_s x_u$ amb x_s semisimple i x_u unipotent, i $x_x s_u = x_u x_s$.

Considerem morfismes $\alpha : W'_k \longrightarrow {}^L G$ sobre $\mathrm{Gal}(k_s \mid k)$, és a dir, tals que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} W'_k & \longrightarrow & {}^L G \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathrm{Gal}(k_s \mid k) & \end{array}$$

és commutatiu, i que satisfan les condicions següents:

- α és continu, $\alpha(G_a)$ és unipotent, en ${}^L G^0$, i α aplica elements semisimples en elements semisimples.
- Si $\alpha(W'_k)$ és contingut en un subgrup de Levi d'un subgrup parabòlic P de ${}^L G$, aleshores P és relevant.

Aquests morfismes, els anomenarem admissibles.

5.1. Definició. $\Phi(G)$ és el conjunt de clases d'equivalència mòdul automorfismes interns per elements de ${}^L G^0$.

5.2. Observació. Si escrivim $\alpha(w) = (a(w), \nu(w))$ amb $a(w) \in {}^L G^0$, aleshores $w \to a(w)$ és un 1-cocicle de W'_k en ${}^L G^0$, d'on deduim que $\Phi(G) \subset H^1(W'_k, {}^L G^0)$.

5.3. Proposició. *Siguin k' una extensió finita i separable de k, G' un k-grup reductiu connex, i $G = R_{k'|k} G'$. Aleshores, existeix una bijecció canònica $\Phi(G) \cong \Phi(G')$.*

Sigui $Z_L = C({}^L G^0)$; el grup $H^1(W_k, Z_L)$ actua en els grups $\Phi(G)$ i $H^1(W'_k, {}^L G^0)$.

5.4. Exemple. Si $G = T$ és un k-tor, aleshores $\Phi(G) = H^1_{ct}(W_k, {}^L T^0)$; a més, $\Pi(G) = \Phi(G)$ canònicament.

A tot element $\phi \in \Phi(G)$ li podem associar un caràcter χ_ϕ de $C(G)$ i a tot element $\alpha \in H^1(W'_k, Z_L)$ li podem associar un caràcter π_α de $G(k)$; aquests caràcters són compatibles amb la restricció d'escalars i satisfan la igualtat

$$\chi_{\alpha\phi} = \pi_\alpha \chi_\phi.$$

§6. Condicions dels conjunts Π_ϕ

- Si $\pi \in \Pi_\phi$, aleshores $\pi(z) = \chi_\phi(z) \cdot Id$, on $z \in C(G)$.
- Si $\phi' = \alpha\phi$, llavors $\Pi_{\phi'} = \{\pi_\alpha \otimes \pi \mid \pi \in \Pi_\phi\}$.
- En un conjunt Π_ϕ, són equivalents:
  - Un element de Π_ϕ és de quadrat integrable mòdul $C(G)$.
  - Tots els elements de Π_ϕ són de quadrat integrable mòdul $C(G)$.
  - $\phi(W_k')$ no està contingut en cap subgrup propi de Levi de ${}^LG$.
- Siguin H un k-grup reductiu connex i $\eta : H \longrightarrow G$ un k-morfisme amb nucli i conucli commutatius. Siguin $\phi \in \Phi(G)$ i $\phi' = {}^L\eta \circ \phi$. Llavors tot $\pi \in \Pi_\phi$, vist com a $H(k)$-mòdul, és la suma directa de representacions admissibles irreductibles de $\Pi_{\phi'}$.

§7. Factors locals

Siguin $\pi \in \Pi(G(k))$ i r una representació de ${}^LG$. Suposem que $\pi \in \Pi_\varphi$, per a cert $\varphi \in \Phi(G)$. Per a un caràcter additiu no trivial ψ de k, posem

$$L(s,\pi,r) = L(s, r \circ \varphi), \quad \epsilon(s,\pi,r,\psi) = \epsilon(s, r \circ \varphi, \psi),$$

on els termes de la dreta són la funció L i el factor ϵ associats a la representació $r \circ \varphi$ de W_k'.

§8. Problemes d'aixecament

8.1. L-morfismes de L-grups. Siguin G, H k-grups reductius connexos. Un morfisme $u : {}^LH \longrightarrow {}^LG$ sobre $\mathrm{Gal}(k_s, k)$ és un L-morfisme si és continu i si la seva restricció ${}^LH^0$ és un morfisme complex analític de ${}^LH^0$ en ${}^LG^0$.

Siguin k un cos local i G quasi-split. Si $\varphi \in \Phi(H)$, aleshores $u \circ \varphi \in \Phi(G)$. Per tant, tenim una aplicació $\Phi(u) : \Phi(H) \longrightarrow \Phi(G)$.

Si k és un cos global, $\mathrm{Gal}((k_v)_s, k_v)$ és subgrup de $\mathrm{Gal}(k_s, k)$; per tant, el L-grup G, vist com a k_v-grup $({}^L(G \mid k_v))$, és un subgrup de ${}^LG$. Així, el L-morfisme u defineix, per restricció, un L-morfisme $u_v : {}^L(H \mid k_v) \longrightarrow {}^L(G \mid k_v)$, i, per tant, una aplicació $\Phi(u_v) : \Phi(H \mid k_v) \longrightarrow \Phi(G \mid k_v)$.

8.2. Aixecaments locals. Siguin k un cos local, G un k-grup quasi-split, H un k-grup reductiu connex, i $u : {}^LH \longrightarrow {}^LG$ un L-morfisme. El problema d'aixecament consisteix a definir una correspondència $\Pi(u) : \Pi(H(k)) \longrightarrow \Pi(G(k))$ que conserva els factors L i ϵ. Se satisfà que $\Pi(u)(\Pi_{\varphi,H}) = \Pi_{u\circ\varphi,G}$.

L'element $\Pi \in \Pi(G(k))$ és un aixecament de $\pi \in \Pi(H(k))$ si $\Pi \in \Pi_{u\circ\varphi,G}$ és tal que $\pi \in \Pi_{\varphi,H}$, on $\varphi \in \Phi(H)$. Aleshores, tenim que

$$L(s,\Pi,r) = L(s,\pi,r\circ u), \quad \epsilon(s,\Pi,r,\psi) = \epsilon(s,\pi,r\circ u,\psi),$$

per a tota representació r de ${}^LG$.

L'aixecament local es pot veure com una aplicació entre classes de representacions L-indistingibles.

8.3. Definició. Siguin H, G quasi-split, split sobre una extensió no ramificada F de E, mirat com una o_k-estructura tal que $H(o_k)$ i $G(o_k)$ són subgrups compactes maximals molt especials, i π de classe 1 respecte a $H(o_k)$. Aleshores, φ tal que $\pi \in \Pi_{\varphi,H}$, i el conjunt $\Pi_{u\circ\varphi,G}$, són ben definits. A més, $\Pi_{u\circ\varphi,G}$ conté exactament un element de clase 1 respecte $G(o_k)$, que anomenem aixecament natural de π.

Si $G = \mathbf{GL}_n$, aleshores els conjunts $\Pi_{\varphi,G}$ tenen un únic element.

8.4. Aixecaments globals. Siguin G quasi-split, H un k-grup reductiu i $u : {}^LH \longrightarrow {}^LG$ un L-morfisme. Siguin $u_v : {}^L(H \mid k_v) \longrightarrow {}^L(G \mid k_v)$ i $\Phi(u_v) : \Phi(H \mid k_v) \longrightarrow \Phi(G \mid k_v)$ les aplicacions associades.

Sigui $\pi = \otimes_v \pi_v$ (resp. $\Pi = \otimes_v \Pi_v$); és una representació irreductible admissible de H_A (resp. G_A). Aleshores direm que Π és un aixecament de π si Π_v ho és de π_v per a tot $v \in V$. Per a tota representació r de ${}^LG$ tenim que

$$L(s,\Pi,r) = L(s,\pi,r\circ u), \quad \epsilon(s,\Pi,r) = \epsilon(s,\pi,r\circ u).$$

També demanem que Π_v sigui un aixecament natural de π_v.

Bibliografia

[**Bo 79**] Borel, P.: Automorphic L-Functions, en el llibre *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1979, pp. 27–61.

[**Ge 75**] Gelbart, S. S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Princeton University Press, 1975.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R. P.: *Automorphic Forms on* $\mathbf{GL}(2)$, LNM, n. 114, Springer-Verlag.

Capítol 21

La correspondència local de Jacquet-Langlands

Pilar Bayer Sessió 2a. del dia 26 de febrer de 1997

Weil, en els comentaris al seu article [**We 64**], ens explica que l'estiu de l'any 1962 s'emportà per estudiar dues memòries de Siegel sobre les formes quadràtiques indefinides. A fi de comprendre'n el resultat fonamental i "adelitzar-lo" al màxim, Weil ens diu que li calgué emprendre el seu estudi molt de prop. Estava convençut que una bona tècnica adèlica li permetria, d'una part, estendre a tots els grups clàssics els resultats de Siegel relatius al grup ortogonal de les formes i, de l'altra, resoldre els "exercicis" que Siegel deixava formulats.

En particular, Weil hagué de situar la fórmula de transformació de les funcions theta en un context més ampli. Calia substituir les funcions theta per funcions més generals, al mateix temps que posar de manifest certs grups que hi operaven. Atès que la fórmula de transformació per a $z \mapsto -1/z$ de les funcions theta s'obté a partir de la fórmula de sumació de Poisson, era necessari, tanmateix, cercar fórmules que generalitzessin aquesta. Per a tal fi, ens diu Weil, s'inspirà en la teoria de les *funcions intermediàries*, deguda a Hermite i a Poincaré.

Tot mirant els treballs de Siegel, Weil s'adonà que una determinada representació del grup simplèctic o, més precisament, d'una extensió central d'aquest grup, hi jugava un paper destacat. La representació projectiva corresponent, ens diu Weil, havia estat definida per I. Segal, l'any 1959, a propòsit de la mecànica quàntica. Weil indicà a Segal que aquesta representació podia ser molt important en teoria de nombres. L'estudi de la

representació lineal corresponent fou emprès per D. Shale, l'any 1962, en un treball titulat *Linear symmetries in free boson fields.*

Aquestes fonts d'inspiració conduïren Weil a la definició d'una representació que, com veurem, esdevingué un punt clau a l'hora d'establir la correspondència de Jacquet-Langlands.

§1. La sèrie discreta per a GL(2, R)

Començarem per descriure les representacions admissibles de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$. Per a més detalls, caldrà veure els capítols 2 i 10.

1.1. Notació. Fixem caràcters $\mu_i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$, per a $i = 1, 2$, no necessàriament unitaris. Denotem per $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$ l'espai vectorial de les funcions

$$\phi : \mathbf{GL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

que són $\mathbf{SO}(2)$-finites i satisfan

$$\phi\left(\begin{pmatrix} t_1 & * \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(t_1)\mu_2(t_2)|t_1/t_2|^{1/2}\phi(g),$$

per a tot $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^*$.

Denotem per $\mathcal{H}(\mathbf{GL}(2,\mathbb{R}))$ l'àlgebra de Hecke de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$.

Recordem, a manera de resum, el següent

1.2. Teorema.

i) Existeix una representació natural

$$\rho(\mu_1, \mu_2) : \mathcal{H}(\mathbf{GL}(2,\mathbb{R})) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)).$$

Si $\rho(\mu_1, \mu_2)$ és irreductible, la denotem per $\pi(\mu_1, \mu_2)$.

ii) Tota representació admissible de $\mathcal{H}(\mathbf{GL}(2,\mathbb{R}))$ és isomorfa a un subquocient d'una representació $\rho(\mu_1, \mu_2)$.

iii) Si $\rho(\mu_1, \mu_2)$ redueix, ho fa com a suma de dues representacions irreductibles: una de dimensió finita, $\pi(\mu_1, \mu_2)$, i una de dimensió no finita, $\sigma(\mu_1, \mu_2)$.

Les representacions $\pi(\mu_1, \mu_2)$ descriuen la *sèrie principal* de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$. Les representacions $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ descriuen la *sèrie discreta.* Les representacions de la sèrie principal i de la sèrie discreta proporcionen totes les representacions irreductibles i admissibles de $\mathcal{H}(\mathbf{GL}(2, \mathbb{R}))$.

Notem que, segons la descripció anterior, tenim controlades les representacions de la sèrie principal. Per obtenir més de prop les de la sèrie discreta, farem servir l'àlgebra dels quaternions de Hamilton.

1.3. Notació. *Designem per $\mathbb{H}$ el cos del quaternions de Hamilton, i per σ, la seva involució principal. Donat un quaternió $h \in \mathbb{H}$, $q(h) := hh^\sigma$ designa la seva norma reduïda.*

1.4. Teorema. *Sigui $\rho : \mathbb{H}^* \to \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ la representació definida per*

$$h = a + bi + cj + dk \longmapsto \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -(c - di) & a - bi \end{pmatrix}.$$

Tota representació (complexa) irreductible π' de $\mathbb{H}^*$ és de la forma

$$\pi'(h) = q(h)^r \operatorname{Sym}^n(\rho(h)),$$

per a un cert $r \in \mathbb{C}$ i n un nombre natural.

Notem que, en la representació ρ, la imatge d'un quaternió pur és una matriu antihermítica.

1.5. Definició. Donada una representació π', com abans, de paràmetres r, n, posem $\pi(\pi') := \sigma(\mu_1, \mu_2)$, on μ_i són els quasicaràcters de $\mathbb{R}^*$ definits per

$$\mu_1(a) = |a|^{r+n+\frac{1}{2}}, \quad \mu_2(a) = |a|^{r-\frac{1}{2}} (\operatorname{sig}(a))^n.$$

1.6. Proposició. *L'aplicació $\pi' \mapsto \pi(\pi')$ estableix una correspondència bijectiva entre les classes de representacions irreductibles de $\mathbb{H}^*$ (que són de dimensió finita) i les classes de representacions de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ de la sèrie discreta (que són de dimensió no finita).*

1.7. Observació. Per a $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$, no es tenen representacions en la sèrie discreta.

§2. La sèrie discreta per a GL(2,F)

En aquesta secció, F denota un cos local ultramètric i H l'únic cos de quaternions definit sobre F.

Les idees bàsiques per a l'estudi de les representacions admissibles i irreductibles de $\mathbf{GL}(2,F)$ són degudes a Kirillov.

Recordem que les representacions irreductibles de $\mathbf{GL}(2,F)$, si són de dimensió finita, són totes de dimensió 1, i existeix un caràcter χ de dimensió 1 de F^* tal que

$$\pi(g) = \chi(\det(g)).$$

D'acord amb el capítol 11, les representacions admissibles de $\mathbf{GL}(2,F)$ de dimensió no finita es classifiquen en

i) la *sèrie principal*,

ii) la *sèrie intermèdia*,

iii) la *sèrie discreta*.

Les representacions de la sèrie discreta es divideixen, a la vegada, en representacions *supercuspidals* i representacions *especials*.

La sèrie principal i la intermèdia varen ser descrites en el capítol 11. Els seus elements es denoten per $\pi(\mu,\nu)$, on μ,ν són caràcters de F^*.

De la sèrie discreta, es va dir que era un *misteri*. En les seccions que segueixen, ens proposem fabricar totes les representacions de la sèrie discreta a partir de representacions del grup multiplicatiu $H^* = H^*(F)$. Abans, ens cal parlar d'una representació molt particular.

§3. La representació de Weil.

Sigui L una extensió quadràtica de F i designem també per σ la seva involució principal. Posem $V = L$, o bé $V = H$, i pensem V com un F-espai vectorial. Fixem $\tau : F \to \mathbb{C}$ un caràcter additiu no trivial. Considerem la forma bilineal $V \times V \to \mathbb{C}$, $\langle x,y\rangle := \tau(\mathrm{Tr}(xy))$, on, com d'habitud, $\mathrm{Tr}(x) = x + x^\sigma$. Posarem $q(x) = xx^\sigma$, en tots els casos.

Denotem per $\mathcal{S}(V)$ l'espai de Schwartz-Bruhat de V. Recordem que aquest espai està format per les funcions (complexes) localment constants i amb suport compacte, definides sobre l'espai V.

Donada una funció $\phi \in \mathcal{S}(V)$, definim la seva transformada de Fourier per la fórmula

$$\widehat{\phi}(x) := \int_V \phi(y)\langle x,y\rangle dy,$$

on dy denota una mesura de Haar de V, normalitzada de manera que $(\widehat{\phi})\widehat{\ }(x) = \phi(-x)$.

3.1. Proposició. (La constant de Weil) *Sigui $f(x) := \tau(q(x))$. Existeix una constant $\gamma = \gamma(V,\tau)$ tal que*

$$(\phi * f)\widehat{\ }(x) = \gamma f^{-1}(x^\sigma)\widehat{\phi}(x).$$

A més,

$$\gamma = -1, \quad si\ V = H,$$
$$|\gamma| = 1, \quad si\ V = L.$$

A fi de construir una determinada representació per a $\mathbf{GL}(2,F)$, començarem per construir-ne una de $\mathbf{SL}(2,F)$.

3.2. Lema. *Les matrius següents constitueixen un sistema de generadors de $\mathbf{SL}(2,F)$:*

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

per a $u \in F$, $a \in F^*$.

3.3. Notació. Quan $V = L$, designem per η el caràcter no trivial

$$\eta : F^*/\mathrm{Norm}(L^*) \to \mathbb{C}.$$

Si $V = H$, convenim que η és el caràcter trivial de H^*.

3.4. Proposició. *Existeix una única representació*

$$r : \mathbf{SL}(2,F) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(V))$$

tal que

i) $r\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\phi(x) := \tau(u(q(x)))\phi(x).$

ii) $r\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right)\phi(x) := \eta(a)|a|_V^{1/2}\phi(ax).$

iii) $r\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\phi(x) := \gamma\widehat{\phi}(x^\sigma).$

La representació r és contínua i s'estén a una representació contínua

$$r : \mathbf{SL}(2,F) \to \mathrm{Aut}(L^2(V)),$$

on $L^2(V)$ denota l'espai de les funcions de quadrat integrable definides sobre V.

DEMOSTRACIÓ. N'hi ha prou amb veure que les fórmules donades satisfan les mateixes relacions que els generadors de $\mathbf{SL}(2,F)$. $\square$

Com que la representació anterior depèn de τ, la indicarem, si convé, per r_τ. Volem ara estendre r_τ a tot $\mathbf{GL}(2,F)$. Com a pas previ, considerem el grup

$$G_+ := \{m \in \mathbf{GL}(2,F) \mid \det m \in q(V^*)\}.$$

Notem que l'índex $(\mathbf{GL}(2,F) : G_+)$ és 2, o bé 1, segons que sigui $V = L$, o bé $V = H$.

3.5. Lema. *Sigui*

$$C := \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in q(V^*)\right\}.$$

i) Es té l'estructura de producte semidirecte

$$G_+ = C \odot \mathbf{SL}(2,F).$$

ii) Sigui $a = q(h)$, on $h \in V$. La fórmula

$$r_\tau\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\phi(x) = \phi(xh)$$

estén la representació r_τ a una representació de G_+.

3.6. Lema.

i) La representació induïda per r_τ,

$$r : \mathbf{GL}(2, F) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(V)),$$

no depèn de τ.

ii) La representació r s'estén a una representació unitària valorada en $L^2(V)$.

3.7. Definició. La representació $r : \mathbf{GL}(2, F) \to \mathrm{Aut}(L^2(V))$ així construïda s'anomena la *representació de Weil* de $\mathbf{GL}(2, F)$.

3.8. Lema. *Sigui $R : H^* \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(V))$ la representació regular, definida per $R(h)\phi(x) = \phi(xh)$. Aleshores, per a tot $g \in \mathbf{GL}(2, F)$, $h \in H^*$, se satisfà que*

$$r(g)R(h) = R(h)r(g).$$

És a dir, la representació de Weil commuta amb la representació regular.

El lema anterior ens fa veure que, en el cas quaterniònic, la representació de Weil és reductible.

3.9. Torsió de la representació de Weil.

Volem ara torçar la representació de Weil, de manera escaient, per mitjà de representacions π' de V^*. Considerarem el subgrup de V^*

$$K_1 := \{x \in V^* \mid q(x) = 1\}.$$

Recordem que, quan $V = H$, es disposa d'una successió exacta

$$1 \to \{\pm 1\} \to K_1 \to \mathbf{SO}(H_0) \to 1,$$

on $\mathbf{SO}(H_0)$ denota el grup especial ortogonal (en dimensió 3) associat als quaternions purs. De la representació π' ens interessarà especialment la seva restricció a $\widetilde{\mathbf{SO}}(H_0) := K_1$.

3.10. Notació. E designa un $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió finita, n, i

$$\pi' : V^* \to \mathbf{GL}(E)$$

una representació irreductible de $G' := V^*$, valorada en E. Considerem

$$\mathcal{S}(V,E) := \mathcal{S}(V) \otimes_{\mathbb{C}} E.$$

Els elements d'aquest espai vectorial s'identifiquen amb vectors de n components, les entrades dels quals són funcions de $\mathcal{S}(V)$. A l'espai $\mathcal{S}(V,E)$ hi opera el grup $\mathbf{SL}(2,F)$. En el primer component ho fa mitjançant r; en el segon, mitjançant l'acció trivial de $\mathbf{SL}(2,F)$ en E.

Tot seguit, introduïm l'espai de les funcions de Schwartz-Bruhat relatives a π':

$$\mathcal{S}(V,\pi') := \{\phi \in \mathcal{S}(V,E) \mid \phi(xh) = \pi'(h^{-1})\phi(x), \quad \text{per a tot } h \in K_1\}.$$

3.11. Proposició. *Existeix una representació*

$$r_{\pi'} : G_+ \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(V,\pi'))$$

tal que

i) $r_{\pi'}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\phi(x) = |h|_V^{1/2}\pi'(h)\phi(xh), \quad$ *si* $a = q(h) \in q(V^*)$.

ii) $r_{\pi'}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\phi(x) = \eta(a)\chi_{\pi'}(a)I, \quad$ *si* $a \in F^*$.

Aquí, $\chi_{\pi'}$ *denota el caràcter central de* π'.

3.12. Observació. Si haguéssim pres com a π' una representació unitària, la representació $r_{\pi'}$ admetria una extensió a una representació

$$r_{\pi'} : G_+ \to \mathrm{Aut}(L^2(V,\pi')),$$

on per $L^2(V,\pi')$ designem la clausura de $S(V,\pi')$ en l'espai de Hilbert de les funcions de quadrat integrable de V en E, amb la norma

$$\| \phi \|^2 = \int_V \| \phi(x) \|^2 \, dx.$$

Posem la següent

3.13. Definició. Definim

$$r_{\pi'} : \mathbf{GL}(2, F) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(V, \pi'))$$

com la representació induïda per la representació del mateix nom sobre G_+. Com en el cas anterior, aquesta representació no depèn de τ. Direm que és la representació de Weil de $\mathbf{GL}(2, F)$ torçada per la representació π' de V^*.

§4. La correspondència local de Jacquet-Langlands

La importància de la representació de Weil i de les seves torçades es fa palesa en els dos teoremes que segueixen:

4.1. Teorema. (Cas quadràtic: Alguns termes de la sèrie principal i totes les representacions supercuspidals) *Suposem que $V = L$ és un cos quadràtic sobre F.*

i) Si la representació $\pi' : L^* \to \mathbb{C}^*$ és de la forma $\pi' = \chi \circ q$, on $\chi : F^* \to \mathbb{C}^*$ és un caràcter, aleshores es té una equivalència

$$r_{\pi'} \sim \pi(\chi, \chi\eta),$$

on $\pi(\chi, \chi\eta) : \mathbf{GL}(2, F) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H}(\chi, \chi\eta))$ és una representació irreductible de la sèrie principal.

ii) Si la representació $\pi' : L^* \to \mathbb{C}^*$ no és de la forma anterior, la representació

$$r_{\pi'} : \mathbf{GL}(2, F) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(V, \pi'))$$

és supercuspidal.

iii) Quan L descriu totes les extensions quadràtiques de F, s'obtenen pel procediment anterior totes les representacions supercuspidals de $\mathbf{GL}(2, F)$, a més de les esmentades de la sèrie principal.

De totes maneres, la sèrie discreta conté, a més de les representacions supercuspidals, les representacions dites *especials*. Com veurem, aquestes provenen de les representacions irreductibles del grup multiplicatiu H^* de l'àlgebra de quaternions sobre F.

4.2. Teorema. (Cas quaterniònic: Totes les representacions especials i totes les representacions supercuspidals; és a dir, tota la sèrie discreta) *Suposem que $V = H$ és el cos dels quaternions de F. Sigui*

$$\pi' : H^* \to \mathrm{Aut}(E)$$

una representació complexa irreductible de dimensió finita, igual a n.

i) La representació

$$r_{\pi'} : \mathbf{GL}(2, F) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(V, \pi'))$$

és isotípica. Descompon en suma directa de n representacions irreductibles $\pi(\pi')$:

$$r_{\pi'} \simeq \pi(\pi') \oplus \cdots \oplus \pi(\pi').$$

ii) Si $n = 1$, la representació irreductible $\pi(\pi')$ és especial.

iii) Si $n > 1$, la representació irreductible $\pi(\pi')$ és supercuspidal.

iv) L'aplicació

$$\pi' \mapsto \pi(\pi')$$

dóna una bijecció entre les classes d'isomorfia de representacions irreducibles i de dimensió finita de H^* i les classes d'isomorfia de representacions de la sèrie discreta de $\mathbf{GL}(2, F)$, que són de dimensió no finita.

4.3. Definició. L'aplicació

$$\pi' \mapsto \pi(\pi')$$

es coneix amb el nom de *correspondència local de Jacquet-Langlands.*

Bibliografia

[**Ge 75**] Gelbart, S., S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1975.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R.,P.: *Automorphic forms on* $\mathbf{GL}_2$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

[**We 64**] Weil, A.: Sur certain groupes d'operateurs unitaires, *Acta Math.*, n. 111 (1964), 143–211. Recollit en *Oevres scientifiques. Collected Papers, v. III*, Springer, 1979.

[**Tha 92**] Thaller, B.: *The Dirac Equation*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1992.

Capítol 22

La correspondència global de Jacquet-Langlands

Pilar Bayer Sessió 1a. del dia 5 de març de 1997

§1. Representacions automorfes de $H^*(A_F)$

1.1. Notacions. En aquest capítol, F designa un cos global. Fixem un caràcter additiu no trivial

$$\tau : F\backslash\mathbb{A}_F \to \mathbb{C}.$$

Considerem donada una àlgebra de quaternions H sobre F i indiquem per S el conjunt de places de F on H *ramifica*; és a dir,

$$S = \{v \mid H_v \text{ és el cos dels quaternions sobre } F_v\}.$$

Per tant, $H_v \simeq \mathbf{GL}(2, F_v)$, per a tot $v \notin S$. En aquest darrer cas, recordem que es diu que v és una plaça de F on H *descompon*.

Sigui $\mathcal{H}' := \mathcal{H}(H^*(\mathbb{A}_F))$ l'àlgebra de Hecke global associada a H^*. Sigui

$$\mathcal{A}' := \mathcal{A}(H^*(\mathbb{A}_F)) \subset L^2(H^*(F)\backslash H^*(\mathbb{A}_F))$$

el $\mathbb{C}$-espai vectorial de formes automorfes respecte de $H^*(\mathbb{A}_F)$.

Semblantment,

$$\mathcal{A}'(\psi) := \mathcal{A}(H^*(F)\backslash H^*(\mathbb{A}_F), \psi) \subset L^2(H^*(\mathbb{A}_F), \psi)$$

denota el $\mathbb{C}$-espai vectorial de formes automorfes respecte de $H^*(\mathbb{A}_F)$, on

$$\psi : F^*\backslash \mathbb{A}_F^* \to \mathbb{C}^*$$

és un quasicaràcter.

La translació per la dreta defineix sengles representacions unitàries

$$R' : \mathcal{H}' \to \mathrm{End}(\mathcal{A}'), \quad R'_\psi : \mathcal{H}' \to \mathrm{End}(\mathcal{A}'(\psi)).$$

1.2. Lema. *Sigui $\pi' : \mathcal{H}' \to \mathrm{End}(\mathcal{A}')$ una representació irreductible i admissible. Aleshores:*

i) Existeix un quasicaràcter ψ de les classes d'ideles de F tal que π' és un constituent de R'_ψ.

ii) L'espai $\mathcal{A}'(\psi)$ és suma directa de subespais irreductibles i invariants per a $\mathcal{H}'$. Ho escriurem

$$\mathcal{A}'(\psi) = \oplus V'_j, \quad R' = \oplus \pi'_j.$$

iii) La representació de $\mathcal{H}'$ en cadascun dels subespais de formes automorfes $\mathcal{A}'(\psi)$ és admissible. Cap representació irreductible no hi apareix més d'una quantitat finita de vegades.

1.3. Definició. Les representacions π' esmentades en el lema s'anomenen *representacions automorfes* de $H^*(\mathbb{A}_F)$. A vegades, també se les designa amb el nom de representacions automorfes cuspidals (tot i que, en aquest cas, no tenim puntes).

Notem que, a diferència del cas $\mathbf{GL}(2)$, en el cas quaterniònic no tenim, d'entrada, teoremes de multiplicitat 1.

§2. Funció L associada a una representació automorfa en el cas quaterniònic

Sigui $\pi' = \otimes\pi'_v$ una representació irreductible i admissible de $\mathcal{H}'$. Sigui $\tau = (\tau_v)$ el caràcter additiu fixat abans, on $\tau_v : F_v \to \mathbb{C}$ són els seus components locals. Les representacions π'_v són, aleshores, admissibles. En aquesta situació, vàrem definir funcions L locals i factors ε:

$$L(s, \pi'_v), \quad L(s, \widetilde{\pi}'_v), \quad \varepsilon(s, \pi_v, \tau_v),$$

on $\widetilde{\pi}'$ denota la representació contragradient.

La teoria de les funcions zeta globals associades a àlgebres de quaternions es resumeix, en part, en el teorema següent:

2.1. Teorema. (Jacquet-Langlands) *Suposem que π' sigui un constituent de $\mathcal{A}'$; és a dir, suposem que π' és una representació automorfa cuspidal de $H^*(\mathbb{A}_F)$. Aleshores,*

i) Els productes

$$L(s, \pi') := \prod_v L(s, \pi'_v), \quad L(s, \widetilde{\pi}') := \prod_v L(s, \widetilde{\pi}'_v)$$

convergeixen absolutament per a $\mathrm{Re}(s)$ *suficientment gran.*

ii) Les funcions L així definides admeten una prolongació analítica en funcions meromorfes del pla complex. Si F és un cos de nombres, aquestes funcions tenen únicament un nombre finit de pols i són afitades a l'infinit en totes les bandes verticals d'amplada finita.

iii) Se satisfà l'equació funcional

$$L(s, \pi') = \varepsilon(s, \pi') L(1 - s, \widetilde{\pi}'),$$

on

$$\varepsilon(s, \pi') := \prod_v \varepsilon(s, \pi'_v, \tau_v).$$

La demostració del teorema imita la portada a terme per Tate a la seva tesi, a fi de provar l'equació funcional que satisfan les funcions L associades a caràcters de Hecke.

El teorema anterior admet el refinament següent:

2.2. Proposició. *Denotem per*

$$\chi : F^* \to \mathbb{C}^*$$

un quasicaràcter. Sigui π' un constituent de $\mathcal{A}'$. Suposem que π' no és de la forma $\chi \circ N$, on N indica la norma reduïda. Aleshores,

i) Les funcions $L(s, \chi \otimes \pi')$, $L(s, \chi^{-1} \otimes \widetilde{\pi}')$ són enteres i afitades a l'infinit en totes les bandes verticals d'amplada finita.

ii) Se satisfà l'equació funcional

$$L(s, \chi \otimes \pi') = \varepsilon(s, \chi \otimes \pi')\, L(1-s, \chi^{-1} \otimes \widetilde{\pi}').$$

DEMOSTRACIÓ. Basta observar que si π' és un constituent de $\mathcal{A}'$, aleshores $\chi \otimes \pi'$ també ho és, i aplicar el teorema anterior. $\square$

§3. La correspondència global de Jacquet-Langlands

Sigui

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(\mathbf{GL}(2,F)\backslash\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_F)) \subset L^2(\mathbf{GL}(2,F)\backslash\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_F))$$

el $\mathbb{C}$-espai vectorial de formes automorfes respecte de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_F)$. Semblantment,

$$\mathcal{A}(\psi) := \mathcal{A}(\mathbf{GL}(2,F)\backslash\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_F),\psi) \subset L^2(\mathbf{GL}(2,F)\backslash\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_F),\psi)$$

denota el $\mathbb{C}$-espai vectorial de formes automorfes respecte de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_F)$, on

$$\psi : F^*\backslash\mathbb{A}_F^* \to \mathbb{C}^*$$

és un quasicaràcter.

Denotem per $\mathcal{H}$ l'àlgebra de Hecke global del grup $\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_F)$.

La translació per la dreta defineix sengles representacions unitàries

$$R : \mathcal{H} \to \mathrm{End}(\mathcal{A}), \quad R_\psi : \mathcal{H} \to \mathrm{End}(\mathcal{A}(\psi)).$$

En aquesta secció, veurem un procediment per a la construcció de les representacions automorfes cuspidals de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F)$.

3.1. Teorema. (Jacquet-Langlands) *Sigui*

$$\pi' = \otimes \pi'_v : \mathcal{H}' \to \mathrm{End}(\mathcal{A}')$$

una representació admissible, irreductible; és a dir, automorfa cuspidal. Suposem que

$$\dim \pi'_v = \infty, \quad \textit{per a tot } v \notin S.$$

Sigui

$$\pi' \to \pi := \otimes \pi_v(\pi'_v)$$

la imatge de π' en la correspondència global de Jacquet-Langlands.

Aleshores, la representació

$$\pi : \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{GL}(2, F) \backslash L^2(\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F)))$$

és automorfa cuspidal; és a dir, és un constituent de

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{GL}(2, F) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F)).$$

3.2. Observació. Si $\pi' = \otimes \pi'_v$ és un constituent de $\mathcal{A}'$, sempre podem trobar un quasicaràcter χ de $F^* \backslash \mathbb{A}_F^*$ de manera que $\chi_v \pi'_v$ sigui unitària per a cada v. En particular, si $v \notin S$, la representació $\chi_v \pi'_v$ serà, o bé de dimensió 1, o bé de dimensió no finita.

Si $\pi' = \chi \circ N$, aleshores, per a quasi tot v, la representació π_v és de dimensió 1. Però, si $v \in S$, sabem que la representació $\pi_v = \pi_v(\pi'_v)$ és de dimensió no finita. Per tant, en aquest cas, $\pi(\pi')$ no pot actuar en cap subespai de $\mathcal{A}_0$; és a dir, no pot ser cuspidal. De totes maneres, pot encara ser un constituent de $\mathcal{A}$; és a dir, pot ser automorfa. La prova d'aquesta darrera afirmació implicaria l'ús de les sèries d'Eisenstein.

Passem tot seguit a donar certes indicacions sobre la demostració del teorema.

DEMOSTRACIÓ. La correspondència de Jacquet-Langlands està definida de manera que se satisfan les igualtats següents:

i) $L(s, \chi_v \otimes \pi_v) = L(s, \chi_v \otimes \pi'_v)$,

ii) $L(s, \chi_v \otimes \widetilde{\pi}_v) = L(s, \chi_v \otimes \widetilde{\pi}'_v)$,

iii) $\varepsilon(s, \chi_v \otimes \pi_v, \tau_v) = \varepsilon(s, \chi_v \otimes \pi'_v, \tau_v)$.

Per tant, el teorema resulta del teorema anterior i del criteri de Langlands (que tot seguit recordem), atès que $\pi = \otimes \pi_v(\pi'_v)$ és una representació de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F)$ que és irreductible, unitària i admissible. □

3.3. Teorema. (Criteri de Langlands) *Sigui $\pi = \otimes \pi_v$ una representació irreductible de l'àlgebra de Hecke $\mathcal{H}$. Suposem que el quasicaràcter ψ de $\mathbb{A}_F^*$ definit per*

$$\pi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \psi(a) I$$

és trivial sobre F^*.

Suposem que, per a tot quasicaràcter χ de $F^* \backslash \mathbb{A}_F^*$, els productes infinits

$$L(s, \chi \otimes \pi) = \prod L(s, \chi_v \otimes \pi_v),$$
$$L(s, \chi^{-1} \otimes \widetilde{\pi}) = \prod L(s, \chi_v^{-1} \otimes \widetilde{\pi_v})$$

són absolutament convergents per a $\mathrm{Re}(s)$ *suficientment gran.*

Suposem que les funcions $L(s, \chi \otimes \pi)$, $L(s, \chi^{-1} \otimes \widetilde{\pi})$ són enteres, per a tot χ, afitades a l'infinit en totes les bandes verticals d'amplada finita i satisfan les equacions funcionals

$$L(s, \chi \otimes \pi) = \varepsilon(s, \chi \otimes \pi) L(1 - s, \chi^{-1} \otimes \widetilde{\pi}).$$

Aleshores, si totes les representacions π_v són de dimensió no finita, la representació π és un constituent de $\mathcal{A}_0$; és a dir, π és una representació automorfa cuspidal.

DEMOSTRACIÓ (Esbós). La demostració d'aquest criteri es basa en la utilització dels models de Whittaker (cf. el capítol 18). □

§4. Imatge de la correspondència global de Jacquet-Langlands

Podem ara preguntar-nos quins constituents de $\mathcal{A}_0$ s'obtenen a partir de la correspondència global de Jacquet-Langlands. Tenint en compte els resultats de la teoria local, és d'esperar el següent

4.1. Teorema. ((?)Conjectura de Jacquet-Langlands) *Sigui $\pi = \otimes\pi_v$ un constituent de $\mathcal{A}_0$. Suposem que, per a cada $v \in S$, la representació π_v és especial o bé absolutament cuspidal; és a dir, és de la sèrie discreta. Per a cada v, sigui π'_v la representació de H^*_v tal que $\pi_v = \pi_v(\pi'_v)$ en la correspondència local de Jacquet-Langlands. Aleshores, la representació $\pi' := \otimes\pi'_v$ és un constituent de $\mathcal{A}'$.*

Curiosament, la demostració del teorema anterior no es pot fer seguint un criteri semblant al de Langlands. Un nombre suficient d'equacions funcionals no garanteix el caràcter automorf cuspidal per a les representacions de H^*. Ens falta en el cas quaterniònic el model de Whittaker. Si mirem [**Ja-La 70**], el teorema enunciat es deixa com una conjectura i els càlculs es donen de manera aproximada. Sembla que les dificultats provenen de la fórmula de les traces que, en aquells moments, potser no era prou a punt.

Ignoro el moment en el qual es decidí que el teorema estava demostrat. Potser el text [**La 80**] proporcioni els detalls que falten.

A fi de dir quelcom sobre la línia de demostració del teorema, introduïm les següents

4.2. Notacions. Suposem que G és un grup localment compacte unimodular. Sigui Z un subgrup tancat contingut en el centre de G. Sigui ψ un caràcter de Z. Per $L^1(\psi)$ designem el conjunt de les funcions f definides sobre G i mesurables que satisfan

$$f(ag) = \psi^{-1}(a)f(g),$$

per a tot $a \in Z$, i tals que el seu valor absolut és integrable sobre $Z\backslash G$.

Si $f \in L^1(\psi)$, definim $f^*(g) = \overline{f}(g^{-1})$. Aleshores, f^* és, també, un element de $L^1(\psi)$. Notem que $L^1(\psi)$ té estructura d'àlgebra respecte del producte de convolució $f_1 * f_2$.

Sigui π una representació unitària de G en un espai de Hilbert. Suposem que, per a tot $a \in Z$, se satisfà $\pi(a) = \psi(a)I$. Si $f \in L^1(\psi)$, definim

$$\pi(f) = \int_{Z\backslash G} f(g)\pi(g)\,dg.$$

4.3. Definició. Una subàlgebra B de $L^1(\psi)$ es diu que és ampla si és densa i és tancada per l'operació $f \mapsto f^*$.

4.4. Lema. *Siguin π_1, π_2 dues representacions unitàries de G amb caràcter ψ (no necessàriament irreductibles). Suposem que existeix una subàlgebra $B \subseteq L^1(\psi)$ ampla tal que, per a tot $f \in B$, els operadors $\pi_1(f)$ i $\pi_2(f)$ són Hilbert-Schmidt. Si, per a tot $f \in B$, se satisfà la igualtat*

$$\mathrm{Tr}(\pi_1(f)\pi_1(f^*)) = \mathrm{Tr}(\pi_2(f)\pi_2(f^*)),$$

aleshores les representacions π_1 i π_2 són equivalents.

En el capítol 24 posarem a punt la fórmula de les traces, a fi de poder-la utilitzar en el criteri anterior. L'esbós de la demostració del teorema serà donada al final d'aquell capítol.

Bibliografia

[**Ge 75**] Gelbart, S.S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1975.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic forms on* $\mathbf{GL}_2$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

[**La 80**] Langlands, R.P.: *Base change for* $\mathbf{GL}(2)$, Annals of Mathematics Studies, n. 96, Princeton University Press, 1980.

Capítol 23

Grups de Weil

Artur Travesa Sessió 2a. del dia 5 de març de 1997

Aquest capítol és, amb molts més detalls que en l'exposició oral, el contingut de la primera de les dues sessions del seminari que s'havien de destinar al tema de canvis de base per a $\mathbf{GL}(2)$. Conté un primer estudi dels grups de Weil necessari per a entendre els canvis de base, tema al qual es dedica el capítol 25 i que correspon a la segona sessió oral sobre el tema.

El capítol comença amb un estudi del morfisme transferidor fet elementalment, sense usar cohomologia. A continuació es presenta un repàs de la teoria de cossos de classes, la part estrictament necessària per als grups de Weil. En la secció tercera es donen la definició i les primeres propietats dels grups de Weil; a la secció quarta, se n'estudia l'existència; a la cinquena, la unicitat; i, a la sisena, es presenten els casos especials que ens interessaran: els grups de Weil dels cossos de nombres, dels cossos p-àdics, de $\mathbb{R}$ i de $\mathbb{C}$.

§1. El transferidor

Donat un grup qualsevol, G, considerem el subgrup derivat de G, $DG := \langle [x,y] := xyx^{-1}y^{-1} \,:\, x,y \in G\rangle$; és a dir, el subgrup generat pels commutadors dels elements de G. Llavors:

(a) DG és un subgrup normal de G;

(b) el grup quocient G/DG és commutatiu; i

(c) si $N \subseteq G$ és un subgrup normal de G, aleshores el quocient G/N és commutatiu si, i només si, $DG \subseteq N$.

El grup G/DG és el màxim quocient commutatiu de G; amb més precisió, tot quocient commutatiu de G és un quocient de G/DG.

En particular, si H és un subgrup qualsevol de G, és $DH \subseteq DG$, i es disposa d'un morfisme de grups natural $H/DH \to G/DG$, que s'obté de la inclusió $H \to G$ per pas al quocient.

En el cas que H sigui un subgrup d'índex finit, també es disposa d'un morfisme en sentit contrari, el transferidor $G/DG \xrightarrow{t} H/DH$; es tracta de donar-ne una definició no cohomològica, que dista molt de ser trivial.

Per a això, considerem una secció qualsevol $H\backslash G \xrightarrow{s} G$ de la projecció canònica de G en el conjunt de classes laterals $H\backslash G$. Això és, s és una aplicació tal que per a tota classe lateral Hx, $x \in G$, $s(Hx) \in G$ és un representant d'aquesta classe; per tant, $\mathrm{Im}(s)$ és un conjunt de representants de les classes de $H\backslash G$; dit d'una altra manera, per a tot element $x \in G$ se satisfà la relació $s(Hx) \in Hx$ o bé, si es vol, $Hx = Hs(Hx)$.

En particular, per a dos elements qualssevol $g, x \in G$, els elements $s(Hx)g$ i $s(Hxg)$ són representants de la mateixa classe Hxg; per tant, existeix un únic element $h_{g,x} \in H$, que depèn de g i de la classe Hx, tal que

$$s(Hx)g = h_{g,x}\, s(Hxg).$$

Per definició, és clar que si $x, y \in G$ són tals que $Hx = Hy$, llavors $h_{g,x} = h_{g,y}$, per a tot element $g \in G$.

Ara, podríem intentar pensar en el producte (finit perquè $H\backslash G$ és un conjunt finit) $\prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} = \prod_{Hx \in H\backslash G} h_{g,x}$; però aquest producte no té sentit, en general, ni en G ni en H, si no diem en quin ordre el prenem, perquè ni G ni H no són, en general, commutatius; ara bé, el producte sí que té sentit en H/DH, perquè aquest grup és commutatiu i, en conseqüència, el producte no depèn de l'ordre en què es multipliqui.

Podem, doncs, definir una aplicació $G \xrightarrow{t} H/DH$ per la fórmula

$$t(g) := \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH}.$$

En principi, aquesta definició podria dependre de l'elecció de la secció s que ens ha servit per a construir els elements $h_{g,x}$; això no és així.

1.1. Lema. *L'aplicació t no depèn de l'elecció de la secció s; és a dir, si $H\backslash G \xrightarrow{s'} G$ és una altra secció i es defineixen els elements $h'_{g,x} \in H$ per les igualtats $s'(Hx)g = h'_{g,x}\, s'(Hxg)$, llavors*

$$\prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH} = \prod_{x\in \mathrm{Im}(s')} h'_{g,x} \pmod{DH}.$$

Demostració. Com que $H\backslash G$ és finit, és suficient considerar el cas en què $\mathrm{Im}(s)$ i $\mathrm{Im}(s')$ només difereixen en un element; en efecte, per al cas general, s'aplica aquest cas a les parelles de termes consecutius d'una successió de seccions elegida de manera que dues seccions consecutives només difereixin en un element, i que la primera i la darrera siguin les dues seccions donades.

Suposem, doncs, que $\mathrm{Im}(s)$ i $\mathrm{Im}(s')$ només difereixen en un element $x_0 \in \mathrm{Im}(s)$, $x_0 \notin \mathrm{Im}(s')$, de manera que per a tot $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$, és $s(Hx) = x = s'(Hx)$. Sigui $h_0 \in H$, $h_0 \neq 1$, l'element tal que $s'(Hx_0) = h_0x_0$. Cal comparar els productes

$$t(g) = \prod_{x\in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH} = h_{g,x_0} \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s),\\ x\neq x_0}} h_{g,x} \pmod{DH},$$

$$t'(g) = \prod_{x\in \mathrm{Im}(s')} h'_{g,x} \pmod{DH} = h'_{g,x_0} \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s),\\ x\neq x_0}} h'_{g,x} \pmod{DH},$$

i veure que coincideixen.

Prenem $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$; aleshores, tenim que $Hx \neq Hx_0$ i que $s(Hx) = s'(Hx)$. Si l'element $g \in G$ és tal que $Hxg \neq Hx_0$, llavors també és $s(Hxg) = s'(Hxg)$, i de les igualtats $s(Hx)g = h_{g,x}\, s(Hxg)$ i $s'(Hx)g = h'_{g,x}\, s'(Hxg)$ deduïm que és $h_{g,x} = h'_{g,x}$. Així,

$$\prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s)\\ x\neq x_0\\ Hxg\neq Hx_0}} h_{g,x} \pmod{DH} = \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s)\\ x\neq x_0\\ Hxg\neq Hx_0}} h'_{g,x} \pmod{DH};$$

per tant, hem reduït el problema a comprovar que

$$h_{g,x_0} \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s)\\ x\neq x_0\\ Hxg= Hx_0}} h_{g,x} \pmod{DH} = h'_{g,x_0} \prod_{\substack{x\in \mathrm{Im}(s)\\ x\neq x_0\\ Hxg= Hx_0}} h'_{g,x} \pmod{DH}.$$

El conjunt $C := \{x \in \mathrm{Im}(s) : x \neq x_0, Hxg = Hx_0\}$ o bé és buit, o bé conté un sol element, perquè quan x recorre un sistema de representants de les classes de $H\backslash G$, els productes xg en recorren un altre. Si $C = \varnothing$, cal veure que $h_{g,x_0} \equiv h'_{g,x_0} \pmod{DH}$. Ara bé, la condició $C = \varnothing$ ens permet dir que per a tot $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$, és $Hxg \neq Hx_0$; per tant, ha de ser $Hx_0g = Hx_0$; en aquest cas, és $s(Hx_0g) = s(Hx_0) = x_0$, i $s'(Hx_0g) = s'(Hx_0) = h_0x_0$, de manera que tenim les igualtats

$$h_0x_0g = s'(Hx_0)g = h'_{g,x_0}s'(Hx_0g) = h'_{g,x_0}h_0x_0,$$

$$x_0g = s(Hx_0)g = h_{g,x_0}s(Hx_0g) = h_{g,x_0}x_0,$$

d'on es dedueix la igualtat $h_0h_{g,x_0} = h'_{g,x_0}h_0$, en G (i en H); o sigui, la igualtat $h_{g,x_0} = h'_{g,x_0} \pmod{DH}$, com volíem veure en aquest cas.

En l'altre cas, que $C \neq \varnothing$, existeix un (únic) element $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$, tal que $Hxg = Hx_0$. Ara tenim que $Hx_0 = Hxg \neq Hx_0g$ (perquè $Hx \neq Hx_0$); per tant, se satisfan les igualtats $s(Hxg) = s(Hx_0) = x_0$, $s'(Hxg) = s'(Hx_0) = h_0x_0$, $s(Hx) = s'(Hx)$, la darrera perquè $x \in \mathrm{Im}(s)$, $x \neq x_0$. Això ens permet dir que

$$h'_{g,x}h_0x_0 = h'_{g,x}s'(Hxg) = s'(Hx)g = s(Hx)g = h_{g,x}\,s(Hxg) = h_{g,x}x_0,$$

de manera que $h_{g,x} = h'_{g,x}h_0$. D'altra banda, com que $Hx_0g \neq Hx_0$, és $s(Hx_0g) = s'(Hx_0g)$, mentre que $s(Hx_0) = x_0$ i $s'(Hx_0) = h_0x_0$; per tant, se satisfan les igualtats

$$h_0x_0g = s'(Hx_0)g = h'_{g,x_0}\,s'(Hx_0g),$$

$$x_0g = s(Hx_0)g = h_{g,x_0}\,s(Hx_0g) = h_{g,x_0}\,s'(Hx_0g),$$

de manera que és $h_0h_{g,x_0} = h'_{g,x_0}$.

En conseqüència, els productes que resta comparar són $h'_{g,x}h'_{g,x_0} = h_{g,x}h_0^{-1}h_0h_{g,x_0} = h_{g,x}h_{g,x_0} \pmod{DH}$, com calia veure. Això acaba la prova. $\square$

1.2. Lema. *Sigui $t : G \to H/DH$ l'aplicació definida per la fórmula*

$$t(g) := \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH},$$

on per a $g, x \in G$ és $s(Hx)g = h_{g,x}\, s(Hxg)$, i $H\backslash G \xrightarrow{s} G$ és qualsevol secció de la projecció canònica de G en el conjunt $H\backslash G$. Llavors, t és un morfisme de grups.

DEMOSTRACIÓ. Cal veure que per a tota parella d'elements $g, g' \in G$ és $t(gg') = t(g)t(g')$. Posem $t(g') := \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g',x} \pmod{DH}$, on $s(Hx)g' = h_{g',x}\, s(Hxg')$, anàlogament a com hem fet per a $t(g)$, amb la mateixa secció s en els dos casos. Ara, és $h_{gg',x} s(Hxgg') = s(Hx)gg' = h_{g,x} s(Hxg)g' = h_{g,x} h_{g',xg} s(Hxgg')$, de manera que és $h_{gg',x} = h_{g,x} h_{g',xg}$. Per tant,

$$\begin{aligned} t(gg') &= \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{gg',x} \pmod{DH} \\ &= \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g',xg} \pmod{DH} \\ &= t(t) \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g',xg} \pmod{DH}. \end{aligned}$$

Ara bé, x recorre un sistema de representants de les classes laterals Hx si, i només si, ho fa xg; per tant, si definim una secció s' per la fórmula $s'(Hxg) := s(Hx)g$, per a tot $x \in G$, tenim que $t(gg') = t(g) \prod_{x \in \mathrm{Im}(s')} h_{g',x}$ $\pmod{DH} = t(g)t(g')$, en virtut del lema anterior. Això acaba la demostració. □

Així, hem definit un morfisme de grups $G \xrightarrow{t} H/DH$; ara bé, com que H/DH és commutatiu, el morfisme t factoritza a través de la projecció canònica G/DG i s'obté un morfisme de grups $G/DG \xrightarrow{t} H/DH$, anomenat el transferidor.

1.3. Observació. En el cas en què el grup G sigui un grup topològic, el grup quocient G/DG no és, en general, Hausdorff, perquè DG no és, en general, un subgrup tancat. Quan interessa treballar amb grups Hausdorff (com és el nostre cas), convé modificar una mica la definició del morfisme transferidor.

Per a tot grup topològic G, posarem G^c per a indicar l'adherència, en G, del subgrup derivat DG. Llavors, G^c és un subgrup normal tancat de G, i $G^{ab} := G/G^c$ és un grup topològic commutatiu i Hausdorff; s'anomena l'abelianitzat (Hausdorff) de G.

Ara, per a tot subgrup tancat d'índex finit, $H \subseteq G$, el morfisme $G \xrightarrow{t} H/DH \xrightarrow{\text{proj}} H/H^c = H^{ab}$ factoritza a través del quocient $G \xrightarrow{\text{proj}} G^{ab}$ i s'obté el morfisme transferidor $G^{ab} \xrightarrow{t} H^{ab}$.

1.4. Lema. *El transferidor $G^{ab} \xrightarrow{t} H^{ab}$ és un morfisme (continu) de grups topològics Hausdorff commutatius.*

Demostració. Només resta veure la continuïtat de l'aplicació. En primer lloc, tot sistema de representants $s : H\backslash G \to G$ és una aplicació contínua; ara, com que la multiplicació i el pas a l'invers són aplicacions contínues, l'aplicació $G \times G \to H$ donada per $(g, x) \mapsto h_{g,x} = s(Hx)gs(Hxg)^{-1}$ és contínua; de fet, ho és l'aplicació $G \times H\backslash G \to H$ donada per $(g, Hx) \mapsto h_{g,x}$ (recordem que $h_{g,x}$ no depèn de x quan x recorre una classe Hx). Per tant, si escrivim $\mathrm{Im}(s) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (és a dir, triem un ordre en el conjunt finit $\mathrm{Im}(s)$), l'aplicació $G \to H$ donada per $g \mapsto h_{g,x_1} \cdots h_{g,x_n}$ és contínua, de manera que ho és l'aplicació $G \to H/DH$ donada per $g \mapsto h_{g,x_1} \cdots h_{g,x_n}$ (mod DH). Per tant, el morfisme transferidor és continu. $\square$

1.5. Proposició. *Siguin $K \subseteq H \subseteq G$ subgrups tancats d'índexs finits. Llavors, la composició dels morfismes transferidors $G^{ab} \to H^{ab} \to K^{ab}$ és el morfisme transferidor $G^{ab} \to K^{ab}$.*

Demostració. Siguin $s : H\backslash G \to G$, $s' : K\backslash H \to H$ sistemes de representants de $H\backslash G$ en G i de $K\backslash H$ en H, respectivament; llavors, el conjunt $\{yx : y \in \mathrm{Im}(s'), x \in \mathrm{Im}(s)\}$ és la imatge d'un sistema de representants $s'' : K\backslash G \to G$ de $K\backslash G$ en G i se satisfà la propietat que si $y \in \mathrm{Im}(s')$ i $x \in \mathrm{Im}(s)$, llavors $s''(Kyx) = yx = s'(Ky)s(Hx)$. Com que convindrà triar un ordre en $\mathrm{Im}(s)$, posem $\mathrm{Im}(s) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Posem $t_0 : G \to H^{ab}$, $t'_0 : H \to K^{ab}$, $t''_0 : G \to K^{ab}$ els morfismes transferidors $t : G^{ab} \to H^{ab}$, $t' : H^{ab} \to K^{ab}$, $t'' : G^{ab} \to K^{ab}$ abans de passar-los als quocients corresponents (si es vol, t_0 és la composició $G \to G^{ab} \to H^{ab}$ de la projecció $G \to G^{ab}$ amb el morfisme transferidor t, i anàlogament t'_0 i t''_0).

Sigui $g \in G$ un element qualsevol; cal veure que $t''_0(g) = t'(t_0(g))$. En primer lloc, se satisfà la igualtat

$$t_0(g) = \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{H^c} = \prod_{i=1}^{n} h_i \pmod{H^c},$$

on $h_i := h_{g,x_i} \in H$ és l'element de H tal que $s(Hx_i)g = h_i s(Hx_i g)$; llavors, el producte $h_1 \cdots h_n \in H$ és un representant de $t_0(g)$, de manera que $t'(t_0(g)) = t'_0(h_1 \cdots h_n) = t'_0(h_1) \cdots t'_0(h_n) \pmod{K^c}$. Ara bé, per a $1 \leq i \leq n$, és $t'_0(h_i) = \prod_{y \in \mathrm{Im}(s')} k'_{h_i,y} \pmod{K^c}$, on $k'_{h_i,y} \in K$ és l'element de K tal que $s'(Ky)h_i = k'_{h_i,y} s'(Kyh_i)$. Per tant, se satisfà la igualtat

$$t'(t_0(g)) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{y \in \mathrm{Im}(s')} k'_{h_i,y} \pmod{K^c}.$$

D'altra banda,

$$t''_0(g) = \prod_{z \in \mathrm{Im}(s'')} k''_{g,z} \pmod{K^c},$$

on $k''_{g,z} \in K$ és l'element de K tal que $s''(Kz)g = k''_{g,z} s''(Kzg)$; com que $\mathrm{Im}(s'') = \mathrm{Im}(s')\,\mathrm{Im}(s)$, podem escriure la igualtat

$$t''_0(g) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{y \in \mathrm{Im}(s')} k''_{g,yx_i} \pmod{K^c}.$$

Per tant, és suficient veure que, per a $1 \leq i \leq n$ i per a tot $y \in \mathrm{Im}(s')$, és $k''_{g,yx_i} = k'_{h_i,y}$.

Comencem per observar que, per a $y \in \mathrm{Im}(s')$, se satisfan les igualtats

$$\begin{aligned} k''_{g,yx_i} s''(Kyx_i g) &= s''(Kyx_i)g = s'(Ky)s(Hx_i)g \\ &= s'(Ky)h_i s(Hx_i g) = k'_{h_i,y} s'(Kyh_i)s(Hx_i g). \end{aligned}$$

A més a més, en aplicar de nou la multiplicativitat dels sistemes de representants i tenir en compte les igualtats $Ks'(Kyh_i) = Ks'(Ky)h_i$, $Ks'(Ky) = Ky$, $h_i s(Hx_i g) = s(Hx_i)g$, i $s(Hx_i) = x_i$, obtenim que

$$\begin{aligned} s'(Kyh_i)s(Hx_i g) &= s''(Ks'(Kyh_i)s(Hx_i g)) = s''(Ks'(Ky)h_i s(Hx_i g)) \\ &= s''(Kys(Hx_i)g) = s''(Kyx_i g). \end{aligned}$$

En substituir aquesta igualtat en l'anterior, veiem que és $k''_{g,yx_i}s''(Kyx_ig) = k'_{h_i,y}s''(Kyx_ig)$ i, en simplificar el factor $s''(Kyx_ig)$, obtenim la igualtat que cercàvem, $k''_{g,yx_i} = k'_{h_i,y}$. $\square$

La propietat més important del morfisme transferidor que ens caldrà utilitzar fa referència al cas d'un subgrup normal (i d'índex finit) i és donada per la proposició següent.

1.6. Proposició. *Sigui $H \subseteq G$ un subgrup normal tancat d'índex finit. Llavors, la composició $H^{ab} \xrightarrow{incl} G^{ab} \xrightarrow{t} H^{ab}$ s'obté com el pas al quocient de l'aplicació $H \to H/DH$ que envia tot element $g \in H$ al producte dels conjugats de g per representants de les classes de $H\backslash G = G/H$.*

Demostració. Hem de calcular $t(g)$ per a un element $g \in H$, on t és l'aplicació $G \xrightarrow{t} H/DH$ de la qual s'obté el transferidor per pas al quocient. Posem, com més amunt, $G/H = H\backslash G \xrightarrow{s} G$ una secció de la projecció canònica $G \to G/H$, i $t(g) = \prod_{x \in \mathrm{Im}(s)} h_{g,x} \pmod{DH}$, on $s(Hx)g = h_{g,x}\, s(Hxg)$, per a tot $x \in G$. Com que H és un subgrup normal de G, i $g \in H$, és $Hxg = xgH = xH = Hx$; per tant, $h_{g,x} = s(Hx)\, g\, s(Hxg)^{-1} = s(Hx)\, g\, s(Hx)^{-1}$ és el conjugat de g pel representant de la classe Hx. Així, doncs, $t(g)$ és (la classe mòdul H^c de) un producte dels conjugats de g pels representants $s(Hx)$ de les classes de $H\backslash G = G/H$, com calia comprovar. $\square$

§2. Repàs de teoria de cossos de classes

A partir d'aquí, denotarem per F un cos local, o bé un cos global que, sovint, serà un cos de nombres; fixarem una clausura (algebraica) separable $\overline{F}$ de F, i denotarem per $G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ el grup de Galois absolut de F.

En general, considerarem subextensions finites de $\overline{F}|F$, $E|F$, $E'|F$, $E''|F$, ..., i denotarem per $G_E := \mathrm{Gal}(\overline{F}|E) \subseteq G_F$ el grup de Galois absolut de E. En particular, G_E és un subgrup tancat d'índex finit (i, per tant, obert) de G_F, que és normal si, i només si, l'extensió $E|F$ és de Galois.

A més a més, per a cada un dels cossos E que considerarem, posarem

$$C_E := \begin{cases} E^*, & \text{el grup multiplicatiu de } E, \text{ si } F \text{ és un cos local,} \\ \mathbb{A}_E^*/E^*, & \text{el grup de classes d'ideles de } E, \text{ si } F \text{ és un cos global.} \end{cases}$$

2.1. Morfismes induïts per $\sigma \in G_F$. Donats un automorfisme $\sigma \in G_F$ i una extensió $E|F$ finita qualssevol, σ dóna lloc a un morfisme $\sigma : C_E \to C_{E^\sigma}$, injectiu i continu (de fet, un isomorfisme). En el cas en què F és un cos local, el morfisme és evident; en efecte, la restricció a E determina un isomorfisme $\sigma : E \to E^\sigma$, i la restricció a E^* és un isomorfisme $\sigma : E^* \to E^{\sigma *}$.

Sigui, ara, F un cos global; per a cada plaça v de E, siguin E_v la compleció de E respecte de v i v^σ la plaça de E^σ definida per $v^\sigma(x^\sigma) = v(x)$, per a $x \in E$. Llavors, σ s'estén, per continuïtat, a un isomorfisme $\sigma : E_v \to E^\sigma_{v^\sigma}$. Per tant, a nivell de les adeles, σ dóna lloc a un isomorfisme $\sigma : \mathbb{A}_E \to \mathbb{A}_{E^\sigma}$, del qual podem considerar la seva restricció a les ideles, $\sigma : \mathbb{A}_E^* \to \mathbb{A}_{E^\sigma}^*$; i, com que $\sigma : E^* \to E^{\sigma *}$ és isomorfisme, per pas al quocient obtenim l'isomorfisme $\sigma : C_E = \mathbb{A}_E^*/E^* \to \mathbb{A}_{E^\sigma}^*/E^{\sigma *} = C_{E^\sigma}$ que volem.

Així, el morfisme $\sigma : C_E \to C_{E^\sigma}$ és definit, en els components locals E_v de $\mathbb{A}_E$, com l'isomorfisme $\sigma : E_v^* \to E^{\sigma *}_{v^\sigma}$ a nivell de les complecions.

2.2. Morfismes induïts per inclusions. Donats $F \subseteq E \subseteq E'$, amb $E'|F$ finita, la inclusió $E \subseteq E'$ indueix un morfisme natural $C_E \to C_{E'}$, que és la inclusió $E^* \to E'^*$, si F és un cos local, i un morfisme (injectiu i continu) $C_E = \mathbb{A}_E^*/E^* \to \mathbb{A}_{E'}^*/E'^* = C_{E'}$, si F és un cos global. En aquest cas, per a cada plaça v de E (és a dir, en cada component E_v de $\mathbb{A}_E$), el morfisme és tal que σ actua com la restricció de σ_v a E_v. D'altra banda, si $E'|E$ és de Galois i $G := \mathrm{Gal}(E'|E)$, el morfisme $C_E \to C_{E'}$ és G-invariant, i la seva imatge és $C_{E'}^G$.

2.3. Morfismes induïts per la norma. Donats $F \subseteq E \subseteq E'$, la norma $\mathrm{N}_{E'|E} : E' \to E$ dóna lloc a un morfisme de grups (continu), que també denotarem per $N_{E'|E}$, $\mathrm{N}_{E'|E} : C_{E'} \to C_E$. Si F és un cos local, aquest morfisme norma és la restricció de la norma $N_{E'|E}$ al grup E'^*; i, en el cas

d'un cos global, la norma actua, en cada component de $\mathbb{A}_{E'}$, com la norma local $\mathrm{N}_{E'_v|E_{v_E}}$, on v_E indica la restricció a E de la plaça v de E'.

2.4. La llei de reciprocitat. Per a cada E, la teoria de cossos de classes ens proporciona un morfisme continu, $C_E \to G_E^{ab}$, la llei de reciprocitat, que s'obté en passar al límit les lleis de reciprocitat per a les extensions de Galois finites $E'|E$.

Per exemple, en el cas en què F és un cos local, i si $E'|E$ és una extensió finita i de Galois, tenim un isomorfisme canònic (cf. [**Ne 86**, Chap. III, Thm. 2.1])

$$\mathrm{Gal}(E'|E)^{ab} \xrightarrow{R_{E'|E}} E^*/\mathrm{N}_{E'|E}\, E'^*$$

que, en invertir i compondre amb la projecció canònica, ens proporciona el símbol nòrmic local, de nucli $\mathrm{N}_{E'|E}\, E'^*$,

$$C_E = E^* \xrightarrow{\mathrm{proj}} E^*/\mathrm{N}_{E'|E}\, E'^* \xrightarrow{(\quad ,E'|E)} \mathrm{Gal}(E'|E)^{ab}.$$

Anàlogament, en el cas global de cossos de nombres, si $E'|E$ és una extensió finita i de Galois de cossos de nombres, tenim l'isomorfisme canònic (cf. [**Ne 86**, Chap. IV, Thm. 6.5])

$$\mathrm{Gal}(E'|E)^{ab} \xrightarrow{R_{E'|E}} C_E/\mathrm{N}_{E'|E}\, C_{E'}$$

que, en invertir i compondre amb la projecció canònica, ens proporciona el símbol nòrmic global, de nucli $\mathrm{N}_{E'|E}\, C_{E'}$,

$$C_E \xrightarrow{\mathrm{proj}} C_E/\mathrm{N}_{E'|E}\, C_{E'} \xrightarrow{(\quad ,E'|E)} \mathrm{Gal}(E'|E)^{ab}.$$

La compatibilitat dels símbols nòrmics (locals i globals) dóna lloc, per pas al límit, a la llei de reciprocitat

$$C_E \to G_E^{ab} = \varprojlim_{E'} \mathrm{Gal}(E'|E)^{ab}.$$

2.5. La classe canònica o fonamental. Si $E|F$ és una extensió de Galois finita, la formulació mitjançant formacions de la teoria de cossos de classes

li associa un element distingit $\alpha_{E|F} \in H^2(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$, que correspon a $\frac{1}{n}$ per l'isomorfisme canònic $H^2(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on $n := [E : F]$. Aquest element s'anomena la classe canònica o fonamental de $E|F$ (cf. [**Ar-Ta 67**, p. 213], i [**Se 79**, Chap. XIII, §4, p. 196]).

§3. Definició del grup de Weil

Mantindrem les notacions de la secció anterior; en particular, les extensions $E|F$ que considerarem seran finites. Un grup de Weil per a l'extensió $\overline{F}|F$ és una certa modificació del grup de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$. Consta de tres dades sotmeses a certs axiomes. Abans de considerar les dades i els axiomes de la definició, convé establir un resultat previ.

3.1. Lema. *Suposem que W_F és un grup topològic i $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ un morfisme continu de grups que té imatge densa. Per a tot E, posem $W_E := \varphi^{-1}(G_E)$. Llavors:*

(a) W_E és un subgrup obert de W_F;

(b) φ indueix una bijecció d'espais homogenis $W_F/W_E \xrightarrow{\varphi_E} G_F/G_E \simeq \mathrm{Hom}_F(E, \overline{F})$ (que, en conseqüència, són conjunts finits); i

(c) Si $E|F$ és de Galois, la bijecció $W_F/W_E \xrightarrow{\varphi_E} \mathrm{Gal}(E|F)$ és un isomorfisme de grups.

3.2. Observació. $\mathrm{Hom}_F(E, \overline{F})$ denota el conjunt de les F-immersions de E en $\overline{F}$, i coincideix amb el grup de Galois $\mathrm{Gal}(E|F)$ si l'extensió $E|F$ és normal.

Demostració. La demostració de (a) és trivial, perquè φ és una aplicació contínua i G_E és un subgrup obert de G_F (recordem que l'extensió $E|F$ és finita).

Demostrem (b). Siguin $x, y \in W_F$; la igualtat de classes $xW_E = yW_E$ en W_F/W_E equival a la igualtat de classes $\varphi(x)G_E = \varphi(y)G_E$ en G_F/G_E, perquè φ és un morfisme de grups i $W_E = \varphi^{-1}(G_E)$; per tant, l'assignació $xW_E \mapsto \varphi(x)G_E$ defineix una aplicació injectiva $W_F/W_E \xrightarrow{\varphi_E} G_F/G_E$.

Només resta veure que φ_E és exhaustiva. Per a això, considerem una classe lateral $\sigma G_E \in G_F/G_E \simeq \mathrm{Hom}_F(E, \overline{F})$, on $\sigma \in G_F$ és un element qualsevol. Sigui $E'|F$ la clausura normal de l'extensió $E|F$ en $\overline{F}|F$. Llavors, $G_{E'} \subseteq G_E$ i $G_{E'}$ és un subgrup obert (i normal, i d'índex finit) de G_F; per tant, $\sigma G_{E'}$ és un entorn obert de σ en G_F; com que $\mathrm{Im}(\varphi)$ és dens en G_F, és $\sigma G_{E'} \cap \mathrm{Im}(\varphi) \neq \varnothing$; en conseqüència, existeix un element $y \in W_F$ tal que $\varphi(y) \in \sigma G_{E'}$; això és dir que $\varphi(y)G_{E'} = \sigma G_{E'}$ i, com que $G_{E'} \subseteq G_E$, això implica que $\varphi_E(yW_E) = \varphi(y)G_E = \sigma G_E$, fet que demostra que σG_E té antiimatge per φ_E.

Finalment, demostrem (c). Si $E|F$ és de Galois, llavors G_E és un subgrup normal de G_F, de manera que $W_E = \varphi^{-1}(G_E)$ és un subgrup normal de W_F i els espais homogenis G_F/G_E i W_F/W_E són grups; a més a més, per definició, φ_E és un morfisme de grups. $\square$

3.3. Definició. Un grup de Weil per a l'extensió $\overline{F}|F$ és una terna ordenada $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ formada per les dades següents:

(a) Un grup topològic W_F;

(b) Un morfisme continu de grups $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ amb imatge densa; i

(c) Una família $\{r_E\}_E$ d'isomorfismes de grups topològics

$$C_E \xrightarrow{r_E} W_E^{ab} = W_E/W_E^c,$$

on $W_E := \varphi^{-1}(G_E)$ i $E|F$ recorre el conjunt de totes les subextensions finites de $\overline{F}|F$.

A fi que una terna $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ com aquesta sigui un grup de Weil, cal que se satisfacin els quatre axiomes següents:

(1) Per a tot E, el morfisme composició

$$C_E \xrightarrow{r_E, \simeq} W_E^{ab} \xrightarrow{\text{induït per } \varphi} G_E^{ab}$$

és el morfisme "llei de reciprocitat" de la teoria de cossos de classes.

(2) Per a tot element $w \in W_F$, sigui $\sigma := \varphi(w) \in G_F$; llavors, per a tot E, el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E"] \arrow[d, "\text{induït per } \sigma"'] & W_E^{ab} \arrow[d, "\text{conjugació per } w"] \\ C_{E^\sigma} \arrow[r, "r_{E^\sigma}"] & W_{E^\sigma}^{ab}. \end{tikzcd}$$

(3) Per a cada inclusió $E \subseteq E'$, el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E"] \arrow[d, "\text{induït per la inclusió } E\subseteq E'"'] & W_E^{ab} \arrow[d, "\text{transferidor}"] \\ C_{E'} \arrow[r, "r_{E'}"] & W_{E'}^{ab}. \end{tikzcd}$$

(4) L'aplicació natural $W_F \to \varprojlim_E W_{E|F}$, on $W_{E|F} := W_F/W_E^c$ (atenció!, no W_F/W_E), és un isomorfisme de grups topològics.

Això acaba la definició de grup de Weil; però cal fer algunes precisions i observacions.

3.4. Observacions. (a) En general, $W_{E|F}$ només és un espai homogeni, perquè a vegades W_E^c no és un subgrup normal de W_F. Ara bé, si $E|F$ és de Galois, $W_E \subseteq W_F$ és normal i $DW_E \subseteq W_F$ també és normal, de manera que $W_E^c \subseteq W_F$ és un subgrup normal i l'espai homogeni $W_{E|F}$ és un grup topològic.

D'altra banda, el sistema projectiu d'espais homogenis $W_{E|F}$ admet com a sistema cofinal el format per les extensions $E|F$ de Galois, de manera que $\varprojlim_E W_{E|F}$ té una estructura natural de grup topològic: la del límit projectiu. Així, té sentit imposar que l'aplicació natural $W_F \to \varprojlim_E W_{E|F}$ sigui un isomorfisme de grups topològics.

En particular, com que els grups $W_{E|F}$ són Hausdorff, perquè els subgrups $W_E^c \subseteq W_F$ són tancats, el grup topològic $\varprojlim_E W_{E|F}$ és Hausdorff; i, com a conseqüència de l'axioma (4) que imposem, W_F és Hausdorff.

(b) Per a entendre millor la relació estreta entre el grup de Weil i el grup de Galois absolut, observem que se satisfà que $G_F = \varprojlim_E \mathrm{Gal}(E|F) \simeq \varprojlim_E W_F/W_E$. En conseqüència, $W_F \simeq \varprojlim_E W_F/W_E^c$ és una "modificació" del grup de Galois.

De fet, si E és de Galois, la composició de les projeccions naturals amb els morfismes induïts per φ proporciona morfismes $W_{E|F} = W_F/W_E^c \to$

$W_F/W_E \xrightarrow{\simeq,\,\varphi_E} \mathrm{Gal}(E|F)$ que formen un morfisme de sistemes projectius; per tant, en general, disposem d'un morfisme natural

$$\varprojlim_E W_{E|F} \xrightarrow{\text{induït per } \varphi} \varprojlim_E \mathrm{Gal}(E|F) = G_F,$$

de manera que (re)construïm el morfisme $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ en la forma

$$W_F \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_E W_{E|F} \xrightarrow{\text{induït per } \varphi} G_F.$$

(c) Convé veure més detalladament quins són els morfismes de (2). Donat un element qualsevol $w \in W_F$, sigui $\sigma := \varphi(w) \in G_F$; per a cada E, és $\sigma G_E \sigma^{-1} = G_{E^\sigma}$; en particular, si $x \in W_E$, és $\varphi(wxw^{-1}) = \sigma\varphi(x)\sigma^{-1} \in G_{E^\sigma}$, de manera que $wxw^{-1} \in W_{E^\sigma}$. Així, w indueix un morfisme (conjugació per w) $W_E \xrightarrow{\text{conj per } w} W_{E^\sigma}$; i, en conseqüència, per pas al quocient, un morfisme $W_E^{ab} \xrightarrow{\text{conj per } w} W_{E^\sigma}^{ab}$. En (2) es demana que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E,\simeq"] \arrow[d, "\text{induït per } \sigma"'] & W_E^{ab} \arrow[d, "\text{conjugació per } w"] \\ C_{E^\sigma} \arrow[r, "r_{E^\sigma},\simeq"] & W_{E^\sigma}^{ab} \end{tikzcd}$$

sigui commutatiu per a tot E i tot $w \in W_F$, on $\sigma := \varphi(w)$ i el morfisme $C_E \to C_{E^\sigma}$ és l'induït per σ (cf. **2.1**).

3.5. Proposició. *Suposem que $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ és un grup de Weil per a $\overline{F}|F$. Si, per a cada E, considerem $W_E \xrightarrow{\varphi} G_E$ la restricció de $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ a W_E, i $\{r_{E'}\}_{E'}$ designa la família dels isomorfismes $r_{E'}$ per a $E' \supseteq E$, llavors $(W_E, \varphi, \{r_{E'}\}_{E'})$ és un grup de Weil per a $\overline{F}|E$.*

Demostració. Posem, momentàniament en aquesta demostració, $\varphi' := \varphi|_{W_E}$, la restricció a W_E del morfisme φ. Primer, cal veure que $\mathrm{Im}(\varphi')$ és un subgrup dens de G_E. Per a això, és suficient veure que $\mathrm{Im}(\varphi')$ talla tot entorn bàsic de qualsevol element $\sigma \in G_E$; dit d'una altra manera, n'hi ha prou si comprovem que per a tota extensió de Galois finita $E'|E$, i tot element $\sigma \in G_E$, és $\mathrm{Im}(\varphi') \cap \sigma G_{E'} \neq \varnothing$.

Ara bé, si designem per $E''|F$ la clausura galoisiana de $E'|F$, és $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \sigma G_{E''} \neq \varnothing$ (perquè $\sigma G_{E''}$ és un entorn bàsic de σ en G_F i $\mathrm{Im}(\varphi)$ és dens en G_F); com que

$$\mathrm{Im}(\varphi)\cap\sigma G_{E''}\subseteq\mathrm{Im}(\varphi)\cap\sigma G_{E'}=\mathrm{Im}(\varphi)\cap G_E\cap\sigma G_{E'}=\mathrm{Im}(\varphi')\cap\sigma G_{E'},$$

és $\mathrm{Im}(\varphi')\cap\sigma G_{E'}\neq\varnothing$, com volíem veure.

En segon lloc, si $E\subseteq E'$, és $W_{E'}=\varphi^{-1}(G_{E'})=\varphi'^{-1}(G_{E'})$, de manera que els subgrups $W_{E'}$ són els mateixos per a φ i per a φ'. En particular, també ho són els quocients $W_{E'}^{ab}$ i els isomorfismes $C_{E'}\xrightarrow{r_{E'}}W_{E'}^{ab}$, i també els morfismes $W_{E'}\to G_{E'}^{ab}$ induïts per φ i per φ'. Per tant, els axiomes (1), (2) i (3) se satisfan trivialment.

Veiem com l'axioma (4) es dedueix del fet que el morfisme φ es reconstrueix com la composició

$$W_F\xrightarrow{\simeq}\varprojlim_{E'}W_F/W_{E'}^c\to\varprojlim_{E'}W_F/W_{E'}\xrightarrow{\text{induït per }\varphi,\simeq}\varprojlim_{E'}G_F/G_{E'}\simeq G_F,$$

on el límit es pot prendre sobre les extensions finites $E'|F$.

En primer lloc, observem que podem limitar-nos a considerar les extensions finites $E'|F$ tals que $E'\supseteq E$ i $E'|F$ és de Galois, ja que aquestes extensions proporcionen sistemes cofinals.

D'altra banda, la inclusió $W_E\to W_F$ indueix un diagrama commutatiu de morfismes de grups topològics

$$\begin{tikzcd}
W_E \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{incl}"'] & \varprojlim_{E'}\dfrac{W_E}{W_{E'}^c} \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_{E'}\dfrac{W_E}{W_{E'}} \arrow[r, "\simeq,\varphi'"] \arrow[d, "\mathrm{incl}"] & \varprojlim_{E'}\dfrac{G_E}{G_{E'}}\simeq G_E \arrow[d, "\mathrm{incl}"] \\
W_F \arrow[r, "\simeq"] & \varprojlim_{E'}\dfrac{W_F}{W_{E'}^c} \arrow[r] & \varprojlim_{E'}\dfrac{W_F}{W_{E'}} \arrow[r, "\simeq,\varphi"] & \varprojlim_{E'}\dfrac{G_F}{G_{E'}}\simeq G_F,
\end{tikzcd}$$

on el morfisme inferior és φ i el superior és φ'.

Com que el morfisme composició

$$W_E\xrightarrow{\mathrm{incl}}W_F\xrightarrow{\simeq}\varprojlim_{E'}\frac{W_F}{W_{E'}^c}$$

és injectiu, obtenim immediatament la injectivitat del morfisme natural

$$W_E\to\varprojlim_{E'}\frac{W_E}{W_{E'}^c};$$

veiem-ne, ara, l'exhaustivitat. Donat un element qualsevol $y \in \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$, la seva imatge en $\varprojlim_{E'} \frac{W_F}{W_{E'}^c}$ és la imatge d'un (únic) element $x \in W_F$; ara bé, la imatge de y en G_F pertany a G_E, de manera que $\varphi(x) \in G_E$ i, en conseqüència, $x \in W_E$. Si escrivim y en la forma de sistema coherent, $y = (x_{E'}W_{E'}^c)_{E'}$, de classes $x_{E'}W_{E'}^c \in \frac{W_E}{W_{E'}^c}$, amb $x_{E'} \in W_E$, llavors la imatge en $\varprojlim_{E'} \frac{W_F}{W_{E'}^c}$ és el sistema coherent $(x_{E'}W_{E'}^c)_{E'}$, amb $x_{E'}W_{E'}^c \in \frac{W_F}{W_{E'}^c}$; però aquest sistema és la imatge de l'element $x \in W_E$; és a dir, $x_{E'}W_{E'}^c = xW_{E'}^c$, per a tot E'. Per tant, $y = (xW_{E'}^c)_{E'}$, fet que demostra que y és imatge de x i, per tant, l'exhaustivitat del morfisme $W_E \to \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$.

Finalment, de la bijectivitat ja provada del morfisme $W_E \to \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$, de la commutativitat del diagrama

$$\begin{tikzcd} W_E \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{incl}"'] & \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c} \arrow[d] \\ W_F \arrow[r, "\simeq"] & \varprojlim_{E'} \frac{W_F}{W_{E'}^c}, \end{tikzcd}$$

i del fet que l'aplicació $W_F \to \varprojlim_{E'} \frac{W_F}{W_{E'}^c}$ és isomorfisme, es dedueix que el morfisme de grups invers $W_E \leftarrow \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$ també és continu, de manera que, efectivament, $W_E \to \varprojlim_{E'} \frac{W_E}{W_{E'}^c}$ és un isomorfisme de grups topològics. $\square$

3.6. Proposició. *Sigui $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ un grup de Weil per a $\overline{F}|F$. Per a les extensions de Galois finites $E \subseteq E'$, el diagrama següent és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} C_{E'} \arrow[r, "r_{E'}"] \arrow[d, "\text{induït per la norma } \mathrm{N}_{E'|E}"'] & W_{E'}^{ab} \arrow[d, "\text{induït per la inclusió } W_{E'} \subseteq W_E"] \\ C_E \arrow[r, "r_E"] & W_E^{ab}. \end{tikzcd}$$

Demostració. Com que l'extensió $E'|E$ és normal i finita, tenim que $G_{E'} \subseteq G_E$ és un subgrup normal tancat i d'índex finit, de manera que

$W_{E'} \subseteq W_E$ és un subgrup normal tancat i d'índex finit; en virtut de la proposició **1.6**, el morfisme composició

$$W_{E'}^{ab} \xrightarrow{i'} W_E^{ab} \xrightarrow{t} W_{E'}^{ab},$$

on i' és el morfisme induït per la inclusió $W_{E'} \subseteq W_E$, és tal que, per a tot $x \in W_{E'}$ és $(t \circ i')(xW_{E'}^c) = \prod_{\omega \in W_E/W_{E'}} (\omega x \omega^{-1}) \pmod{W_{E'}^c}$.

D'altra banda, disposem d'un diagrama commutatiu

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} C_E & \xrightarrow{r_E,\simeq} & W_E^{ab} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ C_{E'} & \xrightarrow{r_{E'},\simeq} & W_{E'}^{ab}, \end{array}$$

on i és el morfisme induït per la inclusió $E \subseteq E'$ (cf. l'axioma (3) de la definició de grup de Weil); en particular, i és un morfisme injectiu i, en conseqüència, el morfisme transferidor $W_E^{ab} \xrightarrow{t} W_{E'}^{ab}$ és injectiu.

Ara, la composició

$$f : C_{E'} \xrightarrow{r_{E'},\simeq} W_{E'}^{ab} \xrightarrow{i'} W_E^{ab} \xrightarrow{t} W_{E'}^{ab} \xrightarrow{r_{E'}^{-1},\simeq} C_{E'}$$

és tal que, per a $c \in C_{E'}$, és $f(c) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|E)} c^\sigma = \mathrm{N}_{E'|E}\, c \in C_{E'}$. En efecte, si $x \in W_{E'}$ és un representant de $r_{E'}(c)$, tenim que

$$\begin{aligned} f(c) &= r_{E'}^{-1}\Big(\prod_{\omega \in W_E/W_{E'}} \omega x \omega^{-1} \pmod{W_{E'}^c}\Big) \\ &= \prod_{\omega \in W_E/W_{E'}} r_{E'}^{-1}(\omega x \omega^{-1} \pmod{W_{E'}^c}). \end{aligned}$$

En virtut de l'axioma (2) de la definició, $r_{E'}^{-1}(\omega x \omega^{-1} \pmod{W_{E'}^c}) = c^\sigma$, on $\sigma := \varphi(\omega) \in G_E/G_{E'} = \mathrm{Gal}(E'|E)$, de manera que, efectivament, com que $\dfrac{W_E}{W_{E'}} \simeq \mathrm{Gal}(E'|E)$, és $f(c) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|E)} c^\sigma = \mathrm{N}_{E'|E}\, c \in C_{E'}$.

Així, hem provat la commutativitat del diagrama

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} C_{E'} & \xrightarrow{r_{E'},\simeq} & W_{E'}^{ab} \\ {\scriptstyle \mathrm{N}_{E'|E}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ C_E & & W_E^{ab} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ C_{E'} & \xrightarrow[r_{E'},\simeq]{} & W_{E'}^{ab}, \end{array}$$

on $\mathrm{N}_{E'|E}$ és el morfisme induït per la norma $\mathrm{N}_{E'|E} : E' \to E$ (cf. **2.3**). La injectivitat de t, juntament amb la commutativitat dels diagrames (*) i (**), ens proporciona, doncs, la commutativitat del diagrama

$$\begin{tikzcd} C_{E'} \arrow[r, "r_{E'}, \simeq"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{E'|E}"'] & W_{E'}^{ab} \arrow[d, "i'"] \\ C_E \arrow[r, "r_E, \simeq"'] & W_E^{ab}, \end{tikzcd}$$

com volíem veure. □

§4. Construcció de grups de Weil

La construcció de grups de Weil, que en demostra l'existència, és una construcció cohomològica. En particular, d'ella es dedueix que els grups de Weil contenen, en la seva definició i la seva existència, la cohomologia de la teoria de cossos de classes. Veiem un esbós d'aquesta construcció.

Suposem que $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ és un grup de Weil per a $\overline{F}|F$. Llavors, per a tota extensió de Galois finita $E|F$, el grup $W_{E|F} = W_F/W_E^c$ és una extensió del grup $\mathrm{Gal}(E|F) = G_F/G_E \simeq W_F/W_E$ pel grup $C_E \xrightarrow{r_E, \simeq} W_E^{ab} = W_E/W_E^c$; és a dir, per a tota extensió de Galois finita $E|F$ es té una successió exacta

$$(*) \qquad 1 \to C_E \to W_{E|F} \to \mathrm{Gal}(E|F) \to 1,$$

on els morfismes són les composicions

$$C_E \xrightarrow{r_E, \simeq} W_E^{ab} = W_E/W_E^c \xrightarrow{\text{incl}} W_F/W_E^c = W_{E|F}$$

i

$$W_F/W_E^c \xrightarrow{\text{proj}} W_F/W_E \xrightarrow{\varphi, \simeq} G_F/G_E \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Gal}(E|F).$$

A més a més, si $E \subseteq E'$ i $E'|F$ també és finita i de Galois, i en virtut de la proposició **3.6**, es disposa d'un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & C_{E'} \arrow[r] \arrow[d, "\text{induït per } \mathrm{N}_{E'|E}"'] & W_{E'|F} \arrow[r, "\text{induït per } \varphi"] \arrow[d, "\text{induït per } W_{E'} \subseteq W_E"] & \mathrm{Gal}(E'|F) \arrow[r] \arrow[d, "\text{induït per } E \subseteq E'"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & C_E \arrow[r] & W_{E|F} \arrow[r, "\text{induït per } \varphi"'] & \mathrm{Gal}(E|F) \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Així, a fi de recuperar W_F com el límit projectiu $W_F \simeq \varprojlim_E W_F/W_E^c$, convindria identificar quina extensió de $\mathrm{Gal}(E|F)$ per C_E és cadascun dels quocients $W_{E|F}$ i quins són els morfismes de pas entre aquests quocients (cf. l'axioma (4) de la definició de grup de Weil i l'observació **3.4**, (b)).

Sigui $\alpha_{E|F} \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ la classe de cohomologia que correspon a l'extensió (*). Per a tot nombre enter n, sigui

$$(**) \qquad \mathrm{H}^n(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha_n(E|F)} \mathrm{H}^{n+2}(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$$

el morfisme natural donat pel cup producte amb $\alpha_{E|F}$.

4.1. Proposició. *Per a tot nombre enter n, $\alpha_n(E|F)$ és un isomorfisme.*

Demostració. Ja hem fet notar que el morfisme $C_F \to C_E$ induït per la inclusió $F \subseteq E$ és un morfisme de grups injectiu, invariant per a l'acció de $G := \mathrm{Gal}(E|F)$, i que la seva imatge és exactament C_E^G (cf. **2.2**). Com a conseqüència, l'axioma (3) de la definició de grup de Weil ens diu que el morfisme transferidor $W_F^{ab} \xrightarrow{t} W_E^{ab}$ és injectiu i que la seva imatge és exactament $r_E(C_E^G)$. Així, podem aplicar [**Ar-Ta 67**, cor., p. 184], i obtenim que:

(a) $\alpha_{-2}(E|F) : \mathrm{H}^{-2}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ és un isomorfisme; i

(b) $\alpha_{-3}(E|F) : \mathrm{H}^{-3}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ és exhaustiu.

D'altra banda, com que $H^{-1}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) = 0$ (cf. [**Se 79**, p. 127 i p. 128]), obtenim trivialment que

(c) $\alpha_{-1}(E|F) : \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ és injectiu.

Sigui $\varphi : C_E \times \mathbb{Z} \to C_E$ l'aplicació $\mathbb{Z}$-bilineal definida per l'assignació $\varphi(x, n) = x^n$; clarament, φ és invariant per a l'acció de $\mathrm{Gal}(E|F)$ (que és trivial en $\mathbb{Z}$); llavors, per [**Se 79**, Thm. 13, p. 148], obtenim que $\alpha_n(E|F) : \mathrm{H}^n(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{n+2}(\mathrm{Gal}(E|F), C_E)$ és isomorfisme, per a tot nombre enter n, com volíem demostrar. □

A més a més, també per teoremes abstractes de cohomologia (cf. [**Ar-Ta 67**, Thm. 6, p. 188]), s'obté que les classes de cohomologia $\alpha_{E|F}$, $\alpha_{E'|F}$, i $\alpha_{E'|E}$ estan relacionades per les fórmules

$$(***) \qquad \operatorname{infl}\alpha_{E|F} = [E' : E]\alpha_{E'|F}, \qquad \operatorname{res}\alpha_{E'|F} = \alpha_{E'|E},$$

on infl i res són els morfismes inflació i restricció de la cohomologia de grups, tal com apareixen a la teoria de cossos de classes.

Així, implícita en l'existència de grups de Weil, hi ha la cohomologia de la teoria de cossos de classes.

4.2. Exemples. (a) Prenem $n = -1$ en (**); s'obté un isomorfisme $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) \simeq \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z}) = 0$.

(b) Prenem $n = 0$; s'obté que $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z})$ és un grup cíclic d'ordre $[E : F]$, i que és generat per la classe $\alpha_{E|F}$ (cf. [**Se 79**, p. 127]).

(c) Prenem $n = -2$; s'obté un isomorfisme $\mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) \simeq \mathrm{H}^{-2}(\mathrm{Gal}(E|F), \mathbb{Z})$, és a dir, $C_F/\mathrm{N}_{E|F}C_E \simeq \mathrm{Gal}(E|F)^{ab}$, que, en virtut de (1) de la definició de grup de Weil, és donat per la llei de reciprocitat de la teoria de cossos de classes.

En particular, si l'extensió $E|F$ és cíclica, aquest isomorfisme determina la classe $\alpha_{E|F}$ i se segueix que $\alpha_{E|F}$ és la classe canònica o fonamental de la teoria de cossos de classes (cf. [**Se 79**, Chap. XI, §3]). Un argument estàndard d'inflació en aquesta teoria demostra que això mateix és cert per a tota extensió de Galois (no necessàriament cíclica) $E|F$.

Així, l'existència del grup de Weil determina unívocament les (classes de les) extensions (*).

Recíprocament, suposem que per a totes les extensions de Galois finites, $E'|E$, tenim classes de cohomologia $\alpha_{E'|E} \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(E'|E), C_{E'})$ que satisfan les condicions de (***) i tals que els morfismes $\alpha_n(E'|E)$ de (**) són isomorfismes. Aquestes propietats de compatibilitat ens permeten construir un grup de Weil W_F com el límit projectiu de les extensions de grups $W_{E|F}$ que corresponen a aquestes classes. La construcció abstracta es pot veure amb detall en [**Ar-Ta 67**, Chap. XIV], així com també l'existència d'aquestes classes de cohomologia (cf. també [**Ta 79**] i [**Ca-Fr 67**]).

§5. Unicitat dels grups de Weil

La unicitat dels grups de Weil s'estableix, com és habitual, mòdul isomorfismes.

5.1. Proposició. *Siguin* $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$, $(W'_F, \varphi', \{r'_E\}_E)$ *dos grups de Weil per a* $\overline{F}|F$. *Existeix un isomorfisme de grups topològics* $W_F \xrightarrow{\theta,\simeq} W'_F$ *tal que els diagrames següents són commutatius:*

$$\begin{tikzcd} W_F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta,\simeq"'] & G_F \arrow[d, "="] \\ W'_F \arrow[r, "\varphi'"] & G_F, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E,\simeq"] \arrow[d, "="'] & W_E^{ab} \arrow[d, "\text{induït per } \theta,\simeq"] \\ C_E \arrow[r, "r'_E,\simeq"] & (W'_E)^{ab}. \end{tikzcd}$$

Demostració (Esbós). Per a cada extensió de Galois finita $E|F$, posem $I(E)$ per a indicar el conjunt de tots els isomorfismes de grups topològics $W_{E|F} \xrightarrow{f_{E|F}} W'_{E|F}$ tals que el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & C_E \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & W_{E|F} \arrow[r] \arrow[d, "f_{E|F}"'] & \mathrm{Gal}(E|F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & C_E \arrow[r] & W'_{E|F} \arrow[r] & \mathrm{Gal}(E|F) \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Com que les dues extensions de grups $W_{E|F}$ i $W'_{E|F}$ tenen associada la mateixa classe de cohomologia (la classe fonamental $\alpha_{E|F}$), el conjunt $I(E)$ és no buit.

A més a més, el fet que $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(E|F), C_E) = 0$ ens diu que un isomorfisme $f_{E|F}$ és determinat llevat de la composició amb un automorfisme intern de $W_{E|F}$ donat per un element de $C_E \simeq W_E^{ab}$. El centre de $W_{E|F}$ és C_F i C_E/C_F és compacte; per tant, $I(E)$ és un espai homogeni principal i, en conseqüència, té una topologia natural compacta. A més a més, per a $E \subseteq E'$, l'aplicació natural $I(E') \to I(E)$ és contínua per a aquesta topologia, fet que fa que el límit projectiu $\varprojlim_E I(E)$ sigui no buit.

Ara, un element $\theta \in \varprojlim_E I(E)$ té les propietats requerides; en efecte, com que, per l'axioma (4), disposem d'isomorfismes $W_F \simeq \varprojlim_E W_{E|F}$ i $W'_F \simeq \varprojlim_E W'_{E|F}$, en passar al límit, obtenim que $W_F \xrightarrow{\theta,\simeq} W'_F$; és a

dir, θ és un isomorfisme. La commutativitat dels diagrames es dedueix immediatament de la construcció de θ. $\square$

5.2. Observació. A més a més, si θ' és un altre isomorfisme, existeix un element $w \in \operatorname{Ker}\varphi$ tal que $\theta' = \theta \circ \psi_w$, on $W_F \xrightarrow{\psi_w} W_F$ és l'automorfisme intern (conjugació) definit per w (cf. [**Ta 79**, §1.5]).

§6. Casos especials

Ens interessen, sobretot, el cas en què F és un cos local i el cas en què F és un cos de nombres; per al cas (global, que no considerarem) en què F és un cos de funcions, hom pot veure [**Ta 79**, §1.4].

En primer lloc, considerarem el cas en què F és un cos local no arquimedià; és a dir, un cos extensió finita de $\mathbb{Q}_p$, per a algun nombre primer p. En aquest cas, és $\overline{F} = \overline{\mathbb{Q}}_p$ i el grup de Weil W_F de $\overline{F}|F$ s'obté en substituir $\operatorname{Gal}(F^{nr}|F)$ per les potències de l'automorfisme de Frobenius. Veiem de quina manera es fa això.

Comencem per fixar les notacions: per a cada extensió finita $E|F$, $E \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$, posarem k_E per a designar el cos residual de E, i $q_E := \#k_E$; per simplicitat, escriurem $k := k_F$ i $q := q_F$, de manera que el cos residual de F és $k_F = k = \mathbb{F}_q$. Llavors, $\overline{k} := \bigcup_E k_E = \overline{\mathbb{F}}_q = \overline{\mathbb{F}}_p$. Indicarem per v la valoració de F normalitzada, com és habitual, de manera que el grup de valors de F^* sigui $\mathbb{Z}$. Siguin $\mathcal{O}_E$, $\mathfrak{m}_E$, respectivament, l'anell de la valoració i l'ideal maximal de E, de manera que $k_E = \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E$.

L'extensió no ramificada maximal $F^{nr}|F$ ens proporciona un cos F^{nr} amb una valoració discreta que estén la valoració de F, valoració que també denotarem per v; el cos F^{nr} no és complet per a v (cf. [**Wa 97**, Chap. 5, prop. 5.1]), i el cos residual $\mathcal{O}^{nr}/\mathfrak{m}^{nr}$ és isomorf a $\overline{k}$. De manera més precisa, si v designa una extensió de v a una valoració de $\overline{F}$ (no discreta), i $\overline{\mathcal{O}}_F$, $\overline{\mathfrak{m}}_F$ indiquen, respectivament, l'anell de la valoració i l'ideal maximal, hom té un morfisme de grups exhaustiu i continu $\operatorname{Gal}(\overline{F}|F) \to \operatorname{Gal}(\overline{k}|k)$ donat per $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$, on $\overline{\sigma}$ és la reducció mòdul $\overline{\mathfrak{m}}_F$ de la restricció de σ a $\overline{\mathcal{O}}_F$.

El nucli d'aquest morfisme és $I_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}|F^{nr})$, la inèrcia de F, de manera que $\mathrm{Gal}(F^{nr}|F) \simeq G_F/I_F \simeq \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$. Ara bé, és ben conegut (cf., per exemple, [**Ne 86**, Chap. II, §2, ex. (6)]) que $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ i que $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ és generat topològicament per l'automorfisme de Frobenius $\mathrm{Fr}_q : \overline{k} \to \overline{k}$, donat per $\mathrm{Fr}_q(x) = x^q$, per a tot element $x \in \overline{k}$. Això és dir que $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ és l'adherència del subgrup (isomorf a $\mathbb{Z}$) generat per Fr_q. Anàlogament, $\mathrm{Gal}(F^{nr}|F) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ és generat topològicament per un automorfisme Fr de F^{nr}, l'automorfisme de Frobenius de F^{nr}, que és l'únic automorfisme de F^{nr} tal que $v(\mathrm{Fr}(x) - x^q) > 0$, per a tot element $x \in \mathcal{O}^{nr}$.

6.1. Observació. No és cert que tot element $\sigma \in \mathrm{Gal}(F^{nr}|F)$ (o bé $\overline{\sigma} \in \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$) sigui una potència de l'automorfisme de Frobenius. De fet, els elements de $\widehat{\mathbb{Z}}$ són successions coherents $(a_n)_n$, $a_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, i no és cert que $\lim_n a_n \in \mathbb{Z}$, per a tota successió coherent $(a_n)_n \in \widehat{\mathbb{Z}}$ (cf. [**Ne 86**, Chap. I, §1, p. 1]).

6.2. Definició. Sigui W_F el subgrup de $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ format pels automorfismes σ de $\overline{F}$ tals que $\overline{\sigma}$ és alguna potència de l'automorfisme de Frobenius Fr_q; és a dir,

$$\begin{aligned} W_F &= \{\sigma \in G_F : \exists n \in \mathbb{Z}, \overline{\sigma} = \mathrm{Fr}_q^n\} \\ &= \{\sigma \in G_F : \exists n \in \mathbb{Z}, \sigma_{|F^{nr}} = \mathrm{Fr}^n\}. \end{aligned}$$

Dit d'una altra manera, W_F és l'antiimatge del subgrup $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle$ pel morfisme de reducció $G_F \to \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$, i la del subgrup $\langle \mathrm{Fr} \rangle$ per la projecció $G_F \to G_F/I_F = \mathrm{Gal}(F^{nr}|F)$.

Se satisfan les propietats següents, que recollim juntes per comoditat.

6.3. Proposició.

(a) $I_F \subseteq W_F$ *és un subgrup normal.*

(b) $W_F/I_F \simeq \mathbb{Z}$.

(c) $W_F = \langle I_F, \mathrm{Fr} \rangle$, *on* $\mathrm{Fr} \in G_F$ *és qualsevol extensió a* $\overline{F}$ *de l'automorfisme de Frobenius* Fr *de* F^{nr}.

(d) $W_F \subseteq G_F$ *és un subgrup dens.*

DEMOSTRACIÓ. Observem, en primer lloc, que $I_F = \mathrm{Ker}(G_F \to \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ és un subgrup normal tancat de G_F; a més a més, com que W_F és l'antiimatge del subgrup $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle$ de $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$, és clar que $I_F \subseteq W_F$, que és un subgrup normal, i que $W_F/I_F \simeq \langle \mathrm{Fr}_q \rangle \simeq \mathbb{Z}$; això prova (a) i (b). D'altra banda, el mateix argument ens ensenya que $W_F = \langle I_F, \mathrm{Fr} \rangle$ per a qualsevol extensió a $\overline{F}$ de l'automorfisme de Frobenius Fr de F^{nr}; això és (c). Finalment, l'adherència de W_F conté tots els elements de G_F que es projecten en l'adherència de $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle$; com que l'adherència de $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle$ en $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ és tot el grup, obtenim que l'adherència de W_F és tot G_F, com calia demostrar $\square$

Per a definir el grup de Weil per a l'extensió $\overline{F}|F$ ens cal, a més del grup W_F, un morfisme continu $\varphi : W_F \to G_F$ amb imatge densa i la família d'isomorfismes $\{r_E\}_E$. Per a φ, prendrem la inclusió $\varphi : W_F \to G_F$; a més a més, el símbol nòrmic $r_E := (\ , E^{ab}|) : E^* \to W_E^{ab}$ **és l'iso**morfisme de reciprocitat de la teoria de cossos de classes (cf. [**Ne 86**, Chap. III, §9, Thm. 9.2]), per a tota extensió finita $E|F$.

6.4. Exercici. Per a tota extensió finita $E|F$, sigui $E^* \xrightarrow{r_E} W_E^{ab}$ l'isomorfisme de reciprocitat. Llavors, $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ és el grup de Weil per a $\overline{F}|F$.

6.5. Observació. Pel que fa referència al signe de la llei de reciprocitat, posarem que $r_E(u)$ actua com $x \mapsto x^{|u|}$ en $\overline{k}$, on $|u| := q_E^{-v_E(u)}$, $u \in E$, és el valor absolut usual de E, normalitzat de manera que el valor absolut d'un element uniformitzador és q_E^{-1}. D'aquesta manera, els elements uniformitzadors s'apliquen en l'invers de l'automorfisme de Frobenius.

A continuació, considerarem els casos locals arquimedians; és a dir, $F = \mathbb{C}$ i $F = \mathbb{R}$.

6.6. El grup de Weil en el cas $F = \mathbb{C}$. Sigui $F = \mathbb{C}$; llavors, l'única extensió $E|F$ que s'ha de considerar és l'extensió trivial $E = F = \mathbb{C}$; en particular, el grup de Weil és de la forma $(W_{\mathbb{C}}, \varphi, r_{\mathbb{C}})$, on $\varphi : W_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{C}) = \{1\}$ ha de ser el morfisme trivial, i $r_{\mathbb{C}} : C_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* \to W_{\mathbb{C}}^{ab}$ l'isomorfisme de reciprocitat.

La propietat que $W_F = \varprojlim_E \frac{W_F}{W_E^c}$ ens diu, ara, que $W_{\mathbb{C}} = \frac{W_{\mathbb{C}}}{W_{\mathbb{C}}^c} = W_{\mathbb{C}}^{ab}$ és abelià, i, com que $W_{\mathbb{C}}^{ab} \simeq C_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$, això obliga a prendre $W_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^*$; per tant, obtenim immediatament el resultat següent:

6.7. Proposició. *El grup de Weil de $\mathbb{C}$ és la terna $(\mathbb{C}^*, \varphi, r_{\mathbb{C}})$, on $\varphi := 1 : \mathbb{C}^* \to \{1\}$ és el morfisme trivial, i $r_{\mathbb{C}} := \mathrm{id} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*)$ és la identitat.* $\square$

6.8. Observació. Així com en el cas local no arquimedià el grup de Weil és un subgrup del grup de Galois, en el cas $F = \mathbb{C}$ el grup de Weil és "enorme" comparat amb el grup de Galois. Això també succeeix en el cas $F = \mathbb{R}$ i en el cas en què F és un cos de nombres (cf. més avall).

6.9. El grup de Weil en el cas $F = \mathbb{R}$. Sigui $F = \mathbb{R}$; l'únic cos $E \neq F$ que s'ha de considerar és $E = \mathbb{C}$, i ja sabem quin grup ha de ser $W_{\mathbb{C}}$. Sigui c la conjugació complexa, de manera que $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) = \{1, c\}$. Veiem com ha de ser el grup de Weil $W_{\mathbb{R}}$.

Com que $\varphi : W_R \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ ha de tenir imatge densa i $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ és discret (finit), φ ha de ser exhaustiu; a més a més, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(1) = W_{\mathbb{C}}$, de manera que $\mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}}$ ha de ser un subgrup d'índex 2 de $W_{\mathbb{R}}$. Així, si $j \in W_{\mathbb{R}}$ és un element qualsevol tal que $\varphi(j) = c$, tenim que $W_{\mathbb{R}}$ és la reunió de les dues classes laterals $W_{\mathbb{C}}$ i $jW_{\mathbb{C}}$; és a dir, $W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{C}} \cup jW_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* \cup j\mathbb{C}^*$.

D'altra banda, l'axioma (2) de la definició de grup de Weil ens proporciona el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^* = C_{\mathbb{C}} \arrow[r, "r_{\mathbb{C}}=\mathrm{id}"] \arrow[d, "c"'] & \mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}}^{ab} = W_{\mathbb{C}} \arrow[d, "\text{conjugació per } j"] \\
\mathbb{C}^* = C_{\mathbb{C}} \arrow[r, "r_{\mathbb{C}}=\mathrm{id}"'] & \mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}}^{ab} = W_{\mathbb{C}};
\end{tikzcd}$$

per tant, la conjugació per j en $W_{\mathbb{C}} \subseteq W_{\mathbb{R}}$ és la conjugació complexa; és a dir, per a tot $z \in \mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}} \subseteq W_{\mathbb{R}}$, és $jzj^{-1} = c(z)$.

Fem servir, ara, l'axioma (3) de la definició de grup de Weil; obtenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* = C_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{r_{\mathbb{R}},\simeq} & W_{\mathbb{R}}^{ab} \\ {\scriptstyle \mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ \mathbb{C}^* = C_{\mathbb{C}} & \xrightarrow[r_{\mathbb{C}}=\mathrm{id}]{} & W_{\mathbb{C}}^{ab} = W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*, \end{array}$$

de manera que, per ser $r_{\mathbb{R}}$ un isomorfisme, la imatge del morfisme transferidor $W_{\mathbb{R}}^{ab} \xrightarrow{t} \mathbb{C}^*$ és exactament $\mathbb{R}^*$. Calculem, doncs, el morfisme transferidor. Per a això, prenem com a sistema de representants de les classes laterals de $W_{\mathbb{C}}\backslash W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{R}}/W_{\mathbb{C}}$ el conjunt $\{1, j\}$, de manera que $s : W_{\mathbb{C}}\backslash W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ és l'aplicació $s(z) = 1$, si $z \in \mathbb{C}^*$, $s(jz) = j$, si $z \in \mathbb{C}^*$.

Hem de calcular, a continuació, els elements $h_{g,x} \in W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ tals que $s(W_{\mathbb{C}}x)g = h_{g,x}s(W_{\mathbb{C}}xg)$, per a $x, g \in W_{\mathbb{R}}$; i podem limitar-nos a $x \in \{1, j\}$. Ara bé, se satisfan les igualtats

$$g = s(W_{\mathbb{C}}1)g = h_{g,1}s(W_{\mathbb{C}}g), \qquad jg = s(W_{\mathbb{C}}j)g = h_{g,j}s(W_{\mathbb{C}}jg),$$

per a tot $g \in W_{\mathbb{R}}$. Si $g = z \in \mathbb{C}^*$, és

$$z = h_{z,1}s(W_{\mathbb{C}}) = h_{z,1}, \qquad c(z)j = jz = h_{z,j}s(W_{\mathbb{C}}jz) = h_{z,j}j,$$

de manera que $h_{z,1} = z$, $h_{z,j} = c(z)$, per a $z \in \mathbb{C}^*$. Anàlogament, per a $jz \in j\mathbb{C}^*$, és

$$c(z)j = jz = h_{jz,1}s(W_{\mathbb{C}}jz) = h_{jz,1}j, \qquad j^2z = h_{jz,j}s(W_{\mathbb{C}}j^2z) = h_{jz,j},$$

de manera que $h_{jz,1} = c(z)$, $h_{jg,j} = j^2z$, per a $jz \in j\mathbb{C}^*$. Així, el morfisme transferidor és donat per les assignacions $z \mapsto zc(z) = |z|^2$, $jz \mapsto c(z)j^2z = |z|^2j^2$, per a $z \in \mathbb{C}^*$ (observem que no cal reduir $\pmod{W_{\mathbb{C}}^c}$, perquè $W_{\mathbb{C}}^{ab} = W_{\mathbb{C}}$).

La imatge de $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{t} W_{\mathbb{C}}^{ab}$ és, doncs, $\mathbb{R}_{>0} \cup j^2\mathbb{R}_{>0}$, i ha de ser $\mathbb{R}^*$; per tant, obtenim que $j^2 \in \mathbb{R}^*$ i que $j^2 < 0$. (Notem que el càlcul del centre de $W_{\mathbb{R}}$ és trivial i proporciona $Z(W_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{C}^*$, de manera que la relació $j^2 \in \mathbb{R}^*$ s'hauria pogut obtenir, també, de manera trivial.) Ara, com que per a $z \in \mathbb{C}^*$ és $(jz)^2 = j^2|z|^2$, podem canviar j per un múltiple, si convé, a fi que se satisfaci la igualtat $j^2 = -1$ (n'hi ha prou si considerem jz, per a $z = \dfrac{1}{\sqrt{-j^2}}$).

Finalment, hem de dir quin és l'isomorfisme de reciprocitat; per a això, ens pot servir el mateix diagrama que hem usat per a la determinació del signe de j^2. El càlcul del derivat del grup $W_{\mathbb{R}}$ és immediat i proporciona la igualtat $W_{\mathbb{R}}^c = DW_{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C}^* = W_{\mathbb{C}} : |z| = 1\} = \mathbf{U}(1)$; per tant, $W_{\mathbb{R}}^{ab}$ és la reunió de les dues classes laterals $\mathbb{C}^*/\mathbf{U}(1) \simeq \mathbb{R}_{>0}$, i $\overline{j}\mathbb{C}^*/\mathbf{U}(1) \simeq \overline{j}\mathbb{R}_{>0}$, on $\overline{j}$ indica la classe de j en $W_{\mathbb{R}}^{ab}$. Com a conseqüència, la commutativitat del diagrama ens diu que l'isomorfisme $r_{\mathbb{R}}$ és donat per les assignacions

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sqrt{x} \pmod{W_{\mathbb{R}}^c}, \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_{>0}, \\ -x &\mapsto j\sqrt{x} \pmod{W_{\mathbb{R}}^c}, \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

Hem provat, doncs, el resultat següent:

6.10. Proposició. *El grup de Weil per a $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ és la terna $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ donada per*

(a) $W_{\mathbb{R}}$ és el grup generat per $\mathbb{C}^*$ i un altre element j, amb les relacions $j^2 = -1$, $jzj^{-1} = c(z)$, per a tot $z \in \mathbb{C}^*$;

(b) $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to \{1, c\} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ és l'únic morfisme de grups de nucli $\mathbb{C}^*$ (i que, per tant, envia j a c);

(c) $r_{\mathbb{C}} = \mathrm{id} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$; i

(d) $r_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^* \to W_{\mathbb{R}}^{ab}$ és donat per l'assignació $x \mapsto \sqrt{x} \pmod{W_{\mathbb{R}}^c}$, si $x > 0$, i $-x \mapsto j\sqrt{x} \pmod{W_{\mathbb{R}}^c}$, si $-x > 0$. □

6.11. El grup de Weil en el cas en què F és un cos de nombres. Finalment, considerem el cas dels cossos de nombres. Aquest cas és l'únic en el qual no es disposa d'una descripció més senzilla o més natural del grup de Weil que la construcció cohomològica artificiosa de la secció 4. En qualsevol cas, es poden provar els fets següents (cf. [**Ta 79**, §1.4.4]).

Siguin F un cos de nombres i $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ un grup de Weil per a $\overline{\mathbb{Q}}|F$. Llavors,

(a) L'aplicació $W_F \xrightarrow{\varphi} G_F$ és exhaustiva.

(b) El nucli de φ és el component connex de la identitat de W_F.

(c) El nucli de φ és isomorf al límit projectiu dels components connexos,

D_E, del neutre de C_E, amb aplicacions de pas donades per la norma $\mathrm{N}_{E'|E}$.

(d) Les aplicacions norma $D_{E'} \to D_E$ són exhaustives.

(e) Per a tot E, la imatge de D_E per l'isomorfisme r_E és $r_E(D_E) = \mathrm{Ker}(\varphi)W_E^c/W_E^c$, que és la imatge de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ en $W_{E|F}$.

(f) Si E té r_1 immersions reals i r_2 parelles d'immersions complexes conjugades no reals, llavors D_E és isomorf al producte de $\mathbb{R}$ amb $r_1 + r_2 - 1$ solenoides i r_2 cercles.

6.12. Observació. En tots els casos que hem considerat, els subgrups de W_F de la forma W_E són exactament els subgrups oberts d'índex finit de W_F. La seva intersecció, $\mathrm{Ker}(\varphi)$, és un grup abelià connex divisible, trivial en el cas local no arquimedià, isomorf a $\mathbb{C}^*$ en els casos locals arquimedians ($\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$), i "enorme" en el cas dels cossos de nombres.

Bibliografia

[Ar-Ta 67] Artin, E.; Tate, J.: *Class Field Theory*, Benjamin, 1967.

[Ca-Fr 67] Cassels, J. W. S.; Fröhlich, A., (eds.): *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

[Ne 86] Neukirch, J.: *Class Field Theory*, GMW, n. 280, Springer, 1986.

[Se 79] Serre, J.-P.: *Local fields*, GTM, n. 67, Springer, 1979. Edició original en llengua francesa, *Corps locaux*, editada per Hermann l'any 1962.

[Ta 79] Tate, J.: Number theoretic background, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 3–26.

[Wa 97] Washington, L. C.: *Introduction to Cyclotomic Fields, Second Edition*, GTM, n. 83, Springer, 1997.

Capítol 24

La fórmula de les traces

Pilar Bayer Sessió 1a. del dia 12 de març de 1997

A fi d'acabar de precisar la correspondència de Jacquet-Langlands, ens cal parlar de la fórmula de les traces.

La versió més senzilla que coneixem de la fórmula de les traces és la fórmula de sumació de Poisson. Altres versions, degudes bàsicament a Selberg i a Harish-Chandra, es presenten en l'estudi de les representacions dels grups de Lie semisimples i connexos. La fórmula de les traces permet generalitzar situacions de l'anàlisi harmònica de grups commutatius (anàlisi de Fourier) a l'anàlisi harmònica de grups no commutatius.

El tractament de la correspondència de Jacquet-Langlands requereix una *versió adèlica* de la fórmula de les traces. Ens diu Langlands que la fórmula de les traces adèlica és l'eina més important per a l'estudi de les representacions automorfes de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$.

En l'estudi de les representacions lineals dels grups finits, és ben conegut que la fórmula de la traça de la representació regular (és a dir, el càlcul del seu caràcter) conté una informació valuosa sobre les representacions irreductibles del grup i les seves dimensions. En aquesta direcció, les fórmules de les traces són una eina a destacar a l'hora de calcular dimensions d'espais de funcions especials.

Ens caldrà estudiar la traça de certs operadors lineals de rang no necessàriament finit. Per a tal fi, necessitarem revisar alguns conceptes de l'anàlisi funcional.

Es diu que un somni, no realitzat, de Hilbert i Pólya era construir un operador lineal autoadjunt, prou bo, tal que el seu espectre estigués rela-

cionat amb els zeros de la funció zeta de Riemann. Selberg va aconseguir una fita similar a la pretesa per Hilbert i Pólya, però en un altre context. Les funcions zeta de Selberg es defineixen a partir de certs operadors autoadjunts, que tenen propietats semblants a les preteses per Hilbert i Pólya en relació amb la funció zeta de Riemann. En l'estudi de les funcions zeta de Selberg, són necessàries versions de la fórmula de les traces descobertes primerament per aquest autor.

En els darrers anys, la fórmula de les traces lligada a l'operador de Laplace ha esdevingut una peça clau en l'estudi de les cordes bosòniques. La fórmula de les traces lligada a l'operador de Dirac és, a la vegada, una peça clau en l'estudi de les supercordes.

Comparant les versions adèliques de la fórmula de les traces amb les de la teoria de cordes, o bé de supercordes, fa la sensació que, fins avui, només hem adelitzat part de la teoria bosònica. En aquest context, sembla raonable esperar que una teoria de "superadeles" podria proporcionar una bona informació sobre els espais de formes modulars de pes fraccionari.

§1. Una mica d'anàlisi

Si volem definir la traça d'una aplicació lineal de rang finit, ho podem fer, o bé tenint present els seus valors propis, o bé tenint present la suma dels termes de la diagonal d'una matriu que la representi. En dimensió no finita, aquests conceptes no coincideixen necessàriament. En voler generalitzar aquesta situació es presenten, com a mínim, tres tipus d'operadors: operadors integrals, operadors de Hilbert-Schmidt, i operadors amb traça.

Tots els operadors que considerem a continuació estan definits en un espai de Hilbert, H, i se suposen afitats.

1.1. Definició. Un operador A és diu que és de Hilbert-Schmidt si existeix una base ortonormal $\{u_i\}$ de H tal que

$$\sum |A(u_i)|^2 < \infty.$$

És fàcil veure que si aquesta condició és certa respecte d'una base ortonormal, també ho és respecte de qualsevol altra.

1.2. Definició. Es diu que A és un *operador amb traça* (*trace class*) si A és producte de dos operadors de Hilbert-Schmidt B, C. En aquest cas, $A = BC$ és també de Hilbert-Schmidt i la seva traça es defineix per

$$\operatorname{tr}(A) := \sum \langle Au_i, u_i \rangle = \sum \langle Cu_i, B^* u_i \rangle.$$

La suma, que és absolutament convergent, és independent de la descomposició de A escollida.

Els operadors de H amb traça formen un espai vectorial normat.

1.3. Proposició. *Si P és un operador simètric, aleshores P és un operador amb traça si, i només si,*

$$\sum \langle Pu_i, u_i \rangle < \infty.$$

Com veurem, els nuclis integrals dels operadors generalitzen el concepte de matriu.

1.4. Proposició. *Sigui $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ un domini. Considerem un* operador integral *A definit per*

$$(Af)(x) := \int_{\mathcal{D}} K(x,y) f(y)\, dy$$

amb nucli integral *$K \in L^2(\mathcal{D} \times \mathcal{D}, dx\, dy)$. Aleshores,*

i) A és un operador de Hilbert-Schmidt.

ii) L'operador A és afitat i $A : L^2(\mathcal{D}) \to L^2(\mathcal{D})$.

iii) Si $K(x,y) = \overline{K(x,y)}$, aleshores, A és simètric (si bé no necessàriament autoadjunt).

iv) Suposem que A és simètric. Si $\{u_i\}_{i \geq 0}$, és un sistema ortonormal maximal de funcions pròpies de A en $L^2(\mathcal{D})$, i.e.

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad A(u_i) = \lambda_i u_i, \quad |\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots,$$

aleshores, per a tota funció f de la imatge de A es té que

$$f(x) = \sum_{i \geq 0} \langle f, u_i \rangle u_i(x).$$

És a dir, la imatge de A en $L^2(\mathcal{D})$ està generada per funcions pròpies.

v) Si A és un operador amb traça i el nucli $K(x,y)$ és una funció contínua, aleshores

$$\operatorname{tr}(A) = \int_{\mathcal{D}} K(x,x)\,dx.$$

En molts casos interessants, però, cal emprar nuclis que són singulars sobre la diagonal. Tal és el cas de la funció de Green, que és singular sobre la diagonal, i que és el nucli de la resolvent de l'operador de Laplace.

§2. La fórmula de les traces en dimensió 1

Prenem $G = (\mathbb{R},+)$, $\Gamma = (\mathbb{Z},+)$. Aleshores, Γ és un subgrup discret de G i el quocient $S^1 := \Gamma\backslash G$ és compacte. Sigui

$$R : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(L^2(\Gamma\backslash G))$$

la representació regular, que resulta de l'acció de G a S^1 donada per

$$(R(x)h)(y) = h(y+x),$$

quan $h \in L^2$. Estenem R, com d'habitud, a l'àlgebra $\mathcal{H}(G) := C_c(\mathbb{R})$, formada per les funcions contínues i amb suport compacte.

$$\begin{aligned}(R(f)h)(x) &:= \int_{\mathbb{R}} f(y)h(x+y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(-x+y)h(y)\,dy \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} f(-x+y+\gamma)\right) h(y)\,dy.\end{aligned}$$

La darrera igualtat és certa degut al fet que, d'una banda, h és constant sobre les classes mòdul Γ i, de l'altra, com que f té suport compacte i Γ és discret, la suma que figura a la integral és finita. Si definim

$$K(x,y) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(-x+\gamma+y),$$

aleshores

$$(R(f)h)(x) = \int_{\Gamma\backslash G} K(x,y)h(y)\,dy.$$

2.1. Proposició. *Amb les notacions i hipòtesis anteriors si, a més, $f = f_1 * f_2$, aleshores $R(f)$ és un operador amb traça. Aquesta ve donada per*

$$\operatorname{tr} R(f) = \int_{\Gamma\backslash G} K(x,x)\,dx = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma).$$

2.2. Observació. Si tenim present la fórmula de sumació de Poisson,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j),$$

on $\widehat{f}$ denota la transformada de Fourier de f, podem escriure

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) = \operatorname{tr} R(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j).$$

§3. El cas de quocient compacte

Suposem ara que G és un grup de Lie semisimple i connex, i que $\Gamma \subset G$ és un subgrup discret. Suposem que l'espai quocient $X := \Gamma\backslash G$ és compacte. Sigui

$$R : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(L^2(X))$$

la representació regular, donada per l'acció de G per la dreta, que és una representació unitària. Estenem la representació R a l'àlgebra $\mathcal{H}(G) := C_c(G)$, formada per les funcions contínues amb suport compacte. Per a tal fi, siguin, com a l'apartat anterior, $f \in C_c(G)$, $h \in L^2(\Gamma\backslash G)$.

$$\begin{aligned}(R(f)h)(x) &:= \int_G f(y)h(yx)\,dy \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} K(x,y)h(y)\,dy,\end{aligned}$$

on

$$K(x,y) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y).$$

Si $f = f_1 * f_2$, aleshores, $R(f)$ és un operador amb traça. Si $f_i \in C_c^\infty$, aleshores $K(x,y)$ és llis i se satisfà que

$$\operatorname{tr} R(f) = \int_{\Gamma\backslash G} K(x,x)\,dx.$$

3.1. Teorema. (Harish-Chandra) *Considerem la descomposició de la representació regular de G en components irreductibles*

$$R = \oplus m_j R_j.$$

Suposem que $f = f_1 * f_2$. Aleshores,

i) Els operadors $R_j(f)$ són operadors amb traça.

ii) Existeixen funcions localment integrables i centrals, i.e., constants sobre les classes de conjugació de G,

$$\chi_j : G \to \mathbb{C}$$

tals que

$$\operatorname{tr} R_j(f) = \int_G f(g)\chi_j(g)\,dg.$$

iii) Se satisfà que

$$\operatorname{tr} R(f) = \sum_j m_j \operatorname{tr} R_j(f).$$

Les funcions

$$\widehat{f}(j) := \int_G f(g)\chi_j(g)\,dg$$

s'anomenen les *transformades de Harish-Chandra* de la funció f.

El corol·lari següent proporciona una generalització no abeliana, en el cas de quocient compacte, de la fórmula de sumació de Poisson.

3.2. Corol·lari. (Fórmula de les traces: primera forma) *Sigui $f = f_1 * f_2$, $f_i \in C_c^\infty$. Aleshores*

$$\int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)\,dx = \operatorname{tr} R(f) = \sum_j m_j \widehat{f}(j).$$

Volem ara considerar l'anomenada *segona forma* de la fórmula de les traces. Siguin $\Gamma(\gamma)$, $G(\gamma)$, els centralitzadors de γ en Γ i G, respectivament. Tenint present la bijecció entre el conjunt de classes per la dreta $G(\gamma)\backslash G$ i els elements de l'òrbita $G\gamma$ obtinguda per conjugació, obtenim el resultat

3.3. Corol·lari. (Fórmula de les traces: segona forma)

$$\operatorname{tr} R(f) = \sum_{\{\gamma\}} \operatorname{vol}(\Gamma(\gamma)\backslash G(\gamma)) \sum_{G(\gamma)\backslash G} f(x^{-1}\gamma x),$$

on la primera suma s'estén sobre el conjunt de les classes de conjugació de G.

En aquest punt, és oportú fer notar que Harish-Chandra té un text dedicat a l'estudi de formes automorfes sobre grups de Lie semisimples [**Ha-Cha 68**].

§4. El cas del grup lineal adèlic

En el que segueix, esmentem versions adèliques de les dues formes de la fórmula de les traces que hem recordat. Aquestes versions són degudes bàsicament a Langlands.

Certes fórmules de Siegel associades a grups ortogonals de formes quadràtiques es poden interpretar com versions adèliques de la segona forma de la fórmula de les traces.

A nosaltres ens interessen, en aquest moment, els grups d'ideles $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F)$, $H^*(\mathbb{A}_F)$, on H és una àlgebra de quaternions sobre un cos global F.

Per simplificar, suposarem (com fan molts autors) que $F = \mathbb{Q}$ i ens situarem en una situació sense caràcter. De totes maneres, el cas general cal fer-lo amb caràcter i sobre un cos de nombres.

4.1. Notació. Prenem

$$G_{\mathbb{A}} := \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}), \quad G_{\mathbb{Q}} := \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}),$$

$$Z_\infty^+ = \left\{ z = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r > 0,\ r \in \mathbb{R} \right\},$$

$$X := Z_\infty^+ G_\mathbb{Q} \backslash G_\mathbb{A}.$$

Considerem la representació regular, unitària, donada per l'acció per la dreta de $G_\mathbb{A}$ sobre X:

$$R : G_\mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Aut}(L^2(X)).$$

Estenem, com d'habitud, aquesta representació a l'àlgebra de Hecke $\mathcal{H}(G_\mathbb{A})$. Si $f \in \mathcal{H}(G_\mathbb{A})$, $h \in L^2(X)$, aleshores

$$\begin{aligned}(R(f)h)x &:= \int_X f(y)(h(yx))\,dy \\ &= \int_X K(x,y)h(y)\,dy,\end{aligned}$$

on

$$K(x,y) := \sum_{\gamma \in G_\mathbb{Q}} f(x^{-1}\gamma y).$$

Com que $G_\mathbb{Q}$ és discret en $G_\mathbb{A}$, i f és de l'àlgebra de Hecke, la suma anterior és convergent. És clar, doncs, que $R(f)$ és un operador integral. De totes maneres, la no-compacitat de X ocasiona problemes en el nucli $K(x,y)$.

Per remeiar la situació, ens cal fer un camí una mica més llarg tot fent ús de les sèries d'Eisenstein. En tenir present aquestes sèries, s'obté la descomposició següent de la representació regular:

$$R = R_0^+ \oplus R_1.$$

La primera suma prové de la part cuspidal; la segona s'obté a partir de la teoria de les sèries d'Eisenstein. Si suposem que $f = f_1 * f_2$, on $f_i \in \mathcal{H}(Z_\infty^+ \backslash G_\mathbb{A})$, tenim que

$$R_0^+(f) = R(f) - R_1(f).$$

Més precisament,

$$R_1(f) = R(f) E_1 E_1^*,$$

on E_1 és una sèrie d'Eisenstein escaient.

Veurem que es presenten els fets següents:

i) $R_1(f)$ és un operador integral. El seu nucli integral, $K_1(x,y)$, és força complicat de descriure.

ii) $R_1(f)$ no és un operador amb traça.

iii) La diferència
$$K_0^+(x,y) := K(x,y) - K_1(x,y)$$
proporciona un nucli integral per a l'operador $R_0^+(f)$.

iv) L'operador $R_0^+(f)$ és un operador de rang finit; per tant, és un operador amb traça. Se satisfà que
$$\operatorname{tr}(R_0^+(f)) = \int_X K_0^+(x,x)\,dx.$$

§5. Càlcul de nuclis integrals

Ara ens cal recordar que en la teoria de les sèries d'Eisenstein hi intervenen dues representacions equivalents:

$$R(x,z),\, R'(x,z) : Z_\infty^+ \backslash G_{\mathbb{A}} \longrightarrow \operatorname{Aut}(L^2(\mathcal{H})),$$

on $\mathcal{H}$ és l'espai de Hilbert de les funcions mesurables sobre $N_{\mathbb{A}} A_{\mathbb{Q}} A_\infty^+ G_{\mathbb{A}}$, i de quadrat integrable sobre $K = K_\infty \prod K_p$. Recordem que $G_{\mathbb{A}} = B_{\mathbb{A}} K = N_{\mathbb{A}} A_{\mathbb{A}} K$. A més,
$$\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}(\tau)$$
on τ descriu el conjunt de les representacions irreductibles de K. Denotem per $\{\phi_i\}_{i\in I}$ una base de $\mathcal{H}$ adaptada a la descomposició anterior.

5.1. Definició. Considerem el coeficient i,j de l'operador $R(f,z)$,
$$R_{i,j}(f,z) := \langle R(f,z)\phi_j, \phi_i\rangle.$$

A l'espai $X \times X$ definim
$$K_1(x,y,f,z) := \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j\in I} R_{i,j}(f,z) E(x,\phi_i,z)\overline{E(y,\phi_j,z)}.$$

5.2. Lema. *Escrivim $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{Q}}\mathfrak{S}(c)$, on $\mathfrak{S}(c)$ és un domini de Siegel, que depèn d'una constant c, convenientment escollida. Suposem que $f = f_1 * f_2$. Aleshores, existeixen constants C, M tals que*

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} |K_1(x,y,f,z)|\, d|z| \leq Ce^{-MH(x)}e^{-MH(y)},$$

per a tot $x, y \in \mathfrak{S}(c)$.

5.3. Proposició. *Suposem que $f = f_1 * f_2$. Aleshores,*

i) $R_1(f)$ és un operador integral amb nucli integral donat per

$$K_1(x,y) := \int_{-i\infty}^{i\infty} K_1(x,y,f,z)\, d|z|.$$

ii) $R_0^+(f)$ és un operador integral de $L^2(X)$. El seu nucli ve donat per

$$K_0^+(x,y) = K(x,y) - K_1(x,y).$$

iii) $R_0^+(f)$ és un operador amb traça.

Demostració. Fàcilment es veu que $R_0^+(h)$ és un operador de Hilbert-Schmidt, per a tota funció $h \in C_c^\infty(Z_\infty^+ \backslash G_{\mathbb{A}})$. Com que suposem que $f = f_1 * f_2$, aleshores $R_0^+(h)$ és producte de dos operadors de Hilbert-Schmidt i és, per tant, un operador amb traça. Es demostra que té un nucli integral que pertany a $L^2(X \times X)$. $\square$

5.4. Teorema. *El nucli $K_0^+(x,y)$ és integrable sobre la diagonal. Se satisfà que*

$$\operatorname{tr} R_0^+(f) = \int_X K_0^+(x,x)\, dx.$$

Demostració. L'afirmació del teorema no és immediata degut al fet que $K_0^+(x,y)$ no és una funció contínua. Per a un operador integral amb traça representat per un nucli continu i de quadrat integrable, l'afirmació del teorema resultaria d'un lema d'anàlisi funcional. La demostració treballa amb nuclis de f_1, f_2 i, a partir d'ells, construeix un nucli que coincideix, quasi per a tot sobre la diagonal, amb el que ens interessa a nosaltres. D'aquest,

únicament es demostra que és una funció contínua separadament en x, y. Els dominis de Siegel juguen en aquest càlcul un paper primordial. □

Les fórmules següents proporcionen la primera forma de la fórmula de les traces adèlica:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} R_0^+(f) &= \int_X K_0^+(x,x)\,dx, \\ K_0^+(x,x) &= K(x,x) - K_1(x,x), \\ K(x,y) &= \sum_{\gamma \in G_{\mathbb{Q}}} f(x^{-1}\gamma y). \end{aligned}$$

§6. Obtenció de la segona forma de la fórmula de les traces: cas del grup lineal

Resumim els passos necessaris per passar de la primera a la segona forma de la fórmula de les traces:

i) Cal classificar els elements $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ (que són matrius 2×2 amb coeficients racionals) distingint entre elements del centre, elements el·líptics, parabòlics i hiperbòlics, atès que, per a cadascuna, les classes de conjugació respectives es comporten de manera diferent.

ii) Cal trencar el nucli d'Eisenstein K_1 en suma d'una part finita i una part no finita.

iii) Cal reordenar els sumands de manera que les sumes que en resultin siguin integrables.

iv) Finalment, cal integrar aquests termes.

Ens limitarem a enunciar els fets més destacables en tot aquest procés. Sigui

$$I_s(x,f) := \sum_{\mu \in Z_{\mathbb{Q}}} f(\mu)$$

la contribució dels termes centrals (anomenat terme singular). Sigui

$$I_e(x,f) := \sum_{\gamma \in \{G_e\}} \sum_{\delta \in G(\gamma)_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{Q}}} f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x)$$

la contribució dels termes el·líptics i hiperbòlics.

6.1. Proposició. *Les funcions I_e, I_s són integrables sobre X. La seva integral val*

$$\mathrm{vol}(Z_\infty^+ G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}) \sum_{\mu \in Z_{\mathbb{Q}}} f(\mu),$$

$$\sum_{\gamma \in \{G_e\}} \mathrm{vol}(Z_\infty^+ G(\gamma)_{\mathbb{Q}} \backslash G(\gamma)_{\mathbb{A}}) \int_{G(\gamma)_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} f(x^{-1}\gamma x)\, dx,$$

respectivament.

La contribució parabòlica la formen tres tipus de sumands diferents. El primer es trenca en tres trossos, no integrables, però amb suma integrable. La seva integral, un cop calculada, és zero.

El segon terme es trenca en dos trossos, una part integrable i una que s'afita per un cert ε.

El tercer terme es trenca en dos trossos: un involucra sèries d'Eisenstein. L'altre s'afita per ε i se simplifica amb la part del terme anterior que no podíem acabar de controlar. Així s'obté l'expressió final.

Un cop obtinguda la segona forma de la fórmula de les traces, resulta que és molt poc manejable.

Tot seguit, cal prendre en consideració funcions de l'àlgebra de Hecke de la forma

$$\phi(g) = \prod_v f_v(g_v).$$

Aleshores, poden expressar-se tots els termes que provenen de la contribució parabòlica en funció dels seus components locals.

S'arriba així a una fórmula de les traces que comença amb els dos termes descrits abans i que continua amb uns quants termes més que s'estenen sobre els components locals. Aquesta formulació permet obtenir, en particular, el corol·lari següent:

6.2. Corol·lari. *Suposem que $\phi = \prod f_p$. Si existeixen dos primers tals que*

$$\int_{N_p} \int_{K_p} f_p(k^{-1}ank)\, dn\, dk = 0,$$

aleshores $\operatorname{tr} R_0^+(\phi)$ *conté únicament els dos primers termes esmentats a la proposició* **6.1**, *atès que els restants s'anul·len.*

§7. El cas quaterniònic adèlic

Suposem que F és un cos de nombres i que H és una àlgebra de quaternions sobre F. Posem, per simplificar, $G' = H^*$.

En aquest cas no tenim elements parabòlics, per tant, procedint com a la secció anterior, arribem a una fórmula de les traces que té únicament dos termes.

7.1. Teorema. (Fórmula de les traces: segona forma)

$$\operatorname{tr} R'_\psi(\phi') = \sum_\gamma \operatorname{vol}_{\{\gamma\}}(Z'_{\mathbb{A}} G'(\gamma)_F \backslash G'(\gamma)_{\mathbb{A}}) \int_{G'(\gamma)_{\mathbb{A}} \backslash G'_{\mathbb{A}}} \phi'(x^{-1}\gamma x)\, dx.$$

Aquests termes es controlen tenint present que el conjunt de classes laterals $Z'_F \backslash G'_F$ està en correspondència bijectiva amb les classes d'extensions quadràtiques de F que estan incloses en H.

Recordem que nosaltres necessitem la fórmula de les traces en el cas quaterniònic i en el cas lineal per acabar d'establir una correspondència bijectiva entre certes representacions automorfes del grup multiplicatiu idèlic d'una àlgebra de quaternions i certes representacions automorfes cuspidals associades a $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ (on són vàlids teoremes de multiplicitat 1).

Recordem que el nostre objectiu és provar la igualtat

$$\operatorname{tr} R_{0,\psi}(\phi_f) = \operatorname{tr} R'_\psi(\phi'_f).$$

Cal comparar ara les dues segones fórmules obtingudes.

7.2. Proposició.

$$\operatorname{vol}(Z'_{\mathbb{A}} G'_F \backslash G'_{\mathbb{A}}) = \operatorname{vol}(Z_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{F}} \backslash G_{\mathbb{A}}),$$

sempre que a $G'_{\mathbb{A}}$ *hi posem la seva mesura de Tamagawa.*

Podem ara preguntar-nos què succeeix amb els termes parabòlics de R. Si S conté almenys dos primers finits (!), els termes parabòlics s'anul·len. Si hem partit d'una representació supercuspidal, s'anul·len els termes locals. Si és especial, també, però cal treballar una mica més.

§8. Aplicacions

De segur que alguna vegada ens ha sorprès la construcció de formes cuspidals noves, de pes 2 (o bé superior), en les quals hi intervenien *harmònics esfèrics* que torçaven funcions theta de formes quadràtiques quaternàries (o bé d'un nombre parell més gran de variables). Aquestes construccions es poden entendre en fer efectiva la representació de Weil. Són l'efecte que produeix l'existència de la correspondència de Jacquet-Langlads. Les funcions en qüestió són la base natural que sorgeix en considerar representacions de $H^*(\mathbb{A})$ en lloc de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{A})$.

8.1. Corol·lari. *Siguin* $\mathbb{Q} \subset L \subset H$, $[L:\mathbb{Q}] = 2$.

i) Si

$$\lambda : \mathbb{A}_L^* \to \mathbb{C}^*$$

és un caràcter prou bo, aleshores $\pi'(\lambda)$ *és una representació irreductible i admissible de* $H^*(\mathbb{A}_F)$.

ii) Si λ *és un Heckegrössencharakter de* L *(és a dir, una forma automorfa de* L*), aleshores* $\pi'(\lambda)$ *és una forma automorfa de* $H^*(\mathbb{A}_F)$*; és a dir, és un constituent de* R'_ψ*, per a algun* ψ.

Demostració. Primer definim $\pi(\lambda) = \otimes \pi_p$, on

$$\pi_p = \pi(\lambda_v, \lambda'_v),$$

si p descompon completament a L; altrament, prenem π_p com el constituent irreductible de la representació de Weil associada a $L \otimes \mathbb{Q}_p$. Aleshores $\pi'(\lambda) = \pi'(\pi(\lambda))$ i l'afirmació resulta de tot el que ja hem dit. $\square$

En aquesta línia, és natural formular la conjectura següent.

8.2. Conjectura. (Langlands) Sigui H una àlgebra de divisió de rang finit sobre un cos de nombres F. Sigui $F \subset L \subset H$, on L és un subcòs de H maximal. Sigui

$$\psi : L^* \backslash \mathbb{A}_L^* \to \mathbb{C}^*$$

un Heckegrössencharakter de L. Aleshores, $\pi'(\psi)$ és un constituent de l'espai de formes automorfes respecte de $H^*(\mathbb{A})$.

Una altra aplicació de la fórmula de les traces la proporciona el corol·lari que segueix.

8.3. Corol·lari. *Cada constituent de R'_ψ de $H^*(\mathbb{A})$ té multiplicitat* **1**.

DEMOSTRACIÓ. Els constituents de R'_ψ s'apliquen bijectivament en certs constituents de $R_{0,\psi}$ i en aquest últim cas, sabem que disposem de multiplicitat **1** (cf. el capítol 18). $\square$

Bibliografia

[Ge 75] Gelbart, S.S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1975.

[Ha-Cha 68] Harish-Chandra: *Automorphic Forms on Semi-simple Lie Groups*, LNM, Springer, 1968.

[Ja-La 70] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic forms on* $\mathbf{GL}_2$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

[Lan 75] Lang, S.: $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, Addison-Wesley, 1975.

[Tr 86] Triebel, H.: *Analysis and Mathematical Physics*, Reidel, 1986.

Capítol 25

Canvis de base

Artur Travesa Sessió 2a. del dia 12 de març de 1997

El contingut d'aquest capítol és, essencialment, el de l'exposició oral que, en el Seminari de Teoria de Nombres (UB–UAB–UPC) del curs 1996-97, es va dedicar als canvis de base per a $\mathbf{GL}(2)$. No s'ha entrat a considerar els detalls de la majoria dels resultats que s'hi expliquen; de fet, només es pretén donar els resultats i algunes referències per a la seva demostració.

Concretament, la primera secció conté, a manera d'introducció motivadora, els canvis de base per al cas abelià; és a dir, els canvis de base per a $\mathbf{GL}(1)$. La segona secció conté les definicions de les funcions L i dels factors ε en el cas abelià, i la prova de les propietats del canvi de base en aquest cas. A continuació, es dóna la definició del canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en els casos dels L-grups, local i global, sense entrar en les demostracions dels resultats, que fan servir la fórmula de les traces, que és objectiu del capítol 24, i les representacions dels grups de Weil, que són objectiu del capítol 26. Així, doncs, la tercera secció conté la definició dels canvis de base per als L-grups, que han estat introduïts en el capítol 20; i les dues darreres contenen les definicions dels canvis de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en els casos local i global, respectivament, i l'enunciat de les propietats fonamentals que ens interessen.

§1. Canvi de base per a GL(1)

Sigui F un cos local o bé un cos global. Usarem les mateixes notacions que en el capítol 23; en particular, posarem G_F per a indicar el grup de

Galois absolut de F, i $(W_F, \varphi, \{r_E\}_E)$ designarà el grup de Weil per a $\overline{F}|F$. En aquesta secció, considerarem una extensió cíclica $E|F$ de grau primer, $[E:F]=\ell$; siguin, a més a més, $\Gamma := \mathrm{Gal}(E|F)$ el seu grup de Galois, i σ un generador de Γ.

El canvi de base per a $\mathbf{GL}(1)$ estableix una relació entre les representacions de dimensió 1 del grup de Weil W_F i les del grup de Weil W_E. Comencem per establir el resultat següent.

1.1. Lema. *Existeix un diagrama commutatiu amb les files exactes:*

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r] & W_E \arrow[r] \arrow[d] & W_F \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & C_E^{1-\sigma} \arrow[r] & C_E \arrow[r, "\mathrm{N}_{E|F}"] & C_F \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Demostració. Per a l'extensió finita $E|F$, l'estudi dels grups de Weil ens proporciona un diagrama commutatiu (cf. la proposició **3.6** del capítol 23)

$$\begin{tikzcd}
W_E^{ab} \arrow[r, "\mathrm{incl}"] & W_F^{ab}, \\
C_E \arrow[u, "r_E, \simeq"] \arrow[r, "\mathrm{N}_{E|F}"] & C_F, \arrow[u, "r_F, \simeq"']
\end{tikzcd}$$

a partir del qual es construeix el diagrama que cerquem de la manera següent. En primer lloc, considerem els inversos dels isomorfismes r_E i r_F i fem la composició amb les projeccions $W_E \xrightarrow{\mathrm{proj}} W_E^{ab}$, $W_F \xrightarrow{\mathrm{proj}} W_F^{ab}$; obtenim el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
W_E \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d, "\mathrm{proj}"'] & W_F \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\
W_E^{ab} \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d, "r_E^{-1}, \simeq"'] & W_F^{ab} \arrow[d, "r_F^{-1}, \simeq"] \\
C_E \arrow[r, "\mathrm{N}_{E|F}"] & C_F.
\end{tikzcd}$$

En virtut del teorema 90 de Hilbert, el morfisme induït per la norma, $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$, té nucli el subgrup $C_E^{1-\sigma}$ format pels elements de C_E de

la forma $\dfrac{z}{\sigma(z)}$, amb $z \in C_E$; cal calcular, doncs, el conucli dels dos morfismes $W_E \xrightarrow{\text{incl}} W_F$ i $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$.

El diagrama anterior es pot completar al diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
W_E \arrow[r, "\text{incl}"] \arrow[d, "\text{proj}"'] & W_F \arrow[r, "\text{proj}"] \arrow[d, "\text{proj}"] & W_F/W_E \arrow[r, "\varphi,\simeq"] & G_F/G_E \arrow[d, "="] \\
W_E^{ab} \arrow[r, "\text{incl}"] \arrow[d, "r_E^{-1},\simeq"'] & W_F^{ab} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r_F^{-1},\simeq"] & G_F^{ab} \arrow[r, "\text{proj}"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Gal}(E|F) \arrow[d, "="] \\
C_E \arrow[r, "\mathrm{N}_{E|F}"] & C_F \arrow[r, "\varphi\circ r_F"] & G_F^{ab} \arrow[r, "\text{proj}"] & \Gamma;
\end{tikzcd}$$

aquesta commutativitat dóna automàticament la definició dels morfismes que resten en el diagrama que volem, l'exactitud de la primera fila, i la commutativitat. En particular, el morfisme $C_F \to G_F^{ab}$ és el morfisme llei de reciprocitat de la teoria de cossos de classes; és a dir, el símbol nòrmic.

D'altra banda, resta comprovar l'exactitud de la segona fila en C_F i en Γ. L'exhaustivitat de $C_F \to \Gamma$ es dedueix trivialment de l'exhaustivitat de $W_F \to \Gamma$; per tant, només cal veure que el nucli de $C_F \to \Gamma$ és la imatge de $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$. Ara bé, si tenim en compte que $W_F^{ab} \xrightarrow{r_F^{-1}} C_F$ és un isomorfisme i que la primera fila és exacta, veiem que el nucli del morfisme $C_F \to \Gamma$ és la imatge de $W_E \to C_F$; i, com que $W_E \to C_E$ és exhaustiu, el nucli que cerquem és la imatge de $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$. Aixo acaba la prova. $\square$

Recordem que, donat un grup topològic G, una representació (complexa) de G és un morfisme continu de grups $G \xrightarrow{\rho} \mathbf{GL}(V)$, on V és un espai vectorial complex de dimensió finita. I un quasicaràcter de G és una representació de dimensió 1; és a dir, un morfisme continu de grups $G \to \mathbb{C}^*$. D'altra banda, és evident que els quasicaràcters de G es poden identificar amb els quasicaràcters de G^{ab}. En particular, i en virtut de l'isomorfisme $W_F^{ab} \simeq C_F$, tenim que:

1.2. Corol·lari. *Les representacions de dimensió* 1 *del grup de Weil* W_F *s'identifiquen amb els quasicaràcters de* C_F. $\square$

Designem per $\mathcal{A}(F)$, $\mathcal{A}(E)$ els conjunts de quasicaràcters de C_F, C_E, respectivament.

1.3. Definició. S'anomena aixecament de canvi de base per a l'extensió $E|F$ l'aplicació $\mathcal{A}(F) \to \mathcal{A}(E)$ definida per $\eta \mapsto \eta_{E|F} := \eta \circ \mathrm{N}_{E|F}$, on $\mathrm{N}_{E|F}$ és l'aplicació norma $C_E \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F}} C_F$.

El grup de Galois Γ actua de manera natural en C_E; escriurem $\gamma(z)$ per a indicar l'acció d'un element qualsevol $\gamma \in \Gamma$ en un element $z \in C_E$. Això ens permet definir una acció natural de Γ en el conjunt $\mathcal{A}(E)$ per la fórmula $\theta^\gamma(z) := \theta(\gamma z)$, per a $\gamma \in \Gamma$, $\theta \in \mathcal{A}(E)$, i $z \in C_E$, ja que l'aplicació $z \mapsto \theta(\gamma z)$ és un quasicaràcter de C_E. Així, $\mathcal{A}(E)$ és un Γ-mòdul.

Sigui $\hat{\Gamma} := \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ el conjunt dels quasicaràcters (= caràcters) de Γ. Com que $\Gamma \simeq C_F/\mathrm{N}_{E|F}C_E$, $\hat{\Gamma}$ es pot identificar amb el conjunt dels quasicaràcters de C_F que són trivials en $\mathrm{N}_{E|F}C_E$. D'aquesta manera, $\hat{\Gamma}$ actua en $\mathcal{A}(F)$ per multiplicació; en efecte, si pensem en un element $\zeta \in \hat{\Gamma}$ com un quasicaràcter de C_F (trivial en $\mathrm{N}_{E|F}C_E$), i si $\eta \in \mathcal{A}(F)$ és un quasicaràcter qualsevol, el producte $\eta\zeta$ també és un quasicaràcter de C_F. Així, $\mathcal{A}(F)$ és un $\hat{\Gamma}$-mòdul.

1.4. Teorema. *L'aixecament de canvi de base $\eta \mapsto \eta_{E|F}$ defineix una bijecció del conjunt $\mathcal{A}(F)/\hat{\Gamma}$, fomat per les òrbites per l'acció de $\hat{\Gamma}$ en $\mathcal{A}(F)$, en el conjunt $\mathcal{A}(E)^\Gamma$, format pels elements de $\mathcal{A}(E)$ que són invariants per a l'acció de Γ.*

Demostració. Anomenem momentàniament f l'aixecament de canvi de base $\mathcal{A}(F) \xrightarrow{f} \mathcal{A}(E)$; és a dir, $f(\eta) := \eta_{E|F}$, per a $\eta \in \mathcal{A}(F)$. Observem, en primer lloc, que per a tot element $\eta \in \mathcal{A}(F)$, la imatge $f(\eta)$ és invariant per a l'acció de Γ en $\mathcal{A}(E)$; en efecte, si $\gamma \in \Gamma$ i $z \in C_E$, se satisfà la igualtat $\eta^\gamma_{E|F}(z) = \eta_{E|F}(\gamma z) = \eta(\mathrm{N}_{E|F}(\gamma z)) = \eta(\mathrm{N}_{E|F}(z)) = \eta_{E|F}(z)$, perquè $\mathrm{N}_{E|F}(\gamma z) = \mathrm{N}_{E|F}(z)$. A més a més, si pensem $\zeta \in \hat{\Gamma}$ com un quasicaràcter de C_F que és trivial en $\mathrm{N}_{E|F}C_E$, se satisfà la igualtat $f(\eta\zeta) = (\eta\zeta)\circ\mathrm{N}_{E|F} = (\eta\circ\mathrm{N}_{E|F})(\zeta\circ\mathrm{N}_{E|F}) = (\eta\circ\mathrm{N}_{E|F}) = f(\eta)$; és a dir, dos elements de $\mathcal{A}(F)$ que pertanyen a la mateixa òrbita per a l'acció de $\hat{\Gamma}$ tenen la mateixa imatge en $\mathcal{A}(E)^\Gamma$. Per tant, f defineix, per pas al quocient, una aplicació del conjunt $\mathcal{A}(F)/\hat{\Gamma}$ en el conjunt $\mathcal{A}(E)^\Gamma$.

La injectivitat d'aquesta aplicació és immediata: siguin $\eta, \eta' \in \mathcal{A}(F)$ tals que $f(\eta) = f(\eta')$; llavors, $\eta^{-1}\eta'$ és un quasicaràcter de C_F que és trivial

en $\mathrm{N}_{E|F} C_E$; per tant, és un element de $\hat{\Gamma}$, i $\eta' = \eta(\eta^{-1}\eta')$; és a dir, η i η' pertanyen a la mateixa òrbita de $\mathcal{A}(F)$ per a l'acció de $\hat{\Gamma}$.

Resta veure l'exhaustivitat de l'aplicació $\mathcal{A}(F)/\hat{\Gamma} \to \mathcal{A}(E)^{\Gamma}$. Considerem $\theta \in \mathcal{A}(E)^{\Gamma}$; és a dir, θ és un quasicaràcter de C_E invariant per a l'acció de Γ; cal veure que existeix $\eta \in \mathcal{A}(F)$ tal que $\theta = \eta_{E|F}$.

El fet que θ sigui invariant per a l'acció de Γ ens diu que θ és un morfisme de grups $\theta : C_E \to \mathbb{C}^*$ trivial en $C_E^{1-\sigma}$; ara, si tenim en compte l'isomorfisme $C_E/C_E^{1-\sigma} \xrightarrow{\mathrm{N}_{E|F},\simeq} \mathrm{N}_{E|F} C_E$, veiem que existeix un quasicaràcter $\eta' : \mathrm{N}_{E|F} C_E \to \mathbb{C}^*$ tal que $\theta = \eta' \circ \mathrm{N}_{E|F}$. Es tracta d'estendre aquest morfisme a tot el grup C_F. Per a això, considerem la representació induïda $\mathrm{Ind}_{\mathrm{N}_{E|F} C_E}^{C_F}(\eta')$; és una representació de C_F de dimensió $[C_F : \mathrm{N}_{E|F} C_E] = \#C_F/\mathrm{N}_{E|F} C_E = \#\Gamma = \ell$, ja que, en virtut del lema anterior, es té un isomorfisme $C_F/\mathrm{N}_{E|F} C_E \simeq \Gamma$; com que C_F és commutatiu, aquesta representació induïda no és irreductible. La fórmula de reciprocitat de Frobenius ens permet afirmar que existeix un quasicaràcter $\eta : C_F \to \mathbb{C}^*$, component de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{N}_{E|F} C_E}^{C_F}(\eta')$, la restricció del qual a $\mathrm{N}_{E|F} C_E$ és el quasicaràcter η'. Llavors, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ i $\eta_{E|F} = \eta \circ \mathrm{N}_{E|F} = \eta' \circ \mathrm{N}_{E|F} = \theta$, fet que demostra l'exhaustivitat de l'aplicació $\mathcal{A}(F)/\hat{\Gamma} \to \mathcal{A}(E)^{\Gamma}$. $\square$

1.5. Observació. En la demostració d'aquest resultat s'han usat resultats que no són trivials; sobretot, els que fan referència a la inducció de representacions. Per a una millor comprensió, es recomana la lectura de la secció segona de **[Ta 79]**.

Així, doncs, si $E|F$ és cíclica de grau primer ℓ, i si $\Gamma := \mathrm{Gal}(E|F)$ és el seu grup de Galois, obtenim una bijecció entre les representacions de dimensió 1 del grup de Weil W_F, mòdul l'acció de $\hat{\Gamma}$, i les representacions de dimensió 1 del grup de Weil W_E invariants per a l'acció de Γ.

§2. Quasicaràcters, funcions L i factors èpsilon

Per a veure les propietats més importants del canvi de base per a $\mathbf{GL}(1)$, cal tenir presents les definicions de les funcions L i dels factors ε associats a les

representacions de dimensió 1 dels grups de Weil; és a dir, als quasicaràcters de C_F. Recordem que s'anomena quasicaràcter d'un grup topològic G tot morfisme continu de grups $G \to \mathbb{C}^*$.

Fixem, en primer lloc, un cos local F; després estudiarem el cas global. Per a tot nombre complex s, sigui $C_F \xrightarrow{\omega_s} \mathbb{C}^*$ el quasicaràcter definit per $z \mapsto |z|^s$, on $|z|$ indica, en cada cas, el valor absolut de $z \in C_F$. Alguns autors anomenen aquests quasicaràcters els quasicaràcters principals (cf. [**La 70**]).

2.1. Observació. En el cas global, també es defineixen els quasicaràcters principals de la mateixa manera; és a dir, si F és un cos global, sigui $C_F \xrightarrow{\omega_s} \mathbb{C}^*$ el quasicaràcter definit per $z \mapsto |z|^s$, on $|z|$ indica el valor absolut de $z \in C_F$.

La proposició següent ens proporciona tots els quasicaràcters de C_F en el cas en què F és un cos local arquimedià.

2.2. Proposició. *Si $F = \mathbb{R}$, els quasicaràcters de $C_F = \mathbb{R}^*$ són els $X^{-N}\omega_s$, on $\mathbb{R} \xrightarrow{X} \mathbb{C}$ és la immersió, $N \in \{0, 1\}$, i $s \in \mathbb{C}$. Si $F = \mathbb{C}$, els quasicaràcters de $C_F = \mathbb{C}^*$ són els $X^{-N}\omega_s$, on $\mathbb{C} \xrightarrow{X} \mathbb{C}$ és qualsevol de les dues immersions (la identitat i la conjugació complexa, c), $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 0$, i $s \in \mathbb{C}$.*

Demostració. Evidentment, les aplicacions escrites a l'enunciat són quasicaràcters de C_F en cada cas; veiem que tot quasicaràcter de C_F és un d'aquests. Comencem pel cas en què $F = \mathbb{R}$.

Sigui $\eta : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ un quasicaràcter qualsevol. Per composició amb el valor absolut usual de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* \xrightarrow{|\,|} \mathbb{R}_{>0}$, obtenim un morfisme continu de grups $|\eta| : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_{>0}$. Considerem un nombre real positiu, $x_0 > 0$, $x_0 \neq 1$, i definim el nombre $s_1 \in \mathbb{R}$ per la igualtat $|\eta(x_0)| = x_0^{s_1}$. Per continuïtat, per a totes les potències d'exponent racional, x_0^q, $q \in \mathbb{Q}$, és $|\eta(x_0^q)| = |x_0^q|^{s_1}$; com que aquestes potències formen un subgrup dens de $\mathbb{R}_{>0}$, obtenim que la restricció a $\mathbb{R}_{>0}$ de $|\eta|$ és el morfisme continu donat per l'assignació $r \mapsto |r|^{s_1}$. D'altra banda, com que $|\eta(-1)|^2 = |\eta((-1)^2)| = |\eta(1)| = 1$, ha de ser $|\eta(-1)| = 1$, de manera que per a tot nombre real positiu r és $|\eta(-r)| = |\eta(-1)|\,|\eta(r)| = |-r|^{s_1}$; en conseqüència, $|\eta| = |\ |^{s_1} = \omega_{s_1}$.

Així, el quasicaràcter $|\eta|\omega_{-s_1}$ és el trivial; si es vol, el quasicaràcter $\eta\omega_{-s_1}$ és un caràcter (té imatge inclosa en $\mathbf{U}(1)$); per tant, podem definir $\theta : \mathbb{R}^* \to \mathbf{U}(1) \subseteq \mathbb{C}^*$ per la fórmula $r \mapsto \dfrac{\eta(r)}{|r|^{s_1}}$ i obtenim un caràcter de $\mathbb{R}^*$. La restricció a $\mathbb{R}_{>0}$ d'aquest caràcter és un caràcter $\theta' : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbf{U}(1)$. Ara, si definim $s_2 \in \mathbb{R}$ per la igualtat $\theta'(x_0) = x_0^{is_2}$, obtenim, també per continuïtat i per densitat, que $\theta'(r) = |r|^{is_2}$, per a tot $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Això ens diu que la restricció del quasicaràcter η a $\mathbb{R}_{>0}$ és de la forma $\eta(r) = |r|^s$, on $s := s_1 + is_2 \in \mathbb{C}$. Com que $\eta(-1) = \pm 1$, això proporciona dues possibilitats per a la restricció de l'aplicació η a $\mathbb{R}_{<0}$: si $\eta(-1) = 1$, obtenim que $\eta(r) = |r|^s$, per a tot $r \in \mathbb{R}^*$; i si $\eta(-1) = -1$, obtenim que $\eta(-r) = -|r|^s = \dfrac{1}{-r}|-r|^{s+1}$, i que $\eta(r) = \dfrac{1}{r}|r|^{s+1}$, per a tot $r > 0$; per tant, el quasicaràcter η és de la forma $\eta(r) = r^{-N}\omega^s$, per a $s \in \mathbb{C}$ i $N \in \{0,1\}$; és a dir, $\eta = X^{-N}\omega_s$, com volíem provar.

Estudiem ara el cas en què $F = \mathbb{C}$. Suposem que $\eta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ és un quasicaràcter; com que $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbf{U}(1)$, via l'assignació $z \mapsto (|z|, \dfrac{z}{|z|})$, podem pensar η com el producte d'un quasicaràcter de $\mathbb{R}_{>0}$ i un quasicaràcter (=caràcter) de $\mathbf{U}(1)$. Pel que hem vist fa un moment, els quasicaràcters de $\mathbb{R}_{>0}$ són (les restriccions a $\mathbb{R}_{>0}$ de) els ω_s, $s \in \mathbb{C}$; per tant, resta estudiar els caràcters de $\mathbf{U}(1)$. Ara bé, un morfisme continu $\mathbf{U}(1) \to \mathbb{C}^*$ és una representació de dimensió 1 del tor $\mathbb{T} = \mathbf{U}(1)$; per tant, té imatge inclosa en $\mathbf{U}(1)$ i és de la forma $z \mapsto z^N$, amb $N \in \mathbb{Z}$ (cf. el teorema **2.12** del capítol 5).

En conseqüència, η és de la forma $\eta(rz) = |r|^s z^N$, per a $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $z \in \mathbf{U}(1)$, $s \in \mathbb{C}$ i $N \in \mathbb{Z}$. Si ara tenim en compte que, si $N > 0$, és $z^N = c(z)^{-N}$, per a $z \in \mathbf{U}(1)$, obtenim que, efectivament, η és de la forma $\eta = X^{-N}\omega_s$, amb $s \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 0$, i $X : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la identitat o bé la conjugació complexa, com volíem demostrar. $\square$

2.3. Exemples. • En el cas en què $F = \mathbb{R}$, la inclusió $\mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ és el quasicaràcter $X^{-1}\omega_2$, on X és la inclusió de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

• En el cas $F = \mathbb{C}$, la identitat $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ és el quasicaràcter $c^{-1}\omega_2$, on c és la conjugació complexa. I la conjugació complexa, $c : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, és el quasicaràcter $X^{-1}\omega_2$, on X és la identitat.

A continuació, es tracta de determinar els quasicaràcters de $C_F = F^*$ en el cas en què F és un cos local no arquimedià; és a dir, un cos extensió finita del cos $\mathbb{Q}_p$ dels nombres p-àdics, per a algun nombre primer p.

Comencem per fixar les notacions: $\mathcal{O} := \mathcal{O}_F$ designarà l'anell dels enters de F, $U = U_F$, el grup de les unitats de $\mathcal{O}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F$, l'ideal maximal de $\mathcal{O}$, i $\pi := \pi_F$ un generador de $\mathfrak{p}$. Indicarem per $|\ |$ el valor absolut de F, normalitzat de manera que $|\pi| = \dfrac{1}{\mathrm{N}_{F|\mathbb{Q}_p}\mathfrak{p}}$. (Recordem que $\mathrm{N}_{F|\mathbb{Q}_p}\mathfrak{p} =: q$ és el cardinal del cos residual $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$.)

2.4. Proposició. *Sigui $\eta : F^* \to \mathbb{C}^*$ un quasicaràcter de $C_F = F^*$. Existeixen un caràcter $\chi : U \to \mathbf{U}(1)$ i un nombre complex $s \in \mathbb{C}$, definit mòdul $\dfrac{2\pi i}{\log(\mathrm{N}_{F|\mathbb{Q}_p}\mathfrak{p})}$, tals que per a tot $x = u\pi^n \in F^*$, $u \in U$, $n \in \mathbb{Z}$, és $\eta(x) = \chi(u)|x|^s$; o sigui, $\eta = \chi\omega_s$, per a l'extensió trivial de χ a F^*. Els caràcters $\chi : U \to \mathbf{U}(1)$ són els morfismes continus de grups, i tots tenen imatge finita.*

Demostració. Comencem per recordar que $F^* \simeq U \times \langle\pi\rangle$; en efecte, tot element $x \in F^*$ s'escriu de manera única en la forma $x = u\pi^n$, amb $u \in U$, $n \in \mathbb{Z}$. Com a conseqüència, tot morfisme continu de grups $\eta : F^* \to \mathbb{C}^*$ s'obté de la multiplicació de dos morfismes continus de grups: $\chi : U \to \mathbb{C}^*$, i $\eta' : \langle\pi\rangle \to \mathbb{C}^*$. Ara, un morfisme continu de grups $\chi : U \to \mathbb{C}^*$ és un caràcter de U; en efecte, U és un grup compacte i $\mathbf{U}(1)$ és el subgrup compacte maximal de $\mathbb{C}^*$; per tant, χ té imatge inclosa en $\mathbf{U}(1)$. A més a més, com que els subgrups $1 + \mathfrak{p}^n \subseteq U$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, són subgrups compactes infinits propis, i tot subgrup compacte propi de $\mathbf{U}(1)$ és finit, el morfisme $\chi : U \to \mathbf{U}(1)$ no pot ser injectiu; això implica que el nucli de χ és un subgrup compacte no trivial de U; i, com que els subgrups $1 + \mathfrak{p}^n$, $n \geq 0$, formen un sistema fonamental d'entorns compactes de 1, el nucli de χ ha de contenir algun d'aquests subgrups; en conseqüència, el nucli de χ és un subgrup d'índex finit de U; és a dir, la imatge de χ és un subgrup finit de $\mathbf{U}(1)$.

Resta estudiar els quasicaràcters $\eta' : \langle\pi\rangle \to \mathbb{C}^*$. Com que π genera el grup $\langle\pi\rangle$, qualsevol morfisme de grups $\langle\pi\rangle \to G$, on G és un grup qualsevol, és determinat per la imatge de π. En particular, el valor absolut de η' és

un morfisme continu de grups $|\eta'| : \langle\pi\rangle \to \mathbb{R}^{>0}$, de manera que existeix un nombre real $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|\eta'(\pi)| = |\pi|^{s_1}$; per tant, $|\eta'(\pi^n)| = |\pi^n|^{s_1}$, per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Ara, el morfisme $\dfrac{\eta}{|\ |^{s_1}} : \langle\pi\rangle \to \mathbb{C}^*$ té imatge inclosa en $\mathbf{U}(1)$; per tant, existeix un nombre real $s_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\eta(\pi^n)}{|\pi^n|^{s_1}} = |pi^n|^{is_2}$, per a tot $n \in \mathbb{Z}$. En conseqüència, per a $s := s_1 + is_2$ i per a tot $n \in \mathbb{Z}$ és $\eta(\pi^n) = |\pi^n|^s$. Només resta veure que s és determinat mòdul $\dfrac{2\pi i}{\log(\mathrm{N}_{F|\mathbb{Q}_p}\mathfrak{p})}$; és a dir, que s_2 és determinat mòdul $\dfrac{2\pi}{\log q}$; però això és immediat, perquè $|\pi| = q^{-1} = e^{-\log(q)}$. $\square$

Convé recordar, ara, la definició de les funcions L associades als quasicaràcters en el cas local.

2.5. Definició. Sigui F un cos local qualsevol. Donat un quasicaràcter $\eta \in \mathcal{A}(F)$, es defineix la funció L sobre η de la manera següent:

$$L(\eta) = \begin{cases} L(X^{-N}\omega_s) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), & \text{si } F = \mathbb{R}; \\ L(X^{-N}\omega_s) := \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s), & \text{si } F = \mathbb{C}; \end{cases}$$

$$L(\eta) = \begin{cases} (1-\eta(\pi))^{-1}, & \text{si } F \text{ és no arquimedià i } \eta \text{ és no ramificat;} \\ 1, & \text{si } F \text{ és no arquimedià i } \eta \text{ és ramificat.} \end{cases}$$

D'aquesta manera, L és una funció $\mathcal{A}(F) \xrightarrow{L} \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$; és a dir, assigna a cada quasicaràcter de F un nombre complex (o bé ∞).

2.6. Observació. Recordem que un quasicaràcter $\eta : F^* \to \mathbb{C}^*$ s'anomena no ramificat si, i només si, la seva restricció a U és el caràcter trivial; en cas contrari, s'anomena ramificat.

2.7. Observació. Tot quasicaràcter $\eta \in \mathcal{A}(F)$ és un producte de la forma $\eta = \chi\omega_s$, per a un nombre complex s i un caràcter $\chi : F^* \to \mathbf{U}(1)$. Així, donat un quasicaràcter qualsevol $\eta : F^* \to \mathbb{C}^*$, podem considerar la funció de variable complexa $L(\eta, \ ) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cap \{\infty\}$ donada per $s \mapsto L(\eta, s) := L(\eta\omega_s)$. D'aquesta manera, per a tot quasicaràcter η, la funció $s \mapsto L(\eta, s)$ és una funció meromorfa de s que no té zeros, determinada essencialment a partir de qualsevol caràcter $\chi : F^* \to \mathbf{U}(1)$ tal que $\eta = \chi\omega_s$, per a algun nombre complex $s \in \mathbb{C}$. Si es vol, determinada essencialment a partir de

l'únic caràcter $\chi : U \to \mathbf{U}(1)$ tal que $\eta = \chi\omega_s$, per a algun nombre complex $s \in \mathbb{C}$, on $U = \{\pm 1\}$, si $F = \mathbb{R}$, $U = \mathbf{U}(1)$, si $F = \mathbb{C}$, i U el grup de les unitats de $\mathcal{O}$, si F és no arquimedià. (Observem que U és el subgrup compacte maximal de F^*.)

A continuació, es tracta de definir els factors ε en el cas local. Més concretament, es tracta de definir nombres complexos $\varepsilon(\eta, \psi, dx)$, associats a tota mesura de Haar de F, dx, tot quasicaràcter $\eta \in \mathcal{A}(F)$, i tot caràcter additiu i no trivial de F, $F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1) \subseteq \mathbb{C}^*$.

La definició d'aquests factors ε està íntimament relacionada amb l'equació funcional que lliga les funcions L. (Per a una descripció completa de les equacions funcionals i la demostració dels resultats hom pot veure, per exemple, [**La 70**, Chap. XIV, §3] o [**We 74**, Chap. VII, §5]; també pot ser útil le referència [**Ta 79**, §3], però no conté les demostracions.)

En general, si d^*x denota la mesura $d^*x := \dfrac{dx}{|x|}$ de F^*, i si $\hat{f}(y) := \displaystyle\int_F f(x)\psi(xy)dx$ és la "transformada de Fourier" de la funció $f(x)$, se satisfà una equació funcional de la forma

$$\frac{\int_{F^*} \hat{f}(x)\omega_1\eta^{-1}(x)d^*x}{L(\omega_1\eta^{-1})} = \varepsilon(\eta, \psi, dx)\frac{\int_{F^*} f(x)\eta(x)d^*x}{L(\eta)},$$

on $\varepsilon(\eta, \psi, dx) \in \mathbb{C}^*$ és un cert nombre complex no nul que no depèn de les funcions f per a les quals els dos membres de la igualtat tinguin sentit. En particular, existeixen tals funcions, de manera que els factors $\varepsilon(\eta, \psi, dx)$ estan definits. A més a més, de les relacions que ens diuen com la transformada de Fourier $\hat{f}$ depèn de ψ i dx, es dedueixen les relacions següents per als factors ε:

$$(*) \qquad \varepsilon(\eta, \psi, rdx) = r\varepsilon(\eta, \psi, dx), \qquad \text{per a tot } r \in \mathbb{R}_{>0};$$

$$(*) \qquad \varepsilon(\eta, \psi(ax), dx) = \eta(a)|a|^{-1}\varepsilon(\eta, \psi, dx), \qquad \text{per a tot } a \in \mathbb{F}^*.$$

Els càlculs de la tesi de Tate, fets en cada cas, i que també es poden veure en [**La 70**, Chap. XIV, §3], en [**We 74**, Chap. VII, §5], o en [**Ca-Fr 67**], ens permeten donar una definició explícita d'aquests nombres.

Comencem pel cas arquimedià, en el qual els quasicaràcters η són els $\eta = X^{-N}\omega_s$ donats més amunt. Sigui dx la mesura de Haar usual de F; és

a dir, dx si $F = \mathbb{R}$, i $dx := i\,dz \wedge d\bar{z} = 2da\,db$, si $x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. I sigui ψ_0 el caràcter additiu donat per

$$\psi_0(x) := \begin{cases} \exp(2\pi i x), & \text{si } F = \mathbb{R}, \\ \exp(2\pi i \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} x), & \text{si } F = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Llavors, per a un quasicaràcter qualsevol $\eta = X^{-N}\omega_s$, el factor $\varepsilon(\eta, \psi_0, dx)$ és donat per la igualtat $\varepsilon(X^{-N}\omega_s, \psi_0, dx) := i^N$. (Observem que no depèn de $s \in \mathbb{C}$; és a dir, només depèn del caràcter X^{-N}.)

Això i les relacions (*) determinen els factors $\varepsilon(\eta, \psi, dx)$ en els casos $F = \mathbb{R}$ i $F = \mathbb{C}$, per a tots els caràcters additius i no trivials ψ, totes les mesures de Haar dx, i tots els quasicaràcters η. En efecte, per als caràcters additius se satisfà el resultat següent, la demostració del qual es deixa com a exercici per al lector.

2.8. Lema. *Sigui $F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu no trivial. Llavors, existeix $a \in F$, $a \neq 0$, tal que per a tot $x \in F$ és $\psi(x) = \psi_0(ax)$.* $\square$

Anem a definir, ara, els factors ε en el cas local no arquimedià. Siguin, doncs, F un cos local no arquimedià, $F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu i no trivial de F, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ un quasicaràcter de C_F, i dx una mesura de Haar de F. Associats a aquestes dades, posem

$$n(\psi) := \max\{n \in \mathbb{Z} : \pi^{-n}\mathcal{O} \subseteq \operatorname{Ker} \psi\},$$
$$a(\eta) := \text{l'exponent del conductor de } \eta;$$

és a dir, $a(\eta) = 0$, si η és no ramificat, i $a(\eta) = \min\{m \in \mathbb{Z} :$ per a tot $z \in 1 + \mathfrak{p}^m$ és $\eta(z) = 1\}$, si η és ramificat. (Observem que si $\eta = \chi\omega_s$, per a un caràcter χ, el conductor del quasicaràcter η és el conductor del caràcter χ.) Finalment, sigui $c \in F^*$ un element qualsevol de valoració $n(\psi) + a(\eta)$.

Amb aquestes notacions, els factors locals $\varepsilon(\eta, \psi, dx)$ són donats per les igualtats (*) i les fórmules

$$\varepsilon(\eta, \psi, dx) = \begin{cases} \dfrac{\eta(c)}{|c|} \displaystyle\int_{\mathcal{O}} dx, & \text{si } \eta \text{ és no ramificat}, \\ \displaystyle\int_{F^*} \eta^{-1}(x)\psi(x)dx, & \text{si } \eta \text{ és ramificat}. \end{cases}$$

En particular, es té que $\varepsilon(\eta,\psi,dx)=1$, en el cas en què η és no ramificat i se satisfan simultàneament les igualtats $\int_{\mathcal{O}} dx = 1$ (la mesura de Haar és normalitzada) i $n(\psi)=0$ (podríem dir, si el caràcter additiu ψ és de "conductor" 0, o bé "no ramificat"?); i, també, es tenen les fórmules:

$$\varepsilon(\eta,\psi,dx)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\pi^n U}\eta^{-1}(x)\pi(x)dx=\int_{c^{-1}U}\eta^{-1}(x)\pi(x)dx,$$

en el cas en què η és ramificat. A més a més, per a tot quasicaràcter η i tot quasicaràcter no ramificat, ω, és $\varepsilon(\eta\omega,\psi,dx)=\varepsilon(\eta,\psi,\omega)\omega(\pi^{n(\psi)+a(\eta)})$. Aquestes fórmules, juntament amb les relacions (*), determinen els factors ε completament.

Amb tots aquests ingredients, podem enunciar les propietats bàsiques del canvi de base per a $\mathbf{GL}(1)$ en el cas local. L'exactitud de la segona fila del diagrama del lema **1.1** permet provar que se satisfan les relacions següents entre les funcions L i la normalització de Langlands dels factors ε associats a aquestes representacions (cf. Ta79, §3.6).

2.9. Proposició. *Siguin F un cos local, $\eta\in\mathcal{A}(F)$ un quasicaràcter qualsevol, i $F\xrightarrow{\psi}\mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu i no trivial de F. Posem $\psi_{E|F}:=\psi\circ\mathrm{Tr}_{E|F}$ el caràcter additiu de E definit a partir de ψ per composició amb la traça $\mathrm{Tr}_{E|F}:E\to F$. Llavors,*

$$L(\eta_{E|F})=\prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}}L(\eta\zeta),$$
$$\varepsilon(\eta_{E|F},\psi_{E|F})=\lambda_{E|F}(\psi)^{-1}\prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}}\varepsilon(\eta\zeta,\psi),$$

on $\lambda_{E|F}(\psi)$ és un factor local associat a ψ, que depèn de la normalització dels factors ε. $\square$

A continuació tractarem el cas global. Siguin, doncs, F un cos global, $\psi:\mathbb{A}_F/F\to\mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu, i dx una mesura de Tamagawa de $\mathbb{A}_F$; és a dir, una mesura de Haar tal que $\int_{\mathbb{A}_F/F}dx=1$. Per a cada plaça v de F, posem ψ_v el component local en v de ψ, i considerem qualsevol factorització de la mesura dx com a producte de mesures locals, $dx=\prod_v dx_v$,

tal que per a quasi tota plaça v sigui $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$. I per a tot quasicaràcter $\eta : C_F \to \mathbb{C}^*$, sigui $\eta_v : C_{F_v} \to \mathbb{C}^*$ el component local en v de η.

Definim la funció L i el factor ε globals per les fórmules

$$L(\eta, s) := \prod_v L(\eta_v, s),$$
$$\varepsilon(\eta, s) := \prod_v \varepsilon(\eta_v \omega_s, \psi_v, dx_v).$$

Aquest darrer producte no depèn de la descomposició de la mesura dx en mesures locals. A més a més, el producte és convergent en algun semiplà $\Re(s) >> 0$, i defineix una funció meromorfa de tot el pla complex que satisfà l'equació funcional

$$L(\eta, s) = \varepsilon(\eta, s) L(\eta^*, 1 - s),$$

on η^* és el dual de η (cf. [**Ta 79**, thm. 3.5.3]).

Anàlogament al cas local, l'exactitud de la segona fila del diagrama del lema **1.1** en el cas global permet provar que se satisfan les relacions següents entre les funcions L i els factors ε:

2.10. Proposició. *Siguin F un cos global, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ un quasicaràcter qualsevol, i $\mathbb{A}_F/F \xrightarrow{\psi} \mathbf{U}(1)$ un caràcter additiu i no trivial de $\mathbb{A}_F/F$. Posem $\psi_{E|F} := \psi \circ \mathrm{Tr}_{E|F}$ el caràcter additiu de $\mathbb{A}_E/E$ definit a partir de ψ per composició amb el morfisme deduït de la traça $\mathrm{Tr}_{E|F} : E \to F$. Llavors,*

$$L(\eta_{E|F}, s) = \prod_{\zeta \in \hat{\Gamma}} L(\eta\zeta, s),$$
$$\varepsilon(\eta_{E|F}, s) = \prod_{\zeta \in \hat{\Gamma}} \varepsilon(\eta\zeta, s). \ \square$$

§3. Canvi de base per a GL(2) en els L-grups

En aquesta secció, F és un cos local o bé global, $E|F$ una extensió cíclica de grau primer $[E : F] = \ell$, i σ un generador de $\Gamma := \mathrm{Gal}(E|F)$. Com en el capítol 20, indicarem els L-grups per ${}^LG$. A partir d'ara, $G := G_{|F} :=$

$\mathbf{GL}(2)_{|F}$ indicarà el grup (esquema en grups) $\mathbf{GL}(2)$ definit sobre F, $G_{|E} := \mathbf{GL}(2)_{|E}$ el grup $\mathbf{GL}(2)$ definit sobre E, i $G_{E|F}$ el grup (definit sobre F) que s'obté per la restricció d'escalars $F \to E$ a partir del grup $G_{|E}$; en particular, i a nivell de punts, és $G_{E|F}(F) = \mathbf{GL}(2, E)$, mentre que $G(F) = \mathbf{GL}(2, F)$.

3.1. Proposició. *El grup $G_{E|F}$ és quasidescompost i existeix una aplicació natural*

$$^LG = \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}) \times \Gamma_F \to {}^LG_{E|F} = \mathbf{GL}(2,\mathbb{C})^\Gamma \rtimes \Gamma_F,$$

on $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})^\Gamma$ és el conjunt de les aplicacions de Γ en $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$, $\Gamma_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ el grup de Galois absolut, i Γ_F actua en $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})^\Gamma$ per permutació de les coordenades.

DEMOSTRACIÓ. Restricció d'escalars. (Cf. [**Ge-La 79**, §3], [**Bo 79**, §5, §15, ex.]) □

3.2. Definició. Considerem, ara, els conjunts $\Phi(G)$ i $\Phi(G_{E|F})$. Recordem que $\Phi(G)$ és el conjunt de classes d'equivalència (mòdul automorfismes interns definits per elements de $^LG^0$) de morfismes admissibles $W'_F \to {}^LG$ sobre Γ_F, on W'_F és el grup de Weil-Deligne de $\overline{F}|F$ (cf. el capítol 26 i [**Ta 79**§4]). En particular, si $F = \mathbb{R}$ o bé $F = \mathbb{C}$, o bé F és un cos global, llavors el grup de Weil-Deligne W'_F coincideix amb el grup de Weil W_F, per definició. El conjunt $\Phi(G_{E|F})$ es defineix anàlogament i es pot identificar amb el conjunt $\Phi(G_{|E})$; a més a més, l'aplicació anterior ens permet definir una aplicació

$$\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F}) = \Phi(G_{|E}),$$

que s'anomena l'aixecament de canvi de base, de la manera següent. Sigui $W'_F \xrightarrow{\rho} {}^LG$ un representant d'un element de $\Phi(G)$; llavors, per restricció de ρ a $W'_E \subseteq W'_F$ i composició amb l'aplicació anterior, obtenim una aplicació

$$\rho_{E|F} : W'_E \to W'_F \xrightarrow{\rho} {}^LG \to {}^LG_{E|F}.$$

Aquesta aplicació defineix un element de $\Phi(G_{E|F})$. L'aixecament de canvi de base és l'asignació $\rho \mapsto \rho_{E|F}$.

3.3. Exemple. Suposem que F és un cos local no arquimedià i que l'extensió $E|F$ és no ramificada. Sigui $\mathrm{Fr}_F \in \Gamma_F$ un element de Frobenius;

llavors, $\mathrm{Fr}_E := \mathrm{Fr}_F^\ell \in \Gamma_E$ és un element de Frobenius. Si la representació ρ és no ramificada i definida per l'assignació $\mathrm{Fr}_F \mapsto s$, on $s \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ és un element semisimple, llavors $\rho_{E|F}$ també és no ramificada i definida per $\mathrm{Fr}_E \mapsto s^\ell$.

Pel que fa a les funcions L i els factors ε, la definició de les quals es pot veure en [**Ta 79**, §3.3, §3.4, §3.5], se satisfà el resultat següent.

3.4. Proposició. *Sigui $\rho \in \Phi(G)$ un element qualsevol. En el cas en què F és un cos local, sigui $F \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^*$ un caràcter additiu i no trivial de F. Llavors,*

$$\begin{aligned} L(\rho_{E|F}) &= \prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}} L(\rho\otimes\zeta), \\ \varepsilon(\rho_{E|F}) &= \prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}} \varepsilon(\rho\otimes\zeta), && \textit{si } F \textit{ global}, \\ \varepsilon(\rho_{E|F},\psi_{E|F}) &= \lambda_{E|F}(\psi)^{-2}\prod_{\zeta\in\hat{\Gamma}} \varepsilon(\rho\otimes\zeta,\psi), && \textit{si } F \textit{ local}, \end{aligned}$$

on $\psi_{E|F} := \psi\circ\mathrm{Tr}_{E|F}$ és el caràcter additiu de E definit a partir de ψ per composició amb la traça $\mathrm{Tr}_{E|F}$, i $\lambda_{E|F}(\psi)$ és un factor local associat a ψ, com en la darrera proposició de la secció anterior.

Demostració. (Cf. [**Ta 79**, §3.3, §3.4, §3.5.]). □

A més a més, a partir de la classificació de les representacions admissibles de dimensió 2 del grup de Weil-Deligne W'_F (cf. [**Ge-La 79**, prop. 2 i Appendix A]), es pot demostrar el resultat següent.

3.5. Proposició.

(a) L'aplicació de canvi de base $\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F})$ té imatge el conjunt $\Phi(G_{E|F})^\Gamma$ format pels elements invariants per a l'acció de Γ.

(b) En cadascun dels casos següents (respectivament, cíclic, diedral, també diedral i especial), l'aixecament de canvi de base és donat per:

$$\begin{aligned} (\mu\oplus\nu)_{E|F} &= \mu_{E|F}\oplus\nu_{E|F}, \\ (\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_F}\theta)_{E|F} &= \mathrm{Ind}_{W_{KE}}^{W_E}\theta_{KE|K}, && \textit{per a } E\neq K, \\ (\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_F}\theta)_{E|F} &= \theta\oplus{}^\sigma\theta, && \textit{per a } E=K \textit{ i } 1\neq\sigma\in\Gamma, \\ (\eta\otimes\mathrm{sp}(2))_{E|F} &= \eta_{E|F}\otimes\mathrm{sp}(2), && \textit{per a } F \textit{ no arquimedià}. \end{aligned}$$

Aquí, μ,ν són representacions de W_F de dimensió 1 *(és a dir, quasicaràcters de C_F), $K|F$ és una extensió quadràtica i $\theta \in \mathcal{A}(K)$ un quasicaràcter, $\eta \in \mathcal{A}(F)$ un quasicaràcter, i* $\mathrm{sp}(2)$ *la representació de W'_F (que només es dóna en el cas en què F és un cos local no arquimedià) definida per*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad w \in W_F \mapsto \begin{bmatrix} |w| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) La fibra a què pertany un element $\rho \in \Phi(G)$ indescomponible està formada pels $\rho \otimes \zeta$, per a $\zeta \in \hat{\Gamma}$.

(d) La fibra a què pertany un element $\rho = \lambda \oplus \mu \in \Phi(G)$ està formada pels $\lambda\zeta \oplus \mu\zeta'$, per a $\zeta, \zeta' \in \hat{\Gamma}$.

DEMOSTRACIÓ. (Cf. [**Ge-La 79**, Apèndix A]). □

3.6. Observació. A part d'aquestes representacions, de dimensió 2 també hi ha les de tipus excepcional: (tetraèdric) A_4, i (octaèdric) S_4 que només apareixen en el cas global i en el cas local no arquimedià de característica residual 2, i (icosaèdric) A_5, que només apareix en el cas global. D'aquestes no se'n diu res. (De totes maneres, cf. els capítols 26, 27, 31 i 32.)

§4. Canvi de base per a GL(2) en el cas local

Suposem, ara, que F és un cos local i mantinguem les notacions de la secció anterior. En particular, siguin $G := \mathbf{GL}(2)_{|F}$, i $G_{E|F}$ la restricció a F del grup $G_{|E}$. Designem per $\Pi(G)$ el conjunt de classes de representacions admissibles irreductibles del grup de punts $G(F)$.

4.1. Motivació de la definició. El canvi de base a nivell de L-grups és entre "representants de classes de representacions" d'esquemes en grups. Convé recordar en aquest punt que $\Phi(G)$ està format per (classes) de "representants de classes de representacions" de G, que són morfismes del grup (esquema en grups) de Weil-Deligne W'_F.

Hi ha una bijecció conjectural entre $\Phi(G)$ i $\Pi(G)$ i el canvi de base a nivell d'esquemes en grups $\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F})$ ha de reflectir una aplicació $\Pi(G) \to \Pi(G_{E|F})$ a nivell de representacions dels grups de punts.

D'altra banda, com que la imatge del canvi de base $\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F})$ està formada pels elements Γ-invariants de $\Phi(G_{E|F})$, convé estudiar, en primer lloc, i a nivell de punts, les representacions irreductibles admissibles de $G(E)$ equivalents a les seves conjugades per Γ (o sigui, per σ).

Suposem que $\tilde{\pi}$ és una representació irreductible admissible de $G(E)$ tal que ${}^{\sigma}\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi}$; això implica que, en l'espai de la representació $\tilde{\pi}$, existeix un operador P tal que:

(a) per a tot $z \in G(E)$ és $P^{-1}\tilde{\pi}(z)P = \tilde{\pi}(z^{\sigma})$; i

(b) $P^{\ell} = \mathrm{id}$.

Aquest operador P és determinat llevat d'una arrel ℓ-èsima de la unitat, i l'aplicació donada per $(\sigma^m, z) \mapsto P^m\tilde{\pi}(z)$ defineix una extensió $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{\pi}$ a una representació del producte semidirecte $\Gamma \ltimes G(E)$.

4.2. Proposició. *La representació $\tilde{\pi}'$ té caràcter, i és donat per una funció $\mathrm{Tr}\,\tilde{\pi}'$ localment integrable en $\Gamma \ltimes G(E)$.*

De fet, en $\sigma \times G(E)$, el caràcter $\mathrm{Tr}\tilde{\pi}'$ defineix una distribució σ-invariant en $G(E)$; és a dir, invariant per la σ-conjugació: $z \mapsto y^{-\sigma}zy$, per a $y, z \in G(E)$.

Posem, per a tot $z \in G(E)$, $N_{E|F,\sigma}z := z^{\sigma^{\ell-1}} \cdots z^{\sigma} \cdot z$. Llavors:

4.3. Proposició.

(a) Per a tot $z \in G(E)$, $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}\, z$ és conjugat en $G(E)$ d'un element de $G(F)$.

(b) L'aplicació $z \mapsto \mathrm{N}_{E|F,\sigma}\, z$ defineix una injecció del conjunt de classes de σ-conjugació de $G(E)$ en el conjunt de classes de conjugació de $G(F)$.

(c) Les classes el·líptiques de $G(F)$ que s'obtenen per $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}$ són les que tenen determinant en $\mathrm{N}_{E|F}E^*$ (observem que $E^* = C_E$).

(d) Les classes hiperbòliques de $G(F)$ que s'obtenen per $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}$ són les que tenen els valors propis en $\mathrm{N}_{E|F}\, E^*$.

(e) Qualsevol classe unipotent de $G(F)$ és a la imatge de $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}$.

Amb aquests prerequisits, podem donar la definició de canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas local.

4.4. Definició. Siguin $\pi \in \Pi(G)$ una representació irreductible admissible del grup $G(F)$ i $\tilde{\pi}$ una representació irreductible admissible de $G(E)$ equivalent a la seva conjugada per σ. Es diu que $\tilde{\pi}$ és un aixecament de π, o millor un aixecament per canvi de base de π, si, i només si, se satisfà alguna de les dues condicions següents:

(a) π és del tipus $\pi = \pi(\mu, \nu)$ i $\tilde{\pi} = \pi(\mu_{E|F}, \nu_{E|F})$;

o bé

(b) existeix una extensió $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{\pi}$ a $\Gamma \rtimes G(E)$ tal que $\mathrm{Tr}\ \tilde{\pi}'(\sigma \times z) = \mathrm{Tr}\ \pi(x)$ per a tot element $z \in G(E)$ tal que $\mathrm{N}_{E|F,\sigma}\, z$ és conjugat en $G(E)$ a un element semisimple regular $x \in G(F)$.

Se satisfà el resultat següent.

4.5. Teorema. (Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas local.)

(a) Tot element $\pi \in \Pi(G)$ admet un únic aixecament $\pi_{E|F} \in \Pi(G_{E|F})$.

(b) Tot element $\pi \in \Pi(G_{E|F})$ fix per Γ és un aixecament.

(c) L'aixecament $\pi_{E|F}$ és independent de l'elecció del generador $\sigma \in \Gamma$.

(d) Siguin $\pi, \pi' \in \Pi(G)$. Els aixecaments de π i π' coincideixen (és a dir, $\pi_{E|F} = \pi'_{E|F}$) si, i només si, o bé $\pi' = \pi \otimes \zeta$, per a algun caràcter $\zeta \in \hat{\Gamma}$ (és a dir, l'una és torçada de l'altra per un caràcter), *o bé $\pi = \pi(\mu, \nu)$ i $\pi' = \pi(\mu', \nu')$, amb μ, μ', ν, ν' quasicaràcters de $C_F = F^*$ tals que $\mu^{-1}\mu', \nu^{-1}\nu' \in \hat{\Gamma}$* (és a dir, són irreductibles de la sèrie principal que satisfan la darrera condició).

(e) Per a la restricció al centre de $\pi \in \Pi(G)$, es té que $\omega_{\pi_{E|F}} = (\omega_\pi)_{E|F}$; és a dir, l'aixecament de la restricció al centre és la restricció al centre de l'aixecament. (Té bon comportament per restricció al centre.)

(f) Per a tot $\pi \in \Pi(G)$ i tota representació de C_F de dimensió 1, χ, és $(\pi \otimes \chi)_{E|F} = \pi_{E|F} \otimes \chi_{E|F}$. (Té bon comportament per torçament.)

(g) Per a tot $\pi \in \Pi(G)$ és $(\pi_{E|F})^\vee = (\pi^\vee)_{E|F}$. (La representació contragradient té bon comportament.)

(h) Per a les representacions $\pi(\rho)$, associades a representacions admissibles $\rho \in \Phi(G)$, de dimensió 2, es té, almenys quan ρ no és excepcional (que és quan l'existència és provada), que $\pi(\rho)_{E|F} = \pi(\rho_{E|F})$. (Bon comportament amb la bijecció conjectural, quan aquesta està definida.)

(i) Siguin $k \subseteq F \subseteq E$ tals que $E|k$ i $F|k$ siguin galoisianes, i $\pi \in \Pi(G)$. Llavors, per a tot $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Gal}(E|k)$, és ${}^{\tilde{\gamma}}(\pi_{E|F}) = ({}^{\gamma}\pi)_{E|F}$, on $\gamma \in \mathrm{Gal}(F|k)$ és la restricció de $\tilde{\gamma}$ a F.

§5. Canvi de base per a GL(2) en el cas global

Suposem, ara, que F és un cos de nombres. Com abans, siguin $G := \mathbf{GL}(2)_{|F}$, i $G_{E|F}$ la restricció a F del grup $G_{|E}$.

Sgui $\Pi(G)$ el conjunt de classes de representacions automorfes admissibles irreductibles del grup de punts $G(\mathbb{A}_F) = \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F)$, on $\mathbb{A}_F$ és l'anell de les adeles de F.

El canvi de base a nivell de L-grups, $\Phi(G) \to \Phi(G_{E|F})$, hauria de reflectir una aplicació $\Pi(G) \to \Pi(G_{E|F})$, on $\Pi(G_{E|F})$ és el conjunt de les representacions automorfes admissibles irreductibles de $G(\mathbb{A}_E) = G_{E|F}(\mathbb{A}_F) = \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_E)$. A més a més, una tal aplicació ha de ser compatible amb les dades locals; és a dir, amb els canvis de base del cas local.

Per a relacionar els dos casos, convé fixar les notacions. Per a tota plaça v de F, indiquem per F_v la compleció de F en v i posem, com és habitual, $E_v := E \otimes_F F_v$. Com que l'extensió $E|F$ és cíclica de grau primer ℓ, se satisfà que o bé $E_v|F_v$ és una extensió cíclica de grau ℓ (en el cas que v no descompon en E), o bé que E_v és un producte de ℓ còpies de F_v (en el cas que v descompon en E). En el darrer cas, i per a $\pi \in \Pi(G(F_v))$, definim l'aixecament local $\pi_{E_v|F_v}$ per $\pi_{E_v|F_v} := \pi \otimes \cdots \otimes \pi$ (ℓ cops).

5.1. Definició. Siguin $\pi \in \Pi(G)$ una representació automorfa admissible irreductible del grup $G(F)$ i $\tilde{\pi} \in \Pi(G_{E|F})$ una representació automorfa admissible irreductible de $G(E)$. Es diu que $\tilde{\pi}$ és un aixecament de π, o millor un aixecament per canvi de base de π, si, i només si, per a tota plaça v de F, $\tilde{\pi_v}$ és un aixecament de π_v, on π_v designen els components locals de π, i similarment per a $\tilde{\pi}$.

Se satisfà el resultat següent.

5.2. Teorema. (Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas global.)

(a) Tot element $\pi \in \Pi(G)$ admet un únic aixecament $\pi_{E|F} \in \Pi(G_{E|F})$.

(b) Un element cuspidal $\tilde{\pi} \in \Pi(G_{E|F})$ és un aixecament si, i només si, és fixat per Γ; en aquest cas, $\tilde{\pi}$ és un aixecament de representacions cuspidals.

(c) L'aixecament d'un element cuspidal $\pi \in \Pi(G)$ és un aixecament cuspidal, excepte en el cas $\ell = 2$ i $\pi = \pi(\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\theta)$, en què $\pi_{E|F} = \pi(\theta, {}^{\sigma}\theta)$.

(d) Siguin $\pi, \pi' \in \Pi(G)$, π cuspidal, i suposem que $\pi_{E|F} = \pi'_{E|F}$. Llavors, $\pi' = \pi \otimes \zeta$, per a algun caràcter $\zeta \in \hat{\Gamma}$.

(e) Per a la restricció al centre de $\pi \in \Pi(G)$, es té que $\omega_{\pi_{E|F}} = (\omega_\pi)_{E|F}$; és a dir, l'aixecament de la restricció al centre és la restricció al centre de l'aixecament. (Té bon comportament per restricció al centre.)

(f) Per a tot $\pi \in \Pi(G)$ i tota representació de C_F de dimensió 1, χ, és $(\pi \otimes \chi)_{E|F} = \pi_{E|F} \otimes \chi_{E|F}$. (Té bon comportament per torçament.)

(g) Per a tot $\pi \in \Pi(G)$ és $(\pi_{E|F})^\vee = (\pi^\vee)_{E|F}$. (La representació contragradient té bon comportament.)

(h) Si $\pi = \pi(\rho)$ per a algun $\rho \in \Phi(G)$, és $\pi(\rho)_{E|F} = \pi(\rho_{E|F})$.

(i) Siguin $k \subseteq F \subseteq E$ tals que $E|k$ i $F|k$ siguin galoisianes, i $\pi \in \Pi(G)$. Llavors, per a tot $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Gal}(E|k)$, és ${}^{\tilde{\gamma}}(\pi_{E|F}) = ({}^{\gamma}\pi)_{E|F}$, on $\gamma \in \mathrm{Gal}(F|k)$ és la restricció de $\tilde{\gamma}$ a F.

5.3. Observació. Hi ha exemples de $\tilde{\pi} \in \Pi(G_{E|F})$ no cuspidals i fixats per Γ que no són aixecaments.

Bibliografia

[**Bo 79**] Borel, A.: Automorphic L-functions, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 27–61.

[**Ca-Fr 67**] Cassels, J. W. S.; Fröhlich, A., (eds.): *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

[**Ge-La 79**] Gérardin, P.; Labesse, J. P.: The Solution of a Base Change Problem for $\mathbf{GL}(2)$ (following Langlands, Saito, Shintani), en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 115–133.

[**La 70**] Lang, S.: *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, 1970.

[**Ta 79**] Tate, J.: Number theoretic background, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 3–26.

[**We 74**] Weil, A.: *Basic Number Theory*, GMW, n. 144, Springer, 1974.

CAPÍTOL 26

Filosofia d'Artin. Representacions de Weil. Conjectura de Langlands local per a GL(2)

JOAN-CARLES LARIO SESSIÓ 1A. I 2A. DEL DIA 19 DE MARÇ DE 1997

Aquest capítol no ha estat redactat. El seu contingut es completa en el capítol següent; el programa i la bibliografia recomanada per als dos capítols són els següents:

Conjectures de Langlands

Representacions de dimensió 2 del grup de Weil-Deligne d'un cos local no arquimedià K i representacions de $\mathbf{GL}(2, K)$. Teorema de Kutzko. El cas $p = 2$. Representacions de dimensió 2 del grup de Weil d'un cos global i representacions automorfes de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$. Representacions ℓ-àdiques associades a formes modulars.

Referències:

[**Ca 72**] Casselman, W.: On representations of $\mathbf{GL}(2)$ and the arithmetic of modular curves, en el llibre *Modular Functions of One Variable II*, Deligne, P., ed., LNM, n. 349, Springer, 1972.

[**De 72**] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations de $\mathbf{GL}(2)$, en el llibre *Modular Functions of One Variable II*, Deligne, P., ed., LNM, n. 349, 1972.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R. P.: *Automorphic forms on* $\mathbf{GL}_2$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

[Ku 78] Kutzko, Ph.: On the supercuspidal representations of $\mathbf{GL}(2)$, I, II, *Amer. J. Math.* **100** (1978), 43–60.

[Ku 80] Kutzko, Ph.: The local Langlands conjecture, *Annals of Math.* **112** (1980).

[Tu 79] Tunnell, J.: Report on the local Langlands conjecture for $\mathbf{GL}_2$, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, 1979, pp. 135–138.

Capítol 27

Conjectures globals de Langlands

Pilar Bayer Sessió 1a. del dia 9 d'abril de 1997

Sigui $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ l'anell de les adeles d'un cos de nombres F. En aquest capítol, volem relacionar la teoria de les representacions automorfes de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{A})$ amb la teoria, que ens és més familiar, de les representacions galoisianes que corresponen al grup de Galois absolut $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Entre aquestes, ens cal distingir les representacions complexes i les representacions λ-àdiques, on λ denota una plaça no arquimediana de F. Com veurem, ambdues situacions galoisianes caldria que encaixessin en la situació automorfa.

Com que treballarem en nivell conjectural, no hi ha massa dificultats si ens situem en dimensió n arbitrària, en lloc de $n = 2$, com hem fet fins ara.

§1. La llei de reciprocitat de Langlands

Sigui

$$\pi : \mathbf{GL}(n, \mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$$

una representació automorfa, irreductible i admissible. Sabem que la podem descompondre segons

$$\pi = \otimes \pi_v,$$

on les representacions locals π_v de $\mathbf{GL}(n, F_v)$ satisfan

i) π_v és irreductible per a tot v;

ii) π_v és no ramificada quasi per a tot v.

Si $n = 1$, la representació $\pi = \chi$ es correspon amb un Heckegrössen-charakter. Sigui $\mathcal{O}_v$ l'anell dels enters de F_v. La condició que χ_v sigui no ramificat pot expressar-se tot dient que la restricció de χ_v al subgrup $O_v^* = \mathbf{GL}(1, \mathcal{O}_v)$ de les unitats de F_v^* és trivial. Aquest fet motiva la definició general següent:

1.1. Definició. La representació local π_v s'anomena *no ramificada* si la seva restricció al subgrup compacte maximal estàndard

$$K_v := \mathbf{GL}(n, \mathcal{O}_v)$$

conté, almenys, un vector fix.

1.2. Proposició. *Suposem que la representació local π_v és no ramificada. Aleshores,*

i) K_v fixa exactament un subespai de dimensió **1** *de l'espai de π_v.*

ii) A π_v li correspon, canònicament, una classe de conjugació d'elements semisimples de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Denotem aquesta classe per A_v.

DEMOSTRACIÓ. Les afirmacions de la proposició són conseqüència de la teoria de les funcions esfèriques per a $\mathbf{GL}(n, F_v)$. $\square$

1.3. Observacions. L'afirmació *i)* implica que, donada π, es pugui definir el producte $\otimes \pi_v$, que es pren restringit al conjunt dels vectors fixos esmentats.

L'afirmació *ii)* permet associar, a cada component local no ramificat, un factor d'Euler de grau n:

$$L(s, \pi_v) = [\det(I - (q_v)^{-s} A_v)]^{-1},$$

on q_v denota el nombre d'elements del cos residual de $\mathcal{O}_v$.

1.4. Exemple 1. Suposem que $n = 1$, aleshores, si π_v és no ramificada, la classe de conjugació A_v ve donada pel valor $\pi_v(\omega) = \chi_v(\omega)$, on ω denota un paràmetre d'uniformització local de F_v.

1.5. Exemple 2. Suposem que $n = 2$, que $F = \mathbb{Q}$, i que $\pi_f = \otimes \pi_p$ és la representació automorfa associada a una forma modular

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$$

de $S(N, k, \chi)$, vector propi de tots els operadors de Hecke. Aleshores, a un component no ramificat π_p li correspon la classe de conjugació de matrius

$$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & 0 \\ 0 & \beta_p \end{pmatrix}$$

si, i només si, $\det(A_p) = p^{k-1}\chi(p)$, $\operatorname{tr}(A_p) = a_p$.

La llei de reciprocitat de Langlands pregunta si tota funció L d'Artin, de grau n, és la funció L associada a una forma automorfa de $\mathbf{GL}(n)$. Dit d'una altra manera, fixem una representació complexa i contínua

$$\sigma : \operatorname{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}),$$

i considerem les classes de conjugació de matrius de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ definides pels elements de Frobenius $[\sigma(\operatorname{Frob}_v)]$. Volem saber si existeix una representació automorfa $\pi = \otimes \pi_v$ del grup $\mathbf{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ tal que

$$[\sigma(\operatorname{Frob}_v)] = A_v,$$

quasi per a tot v.

1.6. Llei de reciprocitat de Langlands (conjectural). Donada una representació contínua complexa

$$\sigma : \operatorname{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}),$$

existeix una representació automorfa

$$\pi(\sigma) : \mathbf{GL}(n, \mathbb{A}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathcal{A})$$

que satisfà les condicions següents:

i) $L(\sigma, s) = L(\pi(\sigma), s)$.

ii) Si σ és irreductible i no trivial, aleshores $\pi(\sigma)$ és cuspidal.

iii) Si canviem el grup de Galois absolut, $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, pel grup de Weil absolut, W_F, aleshores la correspondència natural

$$\sigma \to \pi(\sigma)$$

esdevé una bijecció.

iv) La correspondència anterior és compatible amb canvis de base.

1.7. Observació. La llei de reciprocitat de Langlands ens permet escriure

$$L(\sigma, s) \sim \prod_v [\det(I - (q_v)^{-s} A_v)]^{-1}.$$

§2. Funcions L de motius

2.1. Notacions.

F designa un cos global;

E, una extensió finita de F;

M, un motiu sobre F amb multiplicació complexa per E;

$\sigma : E \to \mathbb{C}$, una immersió fixada;

$L(M_\sigma, s) = \prod_v L(M_{v,\sigma}, s)$, la funció L de M.

Els factors de la funció L en els primers arquimedians es determinen mitjançant la teoria de Hodge. En efecte, una estructura de Hodge sobre M_v permet definir una representació del grup de Weil, W_{F_v}, i, a partir d'aquesta, es construeix el factor local de L. D'altra banda, associats a M, es tenen sistemes compatibles de representacions λ-àdiques de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Per restricció als grups locals s'obtenen representacions λ-àdiques dels corresponents grups de descomposició. A partir d'una representació λ-àdica local, es fabrica una representació *complexa* del grup de Weil-Deligne local corresponent, invariant per $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$. Aquestes representacions complexes proporcionen els factors L i ε a les places no arquimedianes.

2.2. Conjectura. La funció L de M, que convergeix en un semiplà, admet una prolongació analítica a tot el pla complex i satisfà una equació funcional de la forma

$$L(M_\sigma, s) = \varepsilon(M_\sigma, s) L(M_\sigma^*, 1-s),$$

on $M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q})$ designa el motiu dual i

$$\varepsilon(M_\sigma, s) = \prod_v \varepsilon(M_{v,\sigma}, s).$$

El punt clau que permet el pas de representacions λ-àdiques locals a representacions complexes locals el proporciona el resultat següent.

2.3. Proposició. (Grothendieck) *Sigui $\rho_\lambda : W_{F_v} \longrightarrow \mathbf{GL}(V_\lambda)$ una representació λ-àdica del grup de Weil local. Suposem que la característica del cos residual i λ són primers entre si. Aleshores, existeix un endomorfisme nilpotent N de V_λ tal que*

$$\rho_\lambda(g) = \exp(t_\ell(g) N),$$

per a tot g en un cert subgrup obert del grup d'inèrcia I_{F_v}. Aquí

$$t_\ell : I_{F_v} \to \mathbb{Q}_\ell$$

denota un homomorfisme no nul.

2.4. Corol·lari. *Suposem que $\rho_\lambda : W_{F_v} \longrightarrow \mathbf{GL}(V_\lambda)$ és una representació semisimple. Aleshores, existeix un subgrup obert de I_v que opera trivialment a V_λ. Per tant, la imatge de ρ_λ és finita i es pot interpretar com una representació per matrius complexes de W_{F_v}.*

2.5. Conjectura. Sigui F_v un cos local no arquimedià. Existeix una correspondència bijectiva entre el conjunt de classes d'isomorfia de representacions del grup de Weil-Deligne W'_{F_v} complexes de grau n semisimples i el conjunt de classes d'isomorfia de representacions irreductibles i admissibles de $\mathbf{GL}(n, F_v)$.

En dimensió 2 i sobre cossos de funcions, es té l'important resultat global següent.

2.6. Teorema. (Deligne) *Si $n = 2$ i F és un cos de funcions, existeix una bijecció entre el conjunt de representacions automorfes de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ i el de sistemes compatibles de representacions ℓ-àdiques de* $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.

Quan F és un cos de nombres, tenim en aquesta direcció el teorema de Wiles i els estudis de funcions ζ associades a corbes de Shimura. És natural preguntar-se si totes les funcions L associades a sistemes compatibles de representacions λ-àdiques del grup de Galois absolut d'un cos de nombres F coincideixen amb funcions L de representacions automorfes de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F)$. En aquesta direcció caminen les conjectures globals.

§3. Conjectures globals de Langlands

El mateix Langlands, en el seu article [**La 79**], posa de manifest les dificultats en la formulació de conjectures globals.

3.1. Conjectures de Langlands. Sigui F un cos de nombres. Sigui $\Pi(F)$ la categoria abeliana generada per les representacions automorfes i cuspidals

$$\pi : \mathbf{GL}(n, \mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{A}).$$

i) Hauria d'existir un grup algebraic

$$\mathbf{G}_{\Pi(F)},$$

reductiu sobre $\mathbb{C}$, tal que les classes d'equivalència de les seves representacions complexes de dimensió n

$$\sigma : \mathbf{G}_{\Pi(F)} \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

estigués en correspondència bijectiva amb els elements (isobàrics) de $\Pi(F)$.

ii) La categoria $\mathrm{Rep}(\mathbf{G}_\Pi)$ de representacions complexes de dimensió finita seria una categoria tannakianna. Per tant, $\Pi(F)$ hauria de tenir també aquesta estructura, però a l'hora de precisar les coses, sorgeixen dificultats.

iii) Caldria que $\mathbf{G}_{\Pi(F)}$ fos una clausura algebraica del grup de Weil global W_F. És a dir, s'hauria de tenir un homomorfisme amb imatge Zariski densa

$$W_F \longrightarrow \mathbf{G}_{\Pi(F)}(\mathbb{C}).$$

El grup $\mathbf{G}_{\Pi(F)}$ hauria de ser molt gran i es veuria com un límit projectiu de grups de dimensió finita.

iv) El teorema de densitat de Tchebotarev es generalitzaria en una conjectura del tipus Sato-Tate, que descriuria la llei de distribució de les classes de conjugació $A_v := A(\pi_v)$ a $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

§4. Varietats de Shimura

4.1. Notació.

F denota un cos de nombres totalment real;

$n = [F : \mathbb{Q}]$;

$\mathcal{O}_F$, l'anell d'enters de F;

H, una àlgebra de quaternions sobre F, totalment indefinida;

$\mathcal{O}_H$, un ordre maximal de H;

G, el grup algebraic definit pel grup multiplicatiu de $\mathcal{O}_H$;

Δ, el producte dels primers on, o bé H, o bé F ramifica.

4.2. Observació. Per a tot anell R, es té que

$$G(R) = (\mathcal{O}_H \otimes R)^*.$$

En particular, $G(\mathbb{Q}) = H^*$, canònicament.

Considerem l'espai $\mathcal{A}$ de formes automorfes sobre

$$G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{A}).$$

En aquest espai opera $G(\mathbb{A})$. La representació regular corresponent s'escriu com una suma $\oplus\pi$ de representacions unitàries, irreductibles i admissibles.

Sigui $K = K_\infty K_f$ un compacte de $G(\mathbb{A})$ convenientment escollit (prou petit). Aleshores,

4.3. Teorema.

i) El conjunt

$$X(H,K)(\mathbb{C}) := G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$$

és la unió d'un nombre finit d'espais analítics complexos, compactes, no singulars, i de dimensió n.

ii) Existeix un esquema $X(H,K)$, propi i llis, definit sobre $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ *tal que els seus punts complexos coincideixen amb els elements del conjunt anterior.*

Tot seguit enunciem el teorema principal d'aquesta secció.

4.4. Teorema. (Langlands) *La funció ζ de Hasse-Weil de $X(H,K)$ coincideix, llevat d'un nombre finit de factors primers que corresponen a primers dividint Δ, amb un producte de funcions L associades a formes automorfes respecte del grup quaterniònic idèlic $G(\mathbb{A})$. És a dir,*

$$\zeta(s, X(H,K)) = \prod L(s - n/2, \pi, \rho)^{(m,K)},$$

on π recorre tots els constituents de $\mathcal{A}$, els exponents són gairebé tots iguals a zero, i ρ designa una representació concreta del L-grup ${}^LG$ associat a G.

Demostració. El teorema requereix, entre d'altres fets, una versió *ad hoc* de la fórmula de les traces. Segons ens diu Casselman [**Ca 79**], la part més misteriosa de la demostració és la que recorre certs passadissos d'un immoble de Bruhat-Tits convenient. Aquests camins són necessaris a l'hora d'integrar; és a dir, d'aplicar la fórmula de les traces en la seva versió segona. □

4.5. Observació. Mirant papers de Langlands, no m'ha semblat que la demostració del teorema anterior es pugui considerar completa. Cal estudiar: L-paquets, problemes d'indistingibilitat, problemes de reducció dolenta, a més de certs problemes combinatoris associats a xarxes de dimensió 2 que intervenen en el càlcul dels camins abans esmentats.

4.6. Observació. En el teorema caldria considerar, d'entrada, les representacions π amb multiplicitats. Però, per la correspondència de Jacquet-Langlands, les representacions automorfes de $G(\mathbb{A})$ es corresponen amb representacions automorfes de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$. En aquest darrer cas, sabem que són vàlids teoremes de multiplicitat 1 (cf. el capítol 18). Aquests fets repercuteixen en què totes les π que considerem entrin amb multiplicitat 1 en la representació regular.

4.7. Observació. Quan $n = 1$, el teorema anterior implica que la funció ζ associada a una corba de Shimura admet una prolongació analítica i satisfà una equació funcional. Però, per a $n > 1$, el teorema de Langlands no permet arribar a la mateixa conclusió de manera directa. Hi ha quelcom fet en el cas de superfícies de Shimura ($n = 2$).

Bibliografia

[**Ge 75**] Gelbart, S.S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1975.

[**Ge 76**] Gelbart, S.S.: Automorphic Forms and Artin's Conjecture, en el llibre *Modular Functions of One Variable VI*, Serre, J.P.; Zagier, D.B., ed., LNM, Springer, 1977.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic forms on* $\mathbf{GL}_2$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

[**La 68**] Langlands, R.P.: Problems in the theory of automorphic forms, en el llibre *Lectures in Modern Analysis and Applications III*, LNM, Springer, 1968, pp. 18–86.

[**La 77**] Langlands, R.P.: Shimura varieties and the Selberg Trace Formula, *Canad. J. Math.*, n. XXIX (1977).

[**La 79**] Langlands, R.P.: Automorphic Representations, Shimura varieties, and Motives. Ein Märchen, en el llibre *Automorphic Forms, Representations and L-Functions*, Proc. Symposia in Pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, AMS, 1979.

[**Ta 79**] Tate, J.: Number theoretic background, en el llibre *Automorphic Forms, Representations and L-Functions*, Proc. Symposia in Pure Mathematics, n. XXXIII, Part 2, AMS, 1979.

Capítol 28

Teoremes de Carayol (I)

Jordi Guàrdia Sessió 2a. del dia 9 d'abril de 1997

Aquest capítol no ha estat redactat. El programa i la bibliografia recomanada per a aquesta exposició (i la següent) són els següents:

Teoremes de Carayol

El conductor d'una corba el·líptica modular. Teoremes de comparació entre el conductor d'una representació de Galois ℓ-àdica i el conductor d'una reducció mod ℓ.

Referències:

[Ca 86] Carayol, H.: Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modularies de Hilbert, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **19** (1986), 409–468.

[Ca 89] Carayol, H.: Sur les représentations Galoisiennes modulo ℓ attachées aux formes modularies, *Duke Math. J.* **59** (1989), 785–801.

Capítol 29

Teoremes de Carayol (II)

Josep Gonzàlez Sessió 1a. del dia 16 d'abril de 1997

Aquest capítol no ha estat redactat. El programa i la bibliografia recomanada per a aquesta exposició (i l'anterior) són els següents:

Teoremes de Carayol

El conductor d'una corba el·líptica modular. Teoremes de comparació entre el conductor d'una representació de Galois ℓ-àdica i el conductor d'una reducció mod ℓ.

Referències:

[Ca 86] Carayol, H.: Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modularies de Hilbert, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **19** (1986), 409–468.

[Ca 89] Carayol, H.: Sur les représentations Galoisiennes modulo ℓ attachées aux formes modularies, *Duke Math. J.* **59** (1989), 785–801.

Capítol 30

El teorema de Diamond-Taylor

Pilar Bayer Sessió 2a. del dia 16 d'abril de 1997

§1. El teorema de Diamond-Taylor

Com sabem, Ribet demostra a [**Ri 90**] la "conjectura ε", que és un cas molt particular de la conjectura de Serre. La demostració de Ribet consta de dues parts ben diferenciades que corresponen a les situacions d'*ascens del nivell* i de *descens del nivell*, respectivament. La conjectura ε és suficient per provar que el teorema de Fermat és conseqüència de la conjectura de Shimura-Taniyama-Weil.

L'objectiu d'aquest capítol és indicar els passos més remarcables en la prova del teorema principal obtingut per Diamond i Taylor a [**Di-Ta 94-I**]. En la demostració dels resultats d'aquest treball hi intervenen, de manera essencial, formes automorfes associades a àlgebres de quaternions (definides i indefinides) i la correspondència de Jacquet-Langlands. Aquesta ha estat una bona raó per haver-lo escollit com a aplicació de la teoria vista en el curs.

Els resultats de [**Di-Ta 94-I**] entren de manera subtil en la demostració de Wiles del teorema de Fermat. Serveixen per fer palès el nivell on cal anar per provar que una certa àlgebra de Hecke és l'àlgebra de deformacions universals que dicta el problema. Cal un nivell prou alt per agafar totes les deformacions necessàries, però, a la vegada, prou petit perquè l'àlgebra de Hecke associada sigui d'intersecció completa.

L'ordre lògic dels treballs de Diamond i Taylor relatius a aquests temes és el següent: **[Di 91]**, **[Di-Ta 94-I]**, **[Di-Ta 94-II]**, **[Di 95]**.

De tots ells, solament **[Di 95]** se cita a l'article fonamental de Wiles **[Wi 95]**. L'article **[Di-Ta 94-II]** és el que se cita a **[Ta-Wi 95]**. Amb posterioritat, cal també tenir present els resultats de **[Di 96]** relatius a la conjectura de Shimura-Taniyama-Weil.

Del treball **[Di-Ta 94-I]**, ens limitarem a comentar el teorema que segueix.

1.1. Teorema. (Diamond-Taylor) *Sigui ℓ un primer. Suposem donada una representació contínua, irreductible i senar*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}(2, \overline{\mathbb{F}}_\ell).$$

Suposem que la representació ρ és modular, de pes $k \geq 2$, i nivell M primer amb el primer ℓ. Suposem que $\ell > k+1$. Suposem que $r > 0$ és un enter lliure de quadrats que és primer amb $M\ell$. Si, per a tot primer $q|r$, se satisfà que

$$q(\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_q))^2 = (1+q)^2 \det \rho(\mathrm{Frob}_q),$$

aleshores, ρ és modular respecte d'una forma nova amb nivell divisible per r que pertany a l'espai $S_k(\Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(r))$.

(Sobre la definició precisa de representació modular amb un determinat pes i nivell, vegeu **2.2**.)

1.2. Observacions.

i) En el cas $r = q$, primer, els autors ens diuen que el teorema és degut a Ribet, si $k = 2$, i a Diamond, si $k > 2$. Les referències són **[Ri 90]**, **[Ri 91]**, **[Di 91]**.

ii) De fet, l'afirmació i) no és del tot exacta, car Ribet treballa sempre amb formes modulars respecte de $\Gamma_0(Mp)$; és a dir, sense caràcter. En el treball **[Di 91]**, Diamond considera el cas $k \geq 2$, amb caràcter, i generalitza els resultats de Ribet sobre l'ascens del nivell per a $r = q$, primer. El treball de Diamond-Taylor que avui comentem generalitza, per tant, aquests teoremes d'ascens del nivell de Ribet ($k = 2$) i de Diamond ($k \geq 2$). Fins aquí tot va bé.

iii) Un cop pujat el nivell en un primer q escaient (o bé en molts, d'un en un), a l'hora de baixar el nivell en un altre primer p escaient, la situació és més delicada. En el cas sense caràcter, el teorema de Ribet sobre baixades de nivell s'obté per mitjà de l'estudi previ del grup de components, Ψ_p, de la fibra en p del model de Néron sobre $\mathbb{Z}_p$ de la jacobiana de la corba de Shimura

$$X(\mathcal{O}_0(M)^*, pq).$$

Aquesta corba es defineix a partir del grup de les unitats d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}_0(M)$, de nivell M, contingut a l'àlgebra de quaternions sobre $\mathbb{Q}$ de discriminant pq. La demostració de [**Ri 90**] es completa quan s'hi afegeixen els resultats de [**Ri 89**], que comporten veure que determinats isomorfismes són compatibles amb l'acció dels operadors de Hecke. Aquests isomorfismes provenen de l'estudi de la fibra en q del model de Néron sobre $\mathbb{Z}_q$ de les jacobianes $J_0(qM)$, $J_0(pqM)$ de les corbes modulars.

iv) Carayol, a [**Ca 89**], enuncia una conjectura (conjectura B) per rebaixar primers del nivell quan la forma modular porta caràcter. Mòdul aquesta conjectura, Carayol porta a terme una reducció del nivell, tot arribant al que prediu la conjectura de Serre.

v) Una demostració detallada de la conjectura B de Carayol, en el cas de pes 2, comporta l'estudi previ del grup de components de la reducció en q del model de Néron sobre $\mathbb{Z}_q$ de la jacobiana d'una certa corba de Shimura (quocient de)

$$X(\mathcal{O}_1(M)^*, pq).$$

Aquesta corba es defineix a partir del grup de les unitats d'un ordre $\mathcal{O}_1(M)$, de nivell M, d'una àlgebra de quaternions de discriminant pq. Notem que aquest ordre ara ja no és d'Eichler.

vi) El grup de components esmentat a v), a la vegada, s'ha de comparar amb grups escaients que provenen de la fibra en q del model de Néron sobre $\mathbb{Z}_q$ de les jacobianes $J(\Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(q))$, $J(\Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(pq))$ de les corbes modulars corresponents. Cal veure que els isomorfismes són compatibles amb l'acció dels operadors de Hecke. Indicacions sobre aquests fets es troben a [**Di 95**].

vii) Afirmacions de descens de nivell per a formes modulars de pes 2

amb caràcter, més concretament, per a formes modulars respecte del grup

$$\Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(pq)$$

es troben a **[Di 95]**. Les indicacions sobre les demostracions corresponents són breus.

Els resultats esmentats, quan $k = 2$, intervenen en la demostració de Wiles del teorema de Fermat.

1.3. Observacions. El teorema 1.1 es demostra per inducció sobre el nombre de primers que divideixen r. El resultat no és immediat, ja que la introducció d'un primer nou en el nivell pot ocasionar una davallada dels altres. L'èmfasi de l'enunciat s'ha de posar en el fet que la forma que prediu el teorema, de nivell divisible per r, és nova.

El pas inductiu en la prova del teorema s'aconsegueix en provar el resultat corresponent per a formes automorfes associades a una àlgebra de quaternions sobre $\mathbb{Q}$, de discriminant r/q. En aquest joc, les representacions especials són les que permeten l'elevació del nivell en el cas quaterniònic. La correspondència de Jacquet-Langlands permet després traslladar el resultat del cas quaterniònic al cas modular.

Un cop llegit el resum que presentem en aquesta exposició, el/la lector/lectora caldrà que estudiï l'article original **[Di-Ta 94-I]** ben a fons, a fi de fer-se càrrec de les dificultats reals de les proves dels teoremes.

Si es vol comprendre millor la demostració de Wiles del teorema de Fermat, cal estudiar **[Di-Ta 94-II]** i **[Di 95]**.

§2. Consideracions preliminars

Optem per les notacions següents: p designa un primer arbitrari; q, un primer candidat a ser afegit al nivell; ℓ, la característica del cos residual sobre el qual valorem les representacions.

Fixem un primer racional ℓ i un homomorfisme de reducció

$$\beta : \overline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell,$$

on $\overline{\mathbb{Z}}$ designa la clausura entera de $\mathbb{Z}$ continguda a $\mathbb{C}$.

Donat un enter positiu N, $\mathbb{T}^{(N)}$ denota l'anell de polinomis sobre $\mathbb{Z}$ generat per les variables T_p, S_p, per a tots els primers p que no divideixen N.

Recordem algunes propietats i definicions, ben conegudes, relatives als espais de formes modulars parabòliques, que necessitarem al llarg del capítol.

2.1. Proposició.

i) Es tenen les descomposicions de $\mathbb{T}^{(N)}$-mòduls

$$S_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{dM|N} \iota_d S_k(\Gamma_1(M))^{\text{nou}},$$

$$S_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi} S_k(\Gamma_0(N), \chi),$$

on $\iota_d(f)(z) := f(dz)$, i χ descriu el conjunt de tots els caràcters de Dirichlet mod N.

ii) A l'espai $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, es té la igualtat $S_p = p^{k-2}\chi(p)$.

iii) L'espai $S_k(\Gamma_1(M))^{\text{nou}}$ és isomorf, com a $\mathbb{T}^{(M)}$-mòdul, a l'espai

$$S_k(\Gamma_1(M)) / \sum_{p|M} (S_k(\Gamma_1(M/p)) + \iota_p S_k(\Gamma_1(M/p))).$$

2.2. Definició. Una representació

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}(2, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

direm que és modular de nivell M i pes k si prové d'una forma modular de $S_k(M)^{\text{nou}}$ que sigui vector propi de tots els operadors de Hecke.

Aquesta definició és una mica diferent de l'habitual, atès que, per parlar de pes i nivell de la representació modular, li exigim que la forma de la qual prové sigui nova.

2.3. Definició. Sigui A un $(\mathbb{T} \otimes R)$-mòdul finitament generat. Per a un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{T}$ se satisfà que

$$A_{\mathfrak{m}} \neq 0 \Leftrightarrow \mathfrak{m} \supseteq \mathrm{An}_{\mathbb{T}}(A).$$

En aquest cas, es diu que $\mathfrak{m}$ és del suport de A.

2.4. Proposició. *Sigui $V \subseteq S_k(\Gamma_1(N))$ un submòdul per a l'acció de $\mathbb{T}^{(N)}$. Sigui*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}(2, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

una representació contínua i semisimple. Aleshores, les afirmacions que segueixen són equivalents:

i) La representació conjugada ρ^τ, per a un cert automorfisme τ de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, prové d'una forma pròpia de V.

ii) $\rho \simeq \rho_{\mathfrak{m}}^\sigma$, per a un cert ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{T}^{(N)}$, en el suport de V, i per a un cert isomorfisme $\sigma : \overline{\mathbb{T}/\mathfrak{m}} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell$.

2.5. Proposició. *Sigui $\rho = \rho_{\mathfrak{m}}$ la representació de l'enunciat del teorema de Diamond-Taylor. Sigui $q \nmid M\ell$ un primer. La condició*

$$q(\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_q))^2 = (1+q)^2 \det \rho(\mathrm{Frob}_q)$$

és equivalent a la condició

$$T_q^2 - (q+1)^2 S_q \in \mathfrak{m}.$$

2.6. Definició. Un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{T}^{(N)}$ s'anomena d'Eisenstein si existeix un enter positiu d tal que

$$T_q - 2 \in \mathfrak{m}, \quad S_q - 1 \in \mathfrak{m},$$

per a quasi tots els primers q que satisfan $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ d)$.

2.7. Proposició. *Sigui $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $\mathbb{T}^{(N)}$ i suposem que és del suport de $S_k(\Gamma_1(N))$. Sigui ℓ la seva característica residual. Aleshores, $\mathfrak{m}$ és d'Eisenstein si, i només si, la representació que defineix, $\rho_{\mathfrak{m}}$, és reductible.*

En la demostració del teorema de Ribet d'ascens del nivell [**Ri 90**] hi juga un paper destacat el resultat $i)$ del lema següent.

2.8. Lema. (Ihara)

i) El morfisme natural

$$J_0(M)^2 \to J_0(Mq),$$

on $q \nmid M$ és un primer, té nucli finit.

ii) El morfisme natural

$$J_1(M)^2 \to J(\Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(q)),$$

on $q \nmid M$ és un primer, té nucli finit.

Anomenarem lema "d'Ihara" els resultats que, en el nostre cas, substitueixen l'anterior. Aquests lemes són difícils, ja que cal formular-los en el context de les formes automorfes associades a àlgebres de quaternions. Especialment en el cas indefinit, obtenir el lema d'Ihara pressuposa conèixer bé les fibres de mala reducció de les corbes de Shimura implicades. En el cas definit, el lema d'Ihara s'obté a partir d'un teorema d'aproximació forta per a les àlgebres de quaternions, mitjançant un argument combinatori.

§3. El cas GL(2)

Denotem per $\mathbb{A}$ l'anell de les adeles de $\mathbb{Q}$ i per $\mathbb{A}_f$ el subanell format per les adeles a distància finita. Donat un enter $k \geq 2$, volem considerar en aquesta secció uns mòduls admissibles per a l'acció del grup adèlic $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_f)$. Més concretament, volem precisar el subespai de formes automorfes cuspidals respecte de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ que provenen de l'espai de formes parabòliques $S_k(\Gamma_1(N))$ per la correspondència $f \mapsto \phi_f$ (cf. el capítol 17).

Recordem que les representacions de la sèrie discreta, π_∞, del grup reductiu $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ estan en correspondència bijectiva amb certes representacions de dimensió 2, complexes, del grup de Weil

$$W_{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{C}^*, j \mid j^2 = -1; jzj^{-1} = \overline{z}, \text{ per a } z \in \mathbb{C}^* \rangle.$$

Donat $k \geq 2$, denotem per σ_k la representació de $W_{\mathbb{R}}$ definida per

$$\sigma_k : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$$

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z^{1-k} & 0 \\ 0 & \overline{z}^{1-k} \end{pmatrix} |z|, \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{1-k} & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1. Definició. Donat $k \geq 2$, definim

$$\mathcal{S}_k = \bigoplus_{\pi} \pi^{\infty}$$

com la suma de totes les representacions cuspidals $\pi = \otimes_v \pi_v$ de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ per a les quals el component π_∞ és la representació de la sèrie discreta de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ que es correspon a σ_k. Ens mirarem $\mathcal{S}_k$ com un mòdul admissible per a l'acció de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ quan aquest grup hi opera per la dreta. Anomenem $\mathcal{S}_k$ el mòdul de les formes automorfes cuspidals de pes k.

Precisem tot seguit el concepte de nivell en aquest context.

3.2. Notacions. Donat un obert compacte U de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_f)$, escrivim

$$\mathcal{S}_k(U) := \mathcal{S}_k^U.$$

Per N_U denotem l'enter positiu més petit tal que U conté tots els elements de $\prod_p \mathbf{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$ que són congrus amb $1 (\bmod N_U)$.

Donat un primer p, considerem la matriu de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_f)$

$$\eta_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\omega}_p \end{pmatrix},$$

on $\overline{\omega}_p$ és l'adele que té el primer p en el component p-èsim, i el valor 1 en la resta de components. Els operadors

$$T_p := [U \eta_p U], \quad S_p := [U \overline{\omega}_p U]$$

operen de la manera habitual a $\mathcal{S}_k(U)$.

3.3. Proposició.

i) Els operadors T_p, S_p commuten entre si. La seva acció dota l'espai $\mathcal{S}_k(U)$ d'una estructura de $\mathbb{T}^{(N_U)}$-mòdul.

ii) Sigui

$$V_1(N) := \{u \in \prod_p \mathbf{GL}(2, \mathbb{Z}_p) \mid u \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\bmod N)\}.$$

Existeix un isomorfisme $\mathcal{S}_k(V_1(N)) \simeq S_k(\Gamma_1(N))$ *donat per* $\varphi \mapsto f$, *on*

$$f(hi) := \varphi(h)j(h,i)^k(\det h)^{-1},$$

per a $h \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$, $\det h > 0$. *L'isomorfisme anterior és un isomorfisme de* $\mathbb{T}^{(N_U)}$*-mòduls.*

§4. El cas quaterniònic definit

Sigui H una àlgebra de quaternions sobre $\mathbb{Q}$, definida. És a dir, H_∞ és isomorfa a l'àlgebra dels quaternions de Hamilton. En aquest cas, no disposem de cap corba de Shimura associada directament a H. D'entrada, definirem uns mòduls $\mathcal{S}_k^H$, respecte de l'àlgebra de Hecke, que es correspondran amb els de la secció anterior per la correspondència de Jacquet-Langlands (JL) (cf. el capítol 22).

Comencem per fixar el comportament a l'infinit. Sigui σ'_k la representació

$$\sigma'_k : H_\infty^* \hookrightarrow \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Sim}^{k-2}(\mathbb{C}^2) \otimes \det{}^{2-k}),$$

que s'obté en torçar la potència simètrica $k-2$ de la representació estàndard per la potència $2-k$ del determinant.

Donat $k \geq 2$, definim

$$\mathcal{S}_k^H = \bigoplus_\pi \pi^\infty$$

com la suma de totes les representacions automorfes $\pi = \otimes_v \pi_v$ de $H^*(\mathbb{A})$ tals que $\dim \pi > 1$ i el component π_∞ és la representació σ'_k. Ens mirem $\mathcal{S}_k^H$ com un mòdul admissible per a l'acció del grup adèlic $H^*(\mathbb{A}_f)$, que hi opera per la dreta. L'anomenem el mòdul de les formes automorfes de pes k associat a H^*.

Sigui $D = D(H)$ el discriminant de H. És a dir, el producte de tots els primers de $\mathbb{Q}$ on H ramifica (és un cos de quaternions). Com que H és definida, l'enter D és producte d'un nombre *senar* de primers.

4.1. Proposició. *Fixem un subgrup compacte i obert $U \subseteq H^*(\mathbb{A}_f)$.*

i) Les formes automorfes de $\mathcal{S}_k^H(U) := (\mathcal{S}_k^H)^U$ s'identifiquen amb funcions definides sobre

$$H^* \backslash H^*(\mathbb{A})/U$$

que prenen els seus valors en espais vectorials (sobre $\mathbb{C}$, o sobre $\mathbb{Q}_\ell$, segons ens convingui).

ii) Per a tot primer $p \nmid D$, fixem un isomorfisme $H_p \simeq M(2, \mathbb{Q}_p)$ i definim T_p, S_p com en la secció precedent. Sigui N_U l'enter positiu més petit tal que U conté tots els elements de $\prod_p \mathcal{O}_{H,p}^*$ que són congrus amb $1 (\bmod N_U)$. Aleshores, $\mathcal{S}_k^H(U)$ és un $\mathbb{T}^{(N_U D)}$-mòdul.

4.2. Observació. Us heu adonat del molt que s'assemblen el grup

$$H^* \backslash H^*(\mathbb{A})$$

i el grup que governa la teoria de cossos de classes sobre $\mathbb{Q}$?

Volem ara definir un mòdul admissible que jugarà un paper destacat en la prova del teorema de Diamond-Taylor.

4.3. Definició. Sigui t un enter lliure de quadrats i primer amb $D(H)$. Definim

$$\mathcal{S}_k^{H,t-\mathrm{esp}} = \bigoplus_\pi \pi^{t\infty},$$

on la suma s'estén a totes les representacions automorfes tals que $\pi_\infty = \sigma_k'$, i π_q és la representació especial $\mathbf{esp}(2)$ que correspon a un caràcter no ramificat quan $q \mid t$ és un primer. L'espai $\mathcal{S}_k^H(U)^{t-\mathrm{esp}}$ és un $\mathbb{T}^{(N_U Dt)}$-mòdul per l'acció dels operadors de Hecke.

Donat un enter t lliure de quadrats, primer amb $N_U D$, es defineix

$$U_0(t) = \{u \in U \mid u_q \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{q}, \quad \text{per a tot primer } q|t\}.$$

4.4. Lema. *Existeix un isomorfisme de $\mathbb{T}^{(N_U Dt)}$-mòduls entre els espais $\mathcal{S}_k^H(U)^{t-\mathrm{esp}}$ i*

$$\mathcal{S}_k^H(U_0(t)) / \sum_{q|t} \alpha_q \mathcal{S}_k^H(U_0(t/q))^2,$$

on $\alpha_q(x,y) := 1_* x + \eta_{q*} y$.

DEMOSTRACIÓ. Només cal repassar la definició de les representacions especials per veure que les coses són així. □

També ens cal el

4.5. Lema. ("d'Ihara") *Sigui U un subgrup obert i compacte de $H^*(\mathbb{A}_f)$ tal que $U_\ell \subset \mathcal{O}^*_{H,\ell}$. Suposem que $(N_U, D) = 1$. Sigui $q \nmid N_U D\ell$ un nombre primer. Considerem l'homomorfisme*

$$\alpha_q : \mathcal{S}_k^H(U; \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^2 \to \mathcal{S}_k^H(U_0(q); \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

definit per $\alpha_q(f_1, f_2) = 1_* f_1 + \eta_{q*} f_2$. Sigui $A = \ker \alpha_q$. Aleshores, existeix un enter positiu d tal que, per a gairebé tot primer p que satisfaci $p \equiv 1 (\bmod d)$, es té que els operadors $T_p - 2, S_p - 1$ anul·len $A[\ell]$.

El lema ens diu que, en aquest cas, "tots els errors són Eisenstein".

El teorema següent és un teorema d'elevació del nivell (que passa de ser $N_U D$ a ser $N_U Dq$, per a un primer q convenientment escollit), en el cas quaterniònic. Les formes automorfes involucrades provenen d'una àlgebra de quaternions definida. La seva demostració és un càlcul llarg que es basa en el "lema d'Ihara".

4.6. Teorema. (Elevació del nivell) *Suposem que $U \subset V_1(N)$, per a un cert $N \geq 4$. Suposem que $(N_U, s) = 1$. Suposem que ℓ, q són primers diferents que no divideixen $N_U s$. Sigui $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $\mathbb{T}^{(N_U s)}$ en el suport de $\mathcal{S}_k^H(U)$. Suposem que $\ell \in \mathfrak{m}$, i que $\mathfrak{m}$ no és Eisenstein. Si*

$$T_q^2 - (q+1) S_q \in \mathfrak{m},$$

aleshores $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cap \mathbb{T}^{(N_U sq)}$ és un ideal en el suport de $\mathcal{S}_k^H(U)^{q-\mathrm{esp}}$.

§5. El cas quaterniònic indefinit

Suposem ara que H és una àlgebra de quaternions sobre $\mathbb{Q}$ indefinida; és a dir $H_\infty \simeq M(2, \mathbb{R})$. Considerem fixat un d'aquests isomorfismes. Denotem per $D > 1$ el seu discriminant, que és producte d'un nombre parell

de primers. Fixem un ordre maximal $\mathcal{O}_H \subset H$, uniformitzants $\omega_{H,p}$ en els primers p que divideixen D, així com també isomorfismes $\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p \simeq M(2,\mathbb{Z}_p)$ en els primers $p \nmid D$.

Donat $k \geq 2$, denotem per

$$\mathcal{S}_k^H = \bigoplus_\pi \pi^\infty,$$

on la suma s'estén a totes les representacions automorfes de $H^*(\mathbb{A})$ tals que el component π_∞ és la representació de la sèrie discreta σ_k, que hem definit a la secció tercera. Donat un subgrup obert i compacte U de $H^*(\mathbb{A}_f)$, podem, com abans, considerar el $\mathbb{T}^{(N_U D)}$-mòdul $\mathcal{S}_k^H(U)$. Sigui t un enter lliure de quadrats i primer amb D. Com en la secció anterior, considerem els $\mathbb{T}^{(N_U Dt)}$-mòduls

$$\mathcal{S}_k^H(U)^{t-\mathrm{esp}}, \quad \mathcal{S}_k^H(U)^{t-\mathrm{nou}}.$$

En el teorema següent, no pretenem ser gaire precisos.

5.1. Teorema. (Shimura) *Sigui*

$$X_U(\mathbb{C}) := H^*\backslash(H^*(\mathbb{A}))/UU_\infty,$$

on U_∞ és l'estabilitzador de $i \in \mathbb{C}$ per a l'acció de $H^*(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$ a $\mathcal{Z}^\pm = \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Aquest conjunt s'identifica amb el conjunt de punts complexos d'una corba, projectiva i llisa, definida sobre $\mathbb{Q}$.

i) L'espai $\mathcal{S}_k^H(U)$ admet una descripció canònica en funció de grups de cohomologia ℓ-àdica associada als models canònics sobre $\mathbb{Q}$, X_U, construïts per Shimura per a les corbes anteriors.

ii) Sigui M un $\mathbb{Z}_\ell$-mòdul lliure. Suposem ℓ primer amb $N_U D$. Si U és suficientment petit, l'àlgebra de Hecke $\mathbb{T}^{(N_U D)}$ opera en el $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-mòdul $\mathcal{S}_k^H(U;M)$. Per a tot primer $p \nmid N_U D\ell$, se satisfan les relacions d'Eichler-Shimura

$$\mathrm{Frob}_p^2 - T_p \mathrm{Frob}_p + pS_p = 0.$$

Podríem escriure $X(\mathcal{O}_0(N)^*, D) = X_U$ quan U fos, exactament, l'obert compacte definit per $N = N_U$. Aleshores, $X(\mathcal{O}_0(N)^*, D)$ seria la

corba de Shimura associada al grup de les unitats d'un ordre d'Eichler de nivell N, contingut a H.

5.2. Lema. ("d'Ihara") *Sigui U un subgrup obert i compacte de $H^*(\mathbb{A}_f)$ tal que $\det U = \widehat{\mathbb{Z}}^*$. Suposem que $(N_U, D) = 1$. Sigui $q \nmid N_U D\ell$ un nombre primer. Suposem, a més, que $2 \leq k \leq \ell - 2$. Considerem l'homomorfisme*

$$\alpha_q : \mathcal{S}_k^H(U; \mathbb{F}_\ell)^2 \to \mathcal{S}_k^H(U_0(q); \mathbb{F}_\ell),$$

definit per $\alpha_q(f_1, f_2) = 1_* f_1 + \eta_{q*} f_2$. Sigui $A' = \ker \alpha_q$. Aleshores, l'acció de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre cada constituent de $A' \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ factoritza a través del grup abelià $\mathrm{Gal}^{\mathrm{ab}}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Demostració. La demostració d'aquest resultat és, potser, la part més dura de tot l'article. Implica treballar amb les fibres de reducció dolenta dels models canònics. Per caracteritzar-ne les singularitats, els autors recorren a la interpretació modular de certes corbes de Shimura. Aquests models estan lligats a problemes de classificació de superfícies abelianes amb estructures de nivell. Els resultats clau acaben convertint-se en un comptatge, en aquest context, de superfícies abelianes ordinàries i de superfícies abelianes supersingulars. Es fa servir la teoria d'Honda-Tate, etc. Un cop feta aquesta anàlisi, els resultats es tradueixen en termes de la cohomologia cristal·lina (i tots contents!). La correspondència de Jacquet-Langlands permet reconvertir el problema en un problema de mòduls per a la cohomologia cristal·lina, però associats ara a formes modulars ordinàries de nivell M. Aquest nivell resulta ser divisible, únicament, pels primers que divideixen $N_U D$. Però, com sabem, aquí tenim els resultats de Faltings sobre estructures de Hodge-Tate (refets en un treball de Faltings-Jordan, i explicats en el seminari l'any 89/90). Tot acaba quadrant, car les filtracions en les estructures de Hodge-Tate posen en evidència accions galoisianes de dimensió 1. □

El teorema següent és un teorema d'elevació del nivell (que passa de ser $N_U D$ a ser $N_U Dq$). Les formes automorfes involucrades provenen d'una àlgebra de quaternions indefinida. La demostració utilitza àmpliament el "lema d'Ihara" anterior.

5.3. Teorema. *Suposem que $U \subseteq V_1(N)$, per a un cert $N \geq 4$. Suposem que $(N_U, s) = 1$. Suposem que ℓ, q són primers diferents que no divideixen*

$N_U s$. Sigui $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $\mathbb{T}^{(N_U s)}$ en el suport de $\mathcal{S}_k^H(U)$. Suposem que $\ell \in \mathfrak{m}$, i que $\mathfrak{m}$ no és Eisenstein. Suposem, a més, que $\det U = \widehat{\mathbb{Z}}^*$ i que $2 \leq k \leq \ell - 2$. Si

$$T_q^2 - (q+1)S_q \in \mathfrak{m},$$

aleshores $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cap \mathbb{T}^{(N_U sq)}$ és un ideal en el suport de $\mathcal{S}_k^H(U)^{q-\mathrm{esp}}$.

§6. La prova del teorema 1.1

Consisteix a aplicar, a una forma modular cuspidal nova de les de tota la vida, successivament: la inversa de la correspondència de JL, pujar-li el nivell (en la part quaterniònica), la correspondència de JL. D'aquesta manera, la forma cuspidal torna a ser una forma cuspidal de les de sempre. En tot això, no hem de perdre cap primer dels ja pujats i hem de guanyar tots els necessaris. (Recordem que aquestes filigranes són prèvies als teoremes de descens del nivell, que són els veritablement difícils.)

Abans d'explicar la demostració del teorema de Diamond-Taylor, cal fer certes precisions a la correspondència de JL.

6.1. Teorema. (Jacquet-Langlands) *Sigui H una àlgebra de quaternions definida sobre $\mathbb{Q}$, de discriminant D. Notem que $H^*(\mathbb{A}^{D\infty}) \simeq \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}^{D\infty})$.*

i) Es té un monomorfisme de $H^*(\mathbb{A}^{D\infty})$-mòduls

$$\bigoplus_{\pi;\pi^\infty \in \mathcal{S}_k^H} \pi^{(D\infty)} \longrightarrow \bigoplus_{\pi;\pi^\infty \in \mathcal{S}_k} \pi^{(D\infty)}.$$

La primera suma s'estén a totes les representacions automomorfes tals que $\dim \pi > 1$ i $\pi_\infty \simeq \sigma_k'$, o bé σ_k, segons que H sigui definida o bé indefinida. La segona suma ho fa a totes les representacions automorfes tals que $\pi_\infty \simeq \sigma_k$.

ii) Si t és un enter lliure de quadrats primer amb D, el monomorfisme anterior indueix un isomorfisme

$$\mathcal{S}_k^{H,t-\mathrm{esp}}(\prod_{p|D}(\mathcal{O}_{H,p})^*) \simeq \mathcal{S}_k^{Dt-\mathrm{esp}}.$$

El teorema següent ja és molt proper a l'enunciat a l'inici de l'article. És un teorema d'ascens del nivell realitzat a la part de $\mathbf{GL}(2)$.

6.2. Teorema. *Suposem que $N \geq 4$, que $k \geq 2$, i que $\mathfrak{m}$ és un ideal maximal de $\mathbb{T}^{(N)}$, que no és d'Eisenstein, i que és del suport de $\mathcal{S}_k(V_1(N))$. Suposem que la característica residual ℓ de $\mathfrak{m}$ no divideix N i que $\ell > k+1$. Sigui r un enter lliure de quadrats, primer amb $N\ell$. Si*

$$T_q^2 - (q+1)^2 S_q \in \mathfrak{m},$$

per a tot primer q que divideix r, aleshores l'ideal maximal $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cap \mathbb{T}^{(Nr)}$ es troba en el suport de $\mathcal{S}_k(V_1(N))^{r-\mathrm{esp}}$.

Demostració. La demostració funciona per inducció sobre el nombre de primers que divideixen r.

Cas 1. Quan r és primer i $k = 2$, ens diuen els autors que el teorema és de Ribet. Quan $k > 2$, ens diuen que és de Diamond. De totes maneres, ja hem dit que cal revisar fins a quin punt les demostracions inclouen tots els detalls quan les formes modulars tenen caràcter.

Cas 2. Suposem que r no és primer, i sigui q un primer que divideixi r. Sigui H l'àlgebra de quaternions sobre $\mathbb{Q}$ de discriminant r/q. Aleshores, fent servir la hipòtesi d'inducció i la correspondència de JL per a $t = 1$, obtenim que l'ideal $\mathfrak{m} \cap \mathbb{T}^{(Mr/q)}$ és del suport de

$$\mathcal{S}_k(V_1(M))^{(r/q)-\mathrm{esp}} \simeq \mathcal{S}_k^H(V_1(M)).$$

Ara podem pujar el nivell, aplicant els teoremes corresponents en el cas quaterniònic definit, o bé indefinit, segons convingui. Si ho fem i tot seguit apliquem JL per a $t = q$, obtenim que l'ideal $\mathfrak{m}'$ es troba en el suport de

$$\mathcal{S}_k^H(V_1(M))^{q-\mathrm{esp}} \simeq \mathcal{S}_k(V_1(M))^{r-\mathrm{esp}}.$$

Finalment, basta fer servir la injecció

$$\mathcal{S}_k(V_1(M))^{r-\mathrm{esp}} \to \mathcal{S}_k(\Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(r)),$$

vàlida per a tot enter lliure de quadrats, i recordar que les formes pròpies de la imatge d'aquesta aplicació són tals que la forma nova associada té nivell divisible per r. $\square$

Queda així provat el teorema **1.1** quan $N \geq 4$. Els casos $N < 4$ s'analitzen un per un. Finalment, el teorema queda provat en tots els casos.

Bibliografia

[Di 91] Diamond, F.: Congruence primes for cusp forms of weight $k \geq 2$, *Astérisque* **196-197** (1991), 205–213.

[Di 95] Diamond, F.: The refined conjecture of Serre, en el llibre *Proc. 1993 Conference on Modular Elliptic Curves and Modular Forms*, International Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 22–37.

[Di 96] Diamond, F.: On deformation rings and Hecke rings, *Annals of Mathematics* **144** (1996), 137–166.

[Di-Ta, I 94] Diamond, F.; Taylor, R.: Non-optimal levels of mod ℓ modular representations, *Invent. math.* **115** (1994), 435–462.

[Di-Ta, II 94] Diamond, F.; Taylor, R.: Lifting Modular Mod ℓ Representations, *Invent. math.* **115** (1994), 435–462.

[Ge 75] Gelbart, S.S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1975.

[Ja-La 70] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic forms on* $\mathbf{GL}_2$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

[Ri 89] Ribet, K.: Bimodules and Abelian Surfaces, en el llibre *Algebraic Number Theory: In honor of K. Iwasawa*, Advanced Studies in Pure Mathematics, 1989, pp. 359–407.

[Ri 90] Ribet, K.: On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms, *Invent. math.* **100** (1990), 431–476.

[Ri 91] Ribet, K.: Report on mod ℓ representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, en el llibre *Proc. of the Motives Conference. Seattle*, 1991.

[Ta-Wi 95] Taylor, R.; Wiles, A.: Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *Annals of Mathematics* **141** (1995), 553–572.

[Wi95] Wiles, A.: Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Annals of Mathematics* **141** (1995), 443–551.

Capítol 31

El teorema de Langlands

Pilar Bayer Sessió 1a. del dia 30 d'abril de 1997

En aquest capítol, fem un esbós de la prova de la conjectura d'Artin per a les representacions de Galois de tipus tetraèdric. La prova és deguda a Langlands. El fet que el grup alternat sobre quatre elements, A_4, posseeixi una representació de dimensió tres, irreductible i induïda per una representació de dimensió 1 del seu subgrup de Klein, $D_{2.2}$, és un punt clau en la demostració. La representació en qüestió s'obté en fer actuar A_4 com a grup de permutacions de les rectes que uneixen els punts intermedis de les arestes oposades d'un tetràedre regular. La representació en qüestió és induïda per una qualsevol de les representacions de dimensió 1 no trivials del subgrup $D_{2.2}$. Aquest subgrup estabilitza les rectes esmentades.

§1. Representacions de Galois de tipus tetraèdric

Abans de començar, convé que recordem que el mateix Artin va demostrar que la seva conjectura és certa per a totes les representacions de Galois de tipus monomial (és a dir, induïda per una representació de dimensió 1 d'un dels seus subgrups). El resultat es demostra conjuntament amb els teoremes propis de la teoria de cossos de classes.

El grup alternat A_4 és un grup resoluble. S'inclou en una successió exacta

$$1 \to D_{2.2} \to A_4 \to C_3 \to 1,$$

on C_3 és el grup cíclic d'ordre 3, i $D_{2.2}$, el grup de Klein. El grup C_3 opera en $D_{2.2}$ per permutació cíclica dels seus elements no trivials. L'acció té lloc

per mitjà d'automorfismes interns, que provenen dels elements de A_4.

Siguin F un cos de nombres i W_F el seu grup de Weil. Considerem una representació

$$\rho_F : W_F \to \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbf{PGL}(2,\mathbb{C})$$

d'imatge A_4. Siguin $F \subset E \subset L$ les extensions de F determinades per ρ_F, de manera que

$$\mathrm{Gal}(E/F) = C_3, \quad \mathrm{Gal}(L/F) = A_4.$$

Denotem per ρ_E la restricció de ρ_F al grup de Weil W_E. Disposem d'un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & W_E & \longrightarrow & W_F & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(E/F) & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle \rho_E}\downarrow & & {\scriptstyle \rho_F}\downarrow & & {\scriptstyle \simeq}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & D_{2.2} & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Com que la representació ρ_E té per imatge el grup diedral, és monomial; per tant, és induïda per una representació d'un subgrup d'índex 2 de W_E. Atès que, en aquest cas, sabem que les conjectures de Langlands se satisfan, la representació ρ_E es correspon amb una representació automorfa cuspidal $\pi(\rho_E)$ de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_E)$.

Com que l'acció de C_3 en $D_{2.2}$ és per automorfismes interns, tenim, per a tot automorfisme $\sigma \in C_3$,

$$\pi_E = \pi_E^\sigma.$$

Atesos els resultats del capítol 25 sobre canvis de base, existeix una representació cuspidal π_F de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{A}_F)$ tal que π_E prové de π_F per canvi de base. De fet, trobem tres representacions cuspidals amb aquesta propietat, però, si imposem que el caràcter central de π_F sigui $\det \rho_F$, aleshores, només n'hi ha una. Sigui, doncs, π_F la representació cuspidal que restringeix a π_E, de caràcter $\det \rho_F$, obtinguda per mitjà del canvi de base.

En el que segueix, ens caldrà relacionar la representació galoisiana ρ_F amb la representació automorfa π_F. El resultat més important d'aquesta exposició el proporciona el teorema següent.

1.1. Teorema. (Langlands) *La representació del grup de Weil ρ_F, de tipus A_4, satisfà la conjectura d'Artin. És a dir, la seva funció $L(s, \rho_F)$ és entera.*

DEMOSTRACIÓ. Sabem que la funció $L(s, \pi_F)$ associada a la representació automorfa cuspidal π_F és entera. Per tant, per provar el teorema és suficient provar la igualtat:

($\mathbf{c}_1$) $L(s, \rho_F) = L(s, \pi_F)$, *per a* $\mathrm{Re}(s)$ *prou gran.*

Donada una plaça v de F, denotem per ρ_{F_v} la restricció de ρ_F al grup de Weil local W_{F_v}. Si introduïm els components locals de π_F, podem escriure $\pi_F = \otimes \pi_{F_v}$. Per tant,

$$L(s, \pi_F) = \prod L(s, \pi_{F_v}), \quad L(s, \rho_F) = \prod L(s, \rho_{F_v}).$$

Podem obtenir la condició ($\mathbf{c}_1$) com a conseqüència de la condició:

($\mathbf{c}_2$) *En tota plaça arquimediana $v = v_\infty$ i en quasi tota plaça ultramètrica v del cos F, se satisfan les igualtats*

$$\pi(\rho_{F_v}) = \pi_{F_v}.$$

En la igualtat anterior, $\pi((-)_v)$ denota la correspondència de Langlands local. Cal entendre que $\pi(\rho_{F_v})$ existeix i és igual a la representació automorfa local que s'obté per canvi de base.

Com que $[E : F] = 3$, tota plaça arquimediana de F descompon completament a E. En general, si w és una plaça qualsevol de E tal que $w|v$ i v descompon completament, tenim que

$$E_w = F_v, \quad \rho_{E_w} = \rho_{F_v}, \quad \pi(\rho_{F_v}) = \pi(\rho_{E_w}) = \pi_{E_w} = \pi_{F_v},$$

amb la qual cosa, la igualtat ($\mathbf{c}_2$) és evident per a aquestes places.

Així, podem restringir-nos a les places v de F que són ultramètriques, no ramificades a E, i que tampoc no descomponen completament en aquest cos. Suposem, a més, que ρ_{F_v} és no ramificada. Sigui ρ_{E_v} la restricció de ρ_{F_v} al grup de Weil local W_{E_v}. És clar que ρ_{E_v} és no ramificada. Al mateix temps, la representació $\pi(\rho_{E_v}) = \pi_{E_v}$ és no ramificada. Atès que l'extensió

E_w/F_v és no ramificada, tenim que la representació π_{F_v} és no ramificada (recordem que aquesta representació s'obté per canvi de base).

Sigui ρ_{π_v} una representació de dimensió 2 de W_{F_v} tal que

$$\pi(\rho_{\pi_v}) = \pi_{F_v}.$$

La seva existència resulta de la correspondència local de Langlands.

Veiem que basta provar l'afirmació següent:

(c$_3$) *Si v és una plaça de F que no descompon i és no ramificada per a ρ_F i E, aleshores les representacions del grup de Weil local W_{F_v},*

$$\rho_{F_v}, \quad \rho_{\pi_v},$$

són equivalents.

Notem que la primera d'aquestes representacions prové per restricció de la representació galoisiana de sortida; en la construcció de la segona, hi ha intervingut el canvi de base i la correspondència local de Langlands.

Sigui

$$\mathrm{Ad} : \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbf{PGL}(2,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbf{GL}(3,\mathbb{C})$$

l'homomorfisme definit per projecció i pas a la matriu adjunta, respectivament. Un càlcul senzill posa de manifest que, per provar **(c$_3$)**, n'hi ha prou de provar la condició, en aparença més dèbil:

(c$_4$) *Si v és una plaça de F que és no ramificada per a ρ_F i per a E, aleshores, les representacions de dimensió 3,*

$$\mathrm{Ad}(\rho_{F_v}), \quad \mathrm{Ad}(\rho_{\pi_v}),$$

són equivalents.

Ara cal que passem a situacions conegudes de la filosofia de Langlands global per a $\mathbf{GL}(3,\mathbb{C})$. La representació $\mathrm{Ad}(\rho_F)$ és una representació de dimensió 3, irreductible i monomial, del grup de Weil global W_F. La raó d'aquest fet és l'esmentada a la introducció: les tres rectes que tenim en l'interior del tetràedre regular són permutades per l'acció de A_4. Per tant, existeix una representació θ de $D_{2.2}$, de dimensió 1, tal que

$$\mathrm{Ad}(\rho_F) = \mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\theta).$$

Per casos provats, per Jacquet i Piatetski-Shapiro, de la correspondència de Langlands global, a la representació galoisiana $\mathrm{Ad}(\rho_F)$ li podem associar una representació automorfa cuspidal $\pi(\mathrm{Ad}(\rho_F))$ del grup adèlic $\mathbf{GL}(3, \mathbb{A}_F)$. Ens caldrà identificar aquesta representació automorfa.

Hem reduït el teorema a la demostració de l'afirmació següent:

(c$_5$) *Les representacions*

$$\pi(\mathrm{Ad}(\rho_F)), \quad \mathrm{Ad}(\pi_F)$$

són equivalents.

Per provar aquest fet, aplicarem el criteri numèric de Jacquet-Shalika.

1.2. Lema. (Jacquet-Shalika) *Siguin π_1, π_2 dues representacions automorfes de $\mathbf{GL}(3, \mathbb{A}_F)$. Aleshores, $\pi_1 \simeq \pi_2$ si, i només si, la funció $L(s, \pi_1 \times \widehat{\pi}_2)$ té un pol en el punt $s = 1$. Aquí, $\pi_1 \times \widehat{\pi}_2$ és la representació de $\mathbf{GL}(3, \mathbb{A}_F) \times \mathbf{GL}(3, \mathbb{A}_F)$ associada al producte tensorial.*

En el nostre cas, ens cal veure que la funció $L(s, \mathrm{Ad}(\pi_F) \times \widehat{\pi}(\mathrm{Ad}(\rho_F)))$ té un pol a $s = 1$. De fet, n'hi ha prou de provar:

(c$_6$) *Gairebé tots els factors locals de les funcions*

$$L(s, \mathrm{Ad}(\pi_F) \times \widehat{\pi}(\mathrm{Ad}(\rho_F))), \quad L(s, \pi(\mathrm{Ad}(\rho_F)) \times \widehat{\pi}(\mathrm{Ad}(\rho_F)))$$

són iguals.

Demostració. Si v no descompon a E i és no ramificada per a E i per a ρ_F, els factors locals de les dues funcions L són els associats a les representacions complexes de dimensió 9 de W_F donades per

$$\mathrm{Ad}(\rho_{\pi_v}) \otimes (\mathrm{Ad}(\rho_{F_v}))\widehat{\ }, \quad \mathrm{Ad}(\rho_{F_v}) \otimes (\mathrm{Ad}(\rho_{F_v}))\widehat{\ }.$$

Recordem que si U, respectivament V, són representacions d'un grup G, respectivament d'un subgrup H, la fórmula de reciprocitat de Frobenius ens diu que

$$U \otimes \mathrm{Ind}_H^G(V) \simeq \mathrm{Ind}_H^G(V \otimes \mathrm{Res}_H^G(U)).$$

Sabem que $\mathrm{Ad}(\rho_{F_v}) = \mathrm{Ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}}(\theta)$. Recordem, tanmateix, que les dues representacions que volem comparar, $\rho_{\pi_{F_v}}$, ρ_v, tenen restriccions equivalents

a W_{E_v}. Per tant, en aplicar la fórmula de Frobenius, obtenim que

$$\mathrm{Ad}(\rho_{\pi_v}) \otimes (\mathrm{Ad}\,\rho_{F_v})\widehat{\ } \simeq \mathrm{Ad}(\rho_{F_v}) \otimes \mathrm{Ad}(\rho_{F_v})\widehat{\ }.$$

Veiem, doncs, que les dues representacions tenen els mateixos factors L. $\square$

1.3. Qüestió. Per què les tres rectes de l'interior del tetràedre són suficients per provar la conjectura d'Artin en els casos de les representacions de tipus A_4, i els cinc cubs que trobem a l'interior del dodecàedre no ho són per provar la conjectura d'Artin en els casos de les representacions de tipus A_5? L'última fila de la taula de caràcters del grup A_5 correspon, també, a una representació de dimensió 5, induïda per una representació no trivial de dimensió 1 de A_4.

Bibliografia

[**Ge 75**] Gelbart, S.S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1975.

[**Ge 76**] Gelbart, S.S.: Automorphic Forms and Artin's Conjecture, en el llibre *Modular Functions of One Variable VI*, Serre, J.P.; Zagier, D.B., ed., LNM, Springer, 1977.

[**Gé-Lab 79**] Gérardin, P.; Labesse, J.P.: The solution of a base change problem for $\mathbf{GL}(2)$, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-functions*, A.Borel; W.Casselman, ed., Proc.Symposia Pure Math., n. 33, part 2, AMS, pp. 115–133.

[**Ja-La 70**] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic forms on* $\mathbf{GL}_2$, LNM, n. 114, Springer, 1970.

[**Ja-Sha 77**] Jacquet, H.; Shalika, J.: Comparaison des formes automorphes du groupe linéaire, *C.R. Acad. Sci. Paris* **284** (1977), 741–744.

[**La 68**] Langlands, R.P.: Problems in the theory of automorphic forms, en el llibre *Lectures in Modern Analysis and Applications III*, LNM, Springer, 1968, pp. 18–86.

Capítol 32

El teorema de Tunnell

Teresa Crespo Sessió 2a. del dia 30 d'abril de 1997

Aquest capítol no ha estat redactat. El programa i la bibliografia recomanada són els següents:

El teorema de Tunnell

Prova de la conjectura d'Artin per a les representacions de dimensió 2 del grup de Weil de $\mathbb{Q}$, de tipus octaèdric.

Referències:

[**La 80**] Langlands, R. P.: *Base change for* $\mathbf{GL}(2)$, Annals of Math. Studies, n. 96, Princeton University Press, 1980.

[**Tu 81**] Tunnell, J.: Artin's conjecture for representations of octahedral type, *Bull. Amer. Math. Soc.* **5**, n. 2 (1981), 173–175.