Grups fuchsians

Joan Nualart Riera
Dirigit per: Artur Travesa Grau

Juliol 2005

1 Conceptes generals

1.1 Transformacions homogràfiques

Una transformació homogràfica (o transformació lineal fraccionària) es defineix com una aplicació

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

amb $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$ (sinó T seria constant) i sense restricció podem suposar que $ad - bc = 1$.

Les tranformacions homogràfiques són transformacions conformes, que converteixen circumferències i rectes en circumferències i rectes, que sempre tenen punts fixos (si no és la identitat, té dos punts fixos diferents, si $(a+d)^2 \neq 4$, o un punt fix doble, si $a + d = \pm 2$) i que també conserven raons dobles (de fet són projectivitats de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$). Aquestes transformacions formen el grup d'automorfismes conformes de l'esfera de Riemann, $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty$.

A partir d'ara, ens restringirem a transformacions homogràfiques amb coeficients reals a, b, c, d i $ad - bc = 1$ (al qual ens podem reduir sempre que $ad - bc > 0$). En conseqüència, tenim que $\operatorname{Im} T(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$ i, per tant, T conserva el semiplà superior, l'inferior i l'eix real. De fet, aquestes són exactament les transformacions homogràfiques amb aquesta propietat, i en conseqüència, formen un grup. Per tant, si notem $\mathcal{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ el semiplà superior (o semiplà de Poincaré), tenim que $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ és un automorfisme conforme de $\mathcal{H}$. A la pràctica, segons convingui, pensarem en la transformació homogràfica com una automorfisme del semiplà de Poincaré o de l'esfera de Riemann.

En un llenguatge més algebraic, és immediat veure que tenim una acció de $SL(2,\mathbb{R})$ en el semiplà de Poincaré donada per

$$\begin{array}{rcl} SL(2,\mathbb{R})\times\mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}, z\right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d}. \end{array}$$

El conjunt d'elements de $SL(2,\mathbb{R})$ que actuen trivialment són $\{\pm Id\}$ i per tant aquesta acció, que no és fidel, indueix una acció fidel de $PSL(2,\mathbb{R})$ en $\mathcal{H}$ que ens dóna un isomorfisme de grups entre $PSL(2,\mathbb{R})$ i els automorfismes conformes de $\mathcal{H}$. Aquest és el punt clau que ens mostra la forta relació que hi ha entre les tranformacions homogràfiques i el grup $SL(2,\mathbb{R})$.

Diem que una transformació homogràfica diferent de la identitat és: el·líptica, si té dos punts fixos complexos conjugats diferents en l'esfera de Riemann (equivalentment si $(a+d)^2>4$); hiperbòlica, si té dos punts fixos diferents en $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (equivalentment si $(a+d)^2<4$); parabòlica, si té un únic punt fix doble, i per tant, en $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (equivalentment si $(a+d)^2=4$).

Un concepte important a l'hora d'entendre les transformacions homogràfiques és la noció d'inversió.

Definició.

- Siguin $o\in\mathbb{C}$ i $r\in\mathbb{R}_{>0}$, notem $C=C(o,r)$ la circumferència de centre o i radi r. La inversió respecte la circumferència C és la transformació $f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ que intercanvia o, ∞ i que per a qualsevol $z\in\mathbb{C}-\{o\}$, $f(z)=w$ de manera que w està en la recta definida per o,z i $d(o,z)d(o,w)=r^2$. Aleshores, C és el conjunt de punts fixos de f. L'expressió analítica per a f és $f(z)=o+r^2/(\overline{z}-\overline{o})$.
- Sigui $a\in\mathbb{R}$, notem r_a la recta vertical definida per $r_a=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z=a\}\cup\{\infty\}$. La inversió respecte la recta r_a és la transformació $f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ que fixa ∞ i que en $\mathbb{C}$ és la simetria respecte r_a. Aleshores, r_a és el conjunt de punts fixos de f. L'expressió analítica per a f és $f(z)=-\overline{z}+2a$.

Una inversió no és una transformació conforme, sinó que és la composició de la conjugació i una aplicació conforme; de fet és una aplicació anticonforme: conserva la magnitud dels angles però en canvia l'orientació. La importància de les inversions resta en el resultat següent.

Proposició 1. *Tota tranformació homogràfica és la composició de dues inversions respecte circumferències adequades. Més precisament, si* $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ *no és una traslació horitzontal,* $c\neq 0$, *aleshores* T *es pot escriure com la inversió respecte la circumferència isomètrica, que té l'expressió* $C_T=\{z:|cz+d|=1\}=C(-d/c,1/|c|)$, *seguida per una simetria respecte una recta vertical. En el cas en què* T *és una traslació horitzontal,* $c=0$, T *es pot escriure com la composició de dues simetries respectes rectes verticals.* $\square$

A continuació resumim algunes relacions entre les circumferències isomètriques i els punts fixos dels diferents tipus de transformacions.

Proposició 2.

- *Sigui T una transformació parabòlica. Totes les circumferències isomètriques de T^n per a $n \in \mathbb{Z}$ són tangents en el punt fix de T.*
- *Sigui T una transformació el·líptica. Totes les circumferències isomètriques de T^n per a $n \in \mathbb{Z}$ passen pels punts fixos.*
- *Sigui T una transformació hiperbòlica. Els cercles isomètrics de T^n per a $n \in \mathbb{N}$ formen una família decreixent de tancats, i tots ells contenen un dels punts fixos. De la mateixa manera, els cercles isomètrics de T^{-n} per $n \in \mathbb{N}$ també formen una família decreixent de tancats que contenen l'altre punt fix.* $\square$

Tots aquests resultats s'entenen millor si ens situem en l'ambient de la geometria hiperbòlica. Hi ha diversos models possibles però el que més ens convé és el del semiplà de Poincaré. Situem-nos en $\mathcal{H}$ amb la mètrica hiperbòlica, en la qual la distància entre $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ ve donada per

$$d(z_1, z_2) = \left| \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}\right) \right|.$$

Aleshores, les rectes hiperbòliques (les geodèsiques d'aquesta estructura) són les rectes verticals i les circumferències ortogonals a l'eix real (és a dir, amb centre en l'eix real) en el sentit euclidià. La mesura dels angles és la mateixa que en el model euclidià i les circumferències en sentit hiperbòlic també són circumferències en el sentit euclidià (tot i que els centres i els radis d'aquestes circumferències no siguin els mateixos en els dos models).

Les inversions respecte rectes hiperbòliques són transformacions de $\mathcal{H}$ que envien rectes (hiperbòliques) a rectes (hiperbòliques) i són d'ordre 2; per tant, juguen el mateix paper que les simetries en la geometria euclidiana; les anomenarem simetries hiperbòliques. Així, la proposició 1 ens diu que tota transformació homogràfica és la composició de dues simetries hiperbòliques.

Definició. Anomenem polígon hiperbòlic de $\mathcal{H}$ tot subconjunt de $\mathcal{H}$ limitat per una corba simple i orientada formada per un nombre no necessàriament finit de rectes hiperbòliques.

Per a calcular l'àrea d'un polígon hiperbòlic convé tenir present la forma d'àrea en $\mathcal{H}$ associada a la mètrica hiperbòlica,

$$dw = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}$$

i també el resultat següent, que pot facilitar els càlculs en algunes circumstàncies.

Proposició 3. *Si P és un polígon hiperbòlic que té un nombre finit de vèrtexs, n, i θ_i és l'angle interior en el vèrtex i-èsim, resulta que el volum hiperbòlic de P és*

$$(n-2)\pi - (\theta_1 + \cdots + \theta_n).$$

□

Exemple. Més endavant apareixeran els polígons hiperbòlics següents:

- El triangle hiperbòlic (figura 1, pàgina 15) de vèrtexs v_1, v_2, v_3, on

$$v_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \quad v_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \quad v_3 = \infty.$$

  Els angles en aquests vèrtexs són $\pi/3, \pi/3, 0$, respectivament. Per tant, el seu volum és $\pi/3$.

- El polígon hiperbòlic (figura 5, pàgina 27) de vèrtexs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, on

$$\begin{array}{lll} v_1 = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}, & v_2 = \dfrac{-1+i}{1+\sqrt{3}}, & v_3 = (2-\sqrt{3})i, \\ v_4 = \dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}}, & v_5 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}, & v_6 = i. \end{array}$$

  Els angles en aquests vèrtexs són $\pi/4, 2\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi/4, \pi$, respectivament. Per tant, el seu volum és $2\pi/3$.

1.2 Grups fuchsians i dominis fonamentals

Ja hem vist que tenim un isomorfisme entre el grup de transformacions homogràfiques del semiplà de Poincaré i $PSL(2,\mathbb{R})$; per tant, identificarem qualsevol subgrup Γ de transformacions homogràfiques amb el corresponent subgrup de $PSL(2,\mathbb{R})$. Per altra banda, notarem $\tilde{\Gamma}$ el grup de $SL(2,\mathbb{R})$ que és antiimatge de Γ per la projecció $SL(2,\mathbb{R}) \to PSL(2,\mathbb{R})$.

Sigui Γ un grup de transformacions homogràfiques. Si existeix $z_0 \in \mathcal{H}$ i transformacions de Γ de manera que la distància de z_0 a la seva imatge per aquestes tranformacions sigui arbitràriament petita i no nul·la, direm que Γ és continu; en l'altre cas direm que és discontinu[1]. També direm que l'acció de $\tilde{\Gamma} \subset SL(2,\mathbb{R})$ és pròpia i discontínua (de fet, aquesta condició és equivalent a demanar que $\tilde{\Gamma} \subset SL(2,\mathbb{R})$ sigui discret). A aquest tipus de subgrups de transformacions homogràfiques (o equivalentment, subgrups de

[1] Aquests conceptes són totalment paral·lels en el cas de transformacions homogràfiques complexes.

$PSL(2,\mathbb{R})$) els anomenarem grups fuchsians, com també als subgrups de $SL(2,\mathbb{R})$ corresponents.

Els grups fuchsians, centrant-nos en alguns exemples concrets, seran el nostre objectiu d'estudi. Alguns grups fuchsians que veurem més endavant seran $PSL(2,\mathbb{Z})$ (secció 1.6, pàgina 15), $\Gamma_0(p) \subset PSL(2,\mathbb{Z})$ (secció 1.6.1, pàgina 16) i especialment els grups associats a ordres d'àlgebres de quaternions (secció 2.2, pàgina 22).

El primer pas serà veure com mitjançant un procés 'geomètric' podem determinar una presentació del grup fuchsià per generadors i relacions; per això introduirem el concepte de domini fonamental.

Definició. Direm que dos conjunts de $\mathcal{H}$ són congruents per un grup de transformacions Γ si existeix una tranformació del grup que transforma un conjunt en l'altre. Un polígon hiperbòlic (tancat) $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ és un domini fonamental per a Γ, o equivalentment per l'acció de $\tilde{\Gamma} \subset SL(2,\mathbb{R})$ en $\mathcal{H}$, si dos punts interiors qualssevol de $\mathcal{D}$ no són congruents per Γ i si tot punt de $\mathcal{H}$ és congruent a un punt de $\mathcal{D}$.

Observem que la relació 'ser congruent' és d'equivalència i per tant és natural estudiar el conjunt quocient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$; per fer això ens bastarà estudiar detalladament el seu domini fonamental $\mathcal{D}$. Així, l'objectiu més immediat serà veure l'existència de dominis fonamentals per a qualsevol grup fuchsià.

Per facilitar la demostració ens situarem en un context una mica més general: el dels grups discontinus de transformacions homogràfiques complexes.[2]

Definició. Com en el cas real, la circumferència isomètrica associada a una transformació homogràfica complexa que no fixa ∞, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, és $C_T = \{|cz+d| = 1\}$, i.e. la circumferència de radi $r_T = 1/|c|$ i centre $o_T = -d/c$. Anomenarem també cercle isomètric a $D_T = \{|cz+d| < 1\}$

Sigui Γ un grup discontinu de transformacions homogràfiques complexes i considerem un punt z_0 de manera que no té punts congruents a ell mateix en un entorn seu. Aleshores, si fixem una transformació que enviï z_0 a ∞ i conjuguem Γ per aquesta transformació, obtenim un nou grup en el qual ∞ té un entorn sense punts congruents a ell. Per tant, suposem sense restricció, que Γ ja té aquesta propietat. En particular, obtenim que no hi ha cap element del grup, diferent de la identitat, que fixi ∞. Per tant, està definida la circumferència isomètrica per a qualsevol transformació de Γ.

Observem que el centre de la circumferència isomètrica de T és precisament el punt que T envia a ∞. Per tant, els centres de les circumferències

[2] Una discussió més completa i detallada del cas general apareix a [2].

isomètriques són els punts congruents a ∞ per Γ. En particular, després de fixar ∞ adequadament, tots els centres de les circumferències isomètriques estan en una regió acotada del pla complex.

Anunciem a continuació algunes propietats de demostració senzilla.

Lema 1 (Circumferències isomètriques). • *Siguin S, T dues transformacions homogràfiques complexes de manera que $S \neq T^{-1}$. Aleshores, tenim que:*

$$\begin{aligned} r_T^2 &= |o_{ST} - o_T||o_{T^{-1}} - o_S| \\ r_{ST} &= \frac{r_S r_T}{|o_{T^{-1}} - o_S|} \end{aligned}$$

- $C(o_{S^{-1}}, r_{S^{-1}}) = S(C(o_S, r_S))$.
- *Els radis de les circumferències isomètriques associades a elements de Γ estan acotats.*
- *El nombre de circumferències isomètriques d'elements de Γ de radi superior a un de fixat és finit.* □

Un altre concepte interessant que tindrà la seva importància geomètrica més endavant és el de punt límit de Γ.

Definició. S'anomena punt límit de Γ tot punt d'acumulació de centres de circumferències isomètriques d'elements de Γ. Per altra banda, s'anomena punt ordinari tot punt que no és punt límit.

Presentem a continuació algunes propietats dels punts límit de Γ, que s'obtenen sense gaire dificultat a partir de les de circumferències isomètriques.

Proposició 4 (Punts límit). • *Donat un punt límit P i un entorn arbitrari de P, Ω, existeix un punt Q' tal que $\forall Q \neq P, Q'$ existeixen infinits punts en Ω congruents amb Q.*

- *El conjunt de punts límits es transforma en ell mateix per qualsevol transformació del grup.*
- *Si el conjunt de punts límit conté més de 2 elements aleshores és un conjunt perfecte, i.e. és un conjunt tancat i sense punts aïllats. En particular, si el conjunt de punts límit té cardinal superior a 2 és un conjunt no numerable.*
- *Si un conjunt tancat Σ conté més de dos punts i totes les transformacions del grup el deixen invariant resulta que Σ conté tots els punts límit. En conseqüència, tots els punts límit d'un grup de transformacions homogràfiques reals estan continguts en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.* □

Algunes propietats més que també ens seran útils són les que relacionen els punts límit amb els diferents tipus de transformacions. Això ens ho dóna el resultat següent, de forma immediata a partir les relacions que ja hem donat.

Proposició 5.

- *El punt fix d'una transformació parabòlica T és un punt límit, més precisament és el punt d'acumulació dels centres dels cercles isomètrics de $\{T^n\}$.*
- *Els punts fixos d'una transformació hiperbòlica T són els dos punts d'acumulació de centres isomètrics de la família $\{T^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.* □

Com una conseqüència immediata del resultat anterior, obtenim que en un entorn qualsevol d'un punt parabòlic o hiperbòlic hi ha punts congruents en l'interior, diferents del punt fix.

Ara ja tenim totes les eines que necessitem per a provar el resultat que buscàvem.

Teorema 1. *Tot grup fuchsià Γ té un domini fonamental en $\mathcal{H}$.*

Demostració. Fixem $z_0 \in \mathcal{H}$ que tingui un entorn que no contingui cap transformat de z_0 pel grup. Per un moment ens convé oblidar que les transformacions són reals i conjugant el grup per una tranformació homogràfica complexa, $g\Gamma g^{-1}$, podem suposar que $z_0 = \infty$. Així, si sabem trobar un domini fonamental per a aquest grup, $\mathcal{D}$, desfent el canvi de variable, $g^{-1}\mathcal{D}$, obtindrem un domini fonamental en $\mathbb{C}_\infty$ pel grup original, que com que és real serà simètric respecte l'eix real i quedant-nos amb la part en $\mathcal{H}\cup\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ obtindrem el domini que volíem. Per tant, basta trobar un domini fonamental per a un grup homogràfic complex pel qual un entorn de ∞ no contingui cap transformat seu.

La demostració es basa principalment en les propietats de les circumferències isomètriques i dels punts límit. Definim

$$\mathcal{D}' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \left(\mathbb{C}_\infty - \overline{D(o_\gamma, r_\gamma)}\right).$$

Comencem observant que no és buit ja que conté un entorn de ∞ (ja sabem que els radis de les circumferències isomètriques estan acotats) i que és obert ja que el nombre de circumferències isomètriques de radi superior a un donat és finit. Per altra banda, $\mathcal{D}'$ no conté punts equivalents, ja que qualsevol transformació $T \in \Gamma$ converteix l'exterior de $\overline{D(o_T, r_T)}$ en l'interior de $D(o_{T^{-1}}, r_{T^{-1}})$.

El punt clau es resumeix en el resultat següent.

Afirmació. *$\mathcal{D}'$ i les regions congruents a ell omplen densament el pla.*

Farem la prova d'aquest fet per reducció a l'absurd. Suposem que tenim un disc $D(z_0, r)$ que no conté punts de $\mathcal{D}'$ ni punts congruents a punts de $\mathcal{D}'$. En particular, resulta que $z_0 \in \overline{D_S}$, cercle isomètric d'una transformació del grup, S, i que $D(z_0, r)$ no conté el centre de C_S. Aleshores, el disc transformat per S és també un disc que no conté cap centre de cercle isomètric i que té radi $r_1 \geq \frac{r}{1-r^2/r_S^2} > kr$ amb $k > 1$ independent de S, ja que els radis de les circumferències isomètriques estan acotats. Per tant, iterant el procés trobem un disc arbitràriament gran i arribem a contradicció.

En particular tenim que en qualsevol obert del pla hi ha punts congruents a $\mathcal{D}'$.

Afirmació. *Qualsevol regió tancada de $\mathbb{C}_\infty$ que no contingui punts límit queda recoberta, densament, per un nombre finit de conjunts transformats de $\mathcal{D}'$.*

Si A és una regió tancada de $\mathcal{C}_\infty$, el nombre de cercles isomètrics que tallen A és finit, ja que, sinó, n'hi hauria de radi arbitràriament petit i aquests tindrien un punt d'acumulació en A. Per altra banda, com que la transformació S^{-1} transforma $\mathcal{D}'$ en una regió del cercle isomètric de S, cal que A estigui recoberta per les transformades inverses associades als cercles isomètrics que tallen A.

Prenem com a domini fonamental $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}'}$, que té les propietats que volíem. Observem que està limitat per vores de circumferència i, per tant, el transformat que volem serà, essencialment, un polígon hiperbòlic, ja que els centres de totes les circumferències isomètriques estaran en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Per ser coherents amb la definició que hem donat, ens falta veure que la frontera d'aquest domini és una corba simple; això no és cert per grups complexos arbitraris però sí que ho és per als grups fuchsians. De fet, en el nostre cas això és conseqüència immediata de la construcció, ja que tots els centres de cercles isomètrics estan situats sobre una circumferència, més precisament sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i per tant, en l'esfera de Riemann això pot tenir com a molt dues components connexes que en quedar-nos amb la regió continguda en el semiplà de Poincaré convertim en una de sola. Ara bé, el domini no és només connex sinó que és simplement connex, és més, de fet és convex per mitjà de les rectes hiperbòliques. $\square$

Observació. Fent servir un raonament similar al que hem utilitzat en el teorema no és difícil veure que si prenem una regió que conté en el seu interior un punt límit, aquest entorn conté una infinitat de regions congruents a $\mathcal{D}$.

Situem-nos novament en el cas real i estudiem-lo amb una mica més de detall. Ens centrarem bàsicament en l'estudi de la frontera del domini fonamental.

1.3 La frontera del domini

La frontera estarà formada per dos tipus diferents de costats: de primer tipus, costats que són simultàniament de $\mathcal{D}$ i d'un transformat de $\mathcal{D}$; de segon tipus, costats que estan sobre l'eix real. Observem que, en particular, com que els transformats de $\mathcal{D}$ són tots diferents, resulta que per cada costat de primer tipus hi ha exactament un costat de $\mathcal{D}$, també de primer tipus, congruent a ell. Ara bé, hi ha la possiblitat que un costat s'identifiqui amb ell mateix i, aleshores, aquesta transformació ha de tenir un punt fix en el costat (ha de ser el punt fix per una transformació el·líptica d'ordre dos). En aquest cas, afegirem un vèrtex en aquest punt i així aconseguim que cada costat de primer tipus es correspongui amb un altre costat de primer tipus del domini.

Per altra banda, està clar que cada punt de la frontera de $\mathcal{D}$ es pot classificar de la següent manera:

1. és un punt ordinari, i en aquest cas està situat
   (a) sobre una sola circumferència isomètrica (punt d'un costat o vèrtex en el cas que hem distingit abans, vèrtex ordinari), o bé,
   (b) sobre més d'una circumferència isomètrica (vèrtex ordinari).
2. és un punt límit, i en aquest cas està situat
   (a) sobre una sola circumferència isomètrica, o bé
   (b) sobre més d'una circumferència isomètrica, o bé
   (c) no està en cap circumferència isomètrica, però tot entorn del punt talla circumferències isomètriques.

L'estudi dels vèrtexs, els costats i les seves identificacions dóna molta informació del grup, a això ens dedicarem a continuació.

Sigui $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un domini fonamental per Γ i anomenem $a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2}, \ldots$ les parelles d'arestes de primer tipus identificades per Γ. Considerem $T_i \in \Gamma$ tal que $T_i a_i = a_{-i}$ i volem veure que $\{T_i\}_i$ formen un sistema de generadors de Γ[3]. Temporalment notem $\Gamma_T \subset \Gamma$ el subgrup generat per aquestes transformacions. Volem veure que $\Gamma_T = \Gamma$ i per això només cal veure que les tranformades per Γ_T de $\mathcal{D}$ omplen $\mathcal{H}$.

Comencem observant que les tranformades per Γ_T de $\mathcal{D}$ envolten completament $\mathcal{D}$ i per tant qualsevol transformat de $\mathcal{D}$ per Γ_T. Per altra banda, sabem que si $A \subset \mathcal{H}$ és un compacte connex, com que no conté punts límit,

[3]Aquest fet, que en principi pot semblar molt clar, no és cert, en general, per a grups de transformacions complexes arbitraris.

queda recobert per un nombre finit de transformades de $\mathcal{D}$ per Γ. Per tant, si A conté punts equivalents a $\mathcal{D}$ per Γ_T, A queda recobert per un nombre finit de transformades de $\mathcal{D}$ per Γ_T. Doncs això és tot el que necessitem. Si $A \subset \mathcal{H}$ és un compacte connex qualsevol, aleshores podem trobar un compacte connex més gran que contingui punts de A i de $\mathcal{D}$ i per tant, aquest s'ha de poder recobrir per un nombre finit de transformades de $\mathcal{D}$ per Γ_T. Amb això, hem provat que $\Gamma_T = \Gamma$.

Un cop vist això, i abans d'estudiar les relacions entre els generadors anteriors, estudiem les congruències entre els vèrtexs.

Definició. Anomenem cicle ordinari de $\mathcal{D}$ a un conjunt de vèrtexs ordinaris de $\mathcal{D}$ de manera que qualssevol dos elements del conjunt són congruents i que qualsevol vèrtex de $\mathcal{D}$ congruent a ells està en el conjunt.

- **Cicles ordinaris.** Fixem v_1 un vèrtex de $\mathcal{D}$ que no és punt límit. Aleshores, si a_1 és un costat de primer tipus adjacent a v_1, podem prendre una transformació T_1 que enviï el costat a_1 al costat adjacent corresponent a_{-1}. Per aquesta transformació a_1 anirà a parar a un vèrtex v_2 sobre a_{-1} i repetint el procés per a_2 trobarem transformacions $T_2, \ldots, T_n$ de manera que acabarem retornant al vèrtex v_1 i al costat a_1[4]. La tranformació obtinguda $T_n \ldots T_1$ fixa v_1 i en conseqüència, si no és la identitat, ha de ser una transformació el·líptica d'ordre k, ja que el vèrtex és ordinari.

  A més, així obtenim tots els vèrtex congruents a v_1, ja que geomètricament estem estudiant el recobriment per transformades de $\mathcal{D}$ d'un entorn de v_1 (que sabem que és finit per ser v_1 ordinari). Així hem obtingut un cicle ordinari. Si $T_n \ldots T_1$ és el·líptica d'ordre $k > 1$ diem que el cicle és el·líptic d'ordre k, sinó diem que és accidental. En particular, tenint en compte que les transformacions homogràfiques són conformes, obtenim el resultat següent.

  Proposició 6. – *La suma dels angles interiors en els vèrtexs d'un cicle ordinari que no està sobre l'eix real val $2\pi/k$ on $k > 1$ és l'ordre de la transformació el·líptica $T_n \ldots T_1$.*

  – *Tot cicle ordinari ens dóna una relació de la forma $(T_n \ldots T_1)^k = 1$.*

  – *Si un cicle ordinari està sobre l'eix real, aleshores la suma dels angles interiors ha de ser π.* □

- **Cicles parabòlics.** Si v_1 és un punt límit on acaba un costat de $\mathcal{D}$, en particular està sobre l'eix real, la situació no és tan clara com

[4]El procés ha d'acabar ja que les transformacions que porten a_1 a a_n tenen circumferència isomètrica per a_1 i d'aquestes només n'hi ha un nombre finit ja que el vèrtex no és punt límit; de fet, a continuació veurem un argument alternatiu.

abans. De fet el procés que hem descrit pel cas anterior es pot donar de forma completament anàloga per a aquest, però poden donar-se diverses circumstàncies: pot no acabar mai; pot donar, al cap d'uns quants passos, un punt que no sigui cap vèrtex del domini; després d'un nombre finit de passos, o sigui de passar per un nombre finit de punts $v_2, \dots, v_n$ podem retornar a v_1. En el darrer cas es diu que $v_1, \dots, v_n$ formen un cicle parabòlic. De fet, en els casos que estudiarem hi haurà com a molt un nombre finit de punts sobre l'eix real i, per tant, el cas que es donarà serà aquest últim. Geomètricament, està clar que la composició de transformacions que fixa v_1, S, serà parabòlica i enviarà a_1 a una circumferència tangent a a_1 per v_1; així resulta que els angles formats en v_1 són tots 0. En particular resulta que el procés es pot repetir indefinidament sense donar mai la identitat.

De fet, quan els dos únics tipus de punts que apareixen en el domini són parabòlics i el·líptics, com és habitual a la pràctica, el grup té una descripció especialment senzilla ja que no és difícil veure que aleshores $\mathcal{D}$ té un nombre finit de costats (utilitzant la compacitat de la vora en l'esfera de Riemann i que en qualsevol punt de la frontera del domini hi ha un entorn que només talla un nombre finit de costats d'aquest).

1.4 Presentació del grup

Hem vist que cada cicle ordinari ens dóna una relació entre els diferents generadors del grup (obtinguts per les identificacions dels costats del domini). El nostre objectiu és veure que de fet aquests generadors amb aquestes relacions ens donen una presentació del grup. Fixem com sempre un grup fuchsià Γ i un domini fonamental de Γ en $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$.

Notem $\{S_i\}$ el conjunt de transformacions que identifiquen costats del domini fonamental, i.e., en la notació que utilitzàvem abans $\{T_i\}$ i les seves inverses. Ja hem vist que aquest conjunt de transformacions formen un sistema de generadors de Γ.

El primer pas serà veure com podem interpretar geomètricament les relacions entre els generadors. Per això, notem $\mathcal{D}_\gamma$ el transportat del domini fonamental per $\gamma \in \Gamma$ i diem que $\mathcal{D}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{D}_{\gamma_n}$ formen una cadena si $\mathcal{D}_{\gamma_i}, \mathcal{D}_{\gamma_{i+1}}$ són veïns $\forall i = 1, \dots, n-1$, això és, si tenen algun costat en comú. Per abreviar, notarem aquesta cadena per $[\gamma_1, \dots, \gamma_n]$. A més, si $K = [\gamma_1, \dots, \gamma_n]$, $K' = [\eta_1, \dots, \eta_m]$ són cadenes de manera que $\gamma_n = \eta_1$ podem definir el seu producte com la cadena $KK' = [\gamma_1, \dots, \gamma_n = \eta_1, \dots, \eta_m]$. També definim la cadena inversa de K com $K^{-1} = [\gamma_n, \dots, \gamma_1]$. Per altra banda, diem que dues cadenes K, K' són equivalents, i ho notem $K \sim K'$, si existeix una altra cadena V de manera que $K = VK'V^{-1}$.

Un cop introduït tot aquest llenguatge és convenient centrar-se en un tipus molt concret de cadenes: les cadenes tancades, és a dir, les cadenes $[\gamma_1, \ldots, \gamma_k]$ de manera que $\gamma_1 = \gamma_k$. Més precisament, convé centrar-se en una família concreta de cadenes tancades, aquelles en què qualssevol dos termes llevat de primer i darrer són diferents; a aquestes cadenes tancades les anomenarem cicles. Observem que qualsevol cadena tancada és equivalent a una de la forma $[Id, \ldots, Id]$.

Lema 2. *Tota cadena K es pot escriure*

$$K = \tilde{K_1} \ldots \tilde{K_s}$$

on K_i són els cicles continguts en K i $K_i \sim \tilde{K_i}$. □

Un cop dit tot això, l'interpretació geomètrica de les relacions es resumeix en el resultat següent.

Lema 3. *Hi ha una correspondència entre cadenes tancades i relacions entre els generadors del grup, que ens dóna una aplicació injectiva del conjunt de relacions en el de cadenes tancades.*

Demostració. Sigui $S_1 \ldots S_n = Id$ una relació. Fixem $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$ i definim $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{S_1}$ que és clar que és veí de $\mathcal{D}_1$. A continuació, definim $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_{S_1 S_2}$ que és veí de $\mathcal{D}_2$ ja que $\mathcal{D}_3 = S_1 S_2 S_1^{-1} \mathcal{D}_2$. Així, iterant el procés veiem que $[Id, S_1, S_1 S_2, \ldots, S_1 S_2 \ldots S_n = Id]$ forma una cadena tancada. La injectivitat és clara.

Recíprocament, però, podem 'assignar' a cada cadena tancada, $K = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$, una relació $R(K) = 1$. Per fer-ho només cal adonar-se que per ser tancada $\gamma_1 = \gamma_n$ i que la transformació que porta $\mathcal{D}_k$ a $\mathcal{D}_{k+1}$ és $\alpha_k = \gamma_{k+1} \gamma_k^{-1}$, $\forall k = 1, \ldots, n-1$. Aleshores, $\alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 = 1$ i escrivint cadascun d'aquests elements en funció dels S_i obtenim una relació $R(K)$. Observem però que en aquest pas hi ha una certa llibertat d'elecció a l'hora d'escriure els α_k en funció dels generadors. □

Com a conseqüència de la demostració obtenim el següent corol·lari.

Corol·lari 1. *Si una cadena s'escriu $K = K_1 \ldots K_r$ aleshores $R(K) = R(K_r) \ldots R(K_1)$.* □

A partir de tots aquests resultats ens podem reduir a estudiar els cicles, en altres paraules, només cal estudiar les relacions $R(K)$ amb K cicle. Per això, fixem $K = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ un cicle.

Si $n > 3$ escollim uns quants punts ordenadament en cada $\mathcal{D}_{\gamma_i}$, de manera que al considerar-los tots el punt inicial i el final siguin el mateix i tals que poguem unir cada punt amb el següent per segments de rectes hiperbòliques que no es tallin entre elles, no passin per cap vèrtex del domini i que els segments estiguin continguts en les dues regions on pertanyen els extrems. Notem L aquest polígon hiperbòlic finit. Aleshores, quadriculem aquest polígon de manera que cap vèrtex estigui sobre la quadrícula i que no hi hagi dos vèrtexs en l'interior de cap quadrat. Òbviament el recobriment es pot prendre finit i podem suposar-lo orientat. Anomenem $L_1, \ldots, L_m$ cadascuna de les figures en què ha quedat dividit L i està clar que cadascun dels L_j determina un cicle.

Lema 4. *En aquesta situació, $R(K) = R(\tilde{L_n}) \ldots R(\tilde{L_1})$ on L_j és un cicle qualsevol al voltant de la j-èsima peça i $\tilde{L_j} \sim L_j$.*

Demostració. Si L_j no conté cap vèrtex, hi ha dues possibilitats: L_j està contingut íntegrament en un domini i aleshores $L_j = 1$; L_j talla dues regions diferents i aleshores $L_j = VV^{-1} = 1$ on V és la transformació que passa del domini on està l'inici del cicle a l'adjacent que talla L_j.

La resta de prova és per inducció i es redueix a treure la peça L_n de L. Per veure això, descomponguem $L_n = C'C$ on C és la part de cadena comuna a L_n i C' la resta. Així, podem escriure $L = L^*C$ i $L' = L^*C'^{-1}$. Es pot aplicar inducció sobre L' i es comprova immediatament que $R(K) = R(L'L_n)$. □

Ara bé, està clar que si α_{γ_i} és un vertèx de $\mathcal{D}_{\gamma_i}$ i $T_1 \ldots T_k = 1$ és la relació en el vèrtex $\gamma_i^{-1}\alpha_{\gamma_i} \in \mathcal{D}$ aleshores, $\gamma_i T_1 \gamma_i^{-1} \gamma_i T_2 \gamma_i^{-1} \ldots \gamma_i T_k \gamma_i^{-1} = \gamma_i T_1 \ldots T_k \gamma_i^{-1} = 1$ és la relació en el vèrtex α_{γ_i} i per tant s'obté a partir de la relació en un vèrtex del domini $\mathcal{D}$.

Per altra banda, vist tot això, en el cas $n = 3$, només hi ha dues possibilitats: si $\mathcal{D}_{\gamma_1}$ i $\mathcal{D}_{\gamma_2}$ només tenen un costat en comú, la relació que ens dóna la cadena és trivial; sinó, la transformació $\gamma_2\gamma_1^{-1}$ ha de ser el·líptica d'ordre 2 i ha de fixar $\gamma_1 v_i$, per un cert v_i vèrtex el·líptic del domini, així ha de ser $\gamma_1 T_i \gamma_1^{-1}$ i la relació donada és $\gamma_1 T_i^2 \gamma_1^{-1}$. Per tant, aquest cas es comporta de la mateixa manera que el cas general.

En definitiva, hem provat que tota relació s'obté a partir de les donades pels cicles ordinaris. Ara bé, també hem vist que qualsevol relació depèn dels vèrtexs continguts en la regió delimitada per la cadena provinent d'aquesta. Per tant, les relacions donades pels cicles ordinaris no poden ser depenents.

Teorema 2 (Presentació per generadors i relacions). *Si $\{T_i\}_i$ són les transformacions corresponents a cada parella de vèrtexs identificats en el domini fonamental i R_j són les relacions donades pels cicles ordinaris, això és, una relació per cada classe de vèrtex del domini, obtenim que aquests generadors i aquestes relacions donen una presentació de Γ.* □

1.5 Algunes millores per als càlculs efectius

Per a provar l'existència d'un domini per a un grup fuchsià, Γ, hem hagut de conjugar el grup donat per tenir un punt ordinari a l'infinit. En la majoria dels casos habituals, ∞ apareix com un punt fix per algunes transformacions del grup. Per evitar les complicacions en l'estructura del grup que poden aparèixer al conjugar-lo es pot donar una adaptació d'aquell resultat que redueix el grup que caldria conjugar. Això és el que estudiarem en aquest cas.

Considerem Γ_∞ el grup d'isotropia de ∞, és a dir, el subgrup de Γ que fixa ∞. Aleshores, considerem $\Delta = \Gamma - \Gamma_\infty$ que és el conjunt d'elements que tenen circumferències isomètriques. Aleshores, anomenem $\mathcal{D}_\Delta = \bigcup_{\gamma\in\Delta} \overline{D}_\gamma$ on $\overline{D}_\gamma$ denota el cercle d'isometria de l'element γ.

Lema 5. *Tota transformació de $T \in \Gamma_\infty$ transforma $\overline{D}_\gamma$ en $\overline{D}_{T\gamma T^{-1}}$. En particular, T deixa fix $\mathcal{D}_\Delta$.* □

Notem $\mathcal{D}_\infty$ un domini fonamental per a Γ_∞. Aleshores, una simple adaptació del teorema d'existència de dominis fonamentals ens dóna el resultat següent.

Teorema 3. *El conjunt*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_\infty \cap \left(\mathcal{H} - \bigcup_{\gamma\in\Delta} D_\gamma\right)$$

és un domini fonamental per a Γ, sempre que no sigui buit. □

Cal destacar que la condició que el conjunt no sigui buit no és supèrflua i apareixen casos en què $\mathcal{H} - \bigcup_{\gamma\in\Delta} D_\gamma = \emptyset$, per exemple, si intentéssim seguir aquest procediment per a calcular un domini fonamental del grup $\Gamma(6,1)$ (secció 2.2) ens trobaríem amb aquest problema.

Malgrat això, la importància del teorema és que, en general, ens permetrà calcular dominis fonamentals sense necessitat de conjugar el grup. Per aplicar el teorema només necessitem calcular un domini per a Γ_∞ que sol tenir una estructura molt més senzilla que la del grup original; en la majoria de casos és un grup cíclic. Pel que fa a la determinació de dominis fonamentals de grups cíclis, habitualment es pot fer a ull, però en qualsevol cas, podem donar una descripció molt fàcil d'un domini fonamental a partir de les propietats de les circumferències isomètriques.

Proposició 7. *Sigui Γ un grup cíclic generat per T que no fixa ∞, aleshores,*

$$\mathcal{D} = \mathcal{H} - (D_T \cup D_{T^{-1}})$$

és un domini fonamental per a Γ. □

1.6 Exemple: el cas modular

Començarem determinant un domini fonamental per al grup de transformacions $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$. Per fer-ho seguirem el procés descrit en la secció anterior.

Per facilitar els càlculs considerem $\tilde{\Gamma} = SL(2, \mathbb{Z})$ i aleshores, $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ correspon a un element que fixa infinit si i només si $c = 0$. Així, $ad - bc = 1$ ens dóna $ad = 1$ i per tant $a = d = \pm 1$, és a dir, la transformació ha de ser una translació. A més, és clar que $\Gamma_\infty = \{z \in \mathcal{H} : -1/2 \leq \operatorname{Re} z \leq 1/2\}$ és un domini fonamental per a Γ_∞.

Per altra banda, si $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ es correspon amb una transformació γ que no fixa infinit, tenim que $c \neq 0$ i per tant, la circumferència isomètrica associada a aquesta transformació és $C_\gamma = C(1/|c|, -d/c)$, que té radi un nombre de la forma $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. En definitiva, les circumferències isomètriques de radi més gran són les de radi 1, que tenen centre en un element de $\mathbb{Z}$. Per tant, la unió dels cercles isomètrics corresponents a aquestes transformacions omple la banda horitzontal $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \sqrt{3}/2\} \supset \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1/2\}$. En definitiva, com que les altres circumferències tenen radi $1/n$ amb $n \geq 2$, resulta que

$$\mathcal{D} = \{z : -1/2 \leq z \leq 1/2, |z| \geq 1\} \tag{1}$$

és un domini fonamental per a Γ.

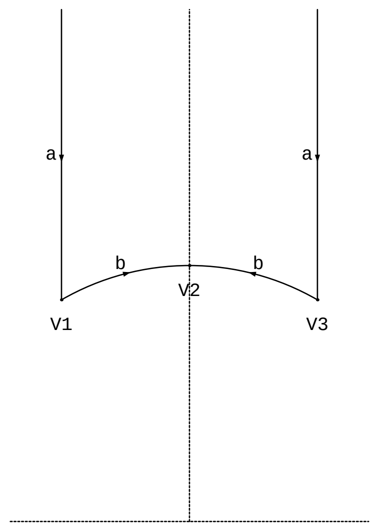

Figura 1: Domini fonamental per a $PSL(2, \mathbb{Z})$

A més, com que les identificacions de costats les realitzen $T(z) = z + 1$ i $S(z) = -1/z$ obtenim que aquests dos elements formen un sistema de generadors de Γ i que els cicles són $\{\infty\}, \{v_2\}, \{v_1, v_3\}$. A més, ∞ és parabòlic, i els altres dos són cicles ordinaris el·líptics, el primer d'ordre 2 i l'altre d'ordre 3. Les relacions donades pels cicles ordinaris són $S^2 = Id$ i $(ST)^3 = Id$. En conseqüència, $\{S, T\}$ amb les relacions $S^2 = (ST)^3 = Id$ donen una presentació de Γ.

1.6.1 Domini per a $\tilde{\Gamma}_0(p)$, $p > 2$ primer

Comencem recordant que

$$\tilde{\Gamma}_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

és un subgrup de $SL(2, \mathbb{Z})$.

Començarem veient com podem aplicar el mètode que ja hem utilitzat en l'apartat anterior per construir un domini fonamental de $\tilde{\Gamma}_0(p)$ per a $p > 2$ primer[5].

Teorema 4. *Sigui $p > 2$ primer; aleshores*

$$\mathcal{D}_p = \left\{ z \in \mathcal{H} : |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}, \left| z - \frac{k}{p} \right| \geq \frac{1}{p}, k \in \mathbb{Z}, 0 < |k| \leq \frac{p-1}{2} \right\}$$

és un domini fonamental de $\Gamma_0(p) \subset PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostració. Com en el cas de $SL(2, \mathbb{Z})$, les transformacions que fixen ∞ són les translacions $z \mapsto z + k$ amb $k \in \mathbb{Z}$ i per tant, un domini fonamental de $\Gamma_0(p)_\infty$ ve donat per

$$\mathcal{D}_{p,\infty} = \left\{ z \in \mathcal{H} : |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Per altra banda, si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \tilde{\Gamma}_0(p)$ tenim que $ad \equiv 1 \pmod{p}$. Però no només això, si $(c, d) = 1$, per Bézout obtenim una matriu $\left[\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in SL(2, \mathbb{Z})$ i, per tant, per a qualsevol d coprimer amb p hi ha un matriu $\left[\begin{smallmatrix} * & * \\ p & d \end{smallmatrix}\right] \in \tilde{\Gamma}_0(p)$.

Si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \tilde{\Gamma}_0(p)$ no fixa infinit, el seu cercle isomètric és $D(1/|c|, -d/c)$ i, com que $c = kp$ amb $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, resulta que el seu radi és menor o igual que $1/p$.

Així, els cercles isomètrics de radi $1/p$ omplen la regió $\{z : 1/(2p) < \operatorname{Re} z < 1/2, 0 < \operatorname{Im} z < \sqrt{3}/(2p)\} \cup \{z : -1/2 < \operatorname{Re} z < -1/(2p), 0 < \operatorname{Im} z <$

[5]El mateix mètode es pot utilitzar per a construir un domini fonamental de $\tilde{\Gamma}_0(N)$, per a tot $N \geq 1$.

$\sqrt{3}/(2p)\}$. Per tant, només hem d'estudiar els cercles isomètrics de radi petit en les proximitats de 0; més precisament, els cercles isomètrics de centre en $[-1/(2p), 1/(2p)]$. Ara bé, qualsevol cercle d'aquestes característiques serà $D(1/|kp|, -d/(kp))$ amb $|k| > 1$, $d \in \mathbb{Z}$ invertible mòdul kp i, per tant, no conté l'origen. En particular, si el seu centre està en $[-1/(2p), 1/(2p)]$, tot el cercle està contingut en $D(1/p, 1/p) \cup D(-1/p, 1/p)$ per convexitat.

En definitiva, hem provat que ens podem quedar amb els complementaris dels cercles $D(1/p, k/p)$ amb $0 < |k| < (p-1)/2$ que són exactament els que apareixen en l'enunciat. $\square$

Per exemple, aplicant aquest resultat obtenim, prenent $p = 5$,

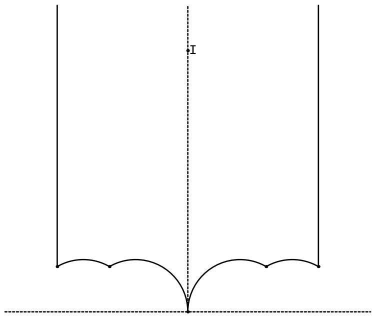

Figura 2: Domini fonamental per a $\Gamma_0(5)$

Així hem determinat un domini fonamental per a $\Gamma_0(p)$ que és simètric respecte l'eix imaginari però sense utilitzar cap domini fonamental per a $PSL(2, \mathbb{Z})$. A continuació, veurem un procés pel qual podem construir un domini fonamental per a $\Gamma_0(p)$ a partir del que ja havíem calculat per a $PSL(2, \mathbb{Z})$, figura 1 (pàgina 15).

Proposició 8. *Siguin* $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ *un grup fuchsià i* $\mathcal{D}$ *un domini fonamental d'aquest grup. Siguin* $\Gamma' \subset \Gamma$ *un subgrup i* $\{\gamma_i\}_i$ *un sistema de representants de les classes de* $\Gamma' \backslash \Gamma$, $\Gamma = \sqcup_i \Gamma' \gamma_i$. *Suposem que* $\mathcal{D}' = \bigcup_i \gamma_i(\mathcal{D})$ *és un polígon hiperbòlic. Aleshores,* $\mathcal{D}'$ *és un domini fonamental de* Γ'.

Demostració. Com que $\gamma_i \in \Gamma$ i són tots de classes diferents, en particular, $\gamma_i(\mathcal{D})$ són tots diferents i només poden tenir punts comuns en la frontera.

Per altra banda, com a conseqüència de totes les hipòtesis només cal comprovar que no hi ha punts equivalents en l'interior de $\mathcal{D}'$ i que qualsevol punt de $\mathcal{H}$ és equivalent a un punt de $\mathcal{D}'$.

Suposem que $y_1 \in \gamma_i(\mathring{\mathcal{D}})$ i $y_2 \in \gamma_j(\mathring{\mathcal{D}})$ són equivalents. Això significa que $\exists \rho \in \Gamma'$ tal que $\rho(y_1) = y_2$. Per altra banda, tenim $y_1 = \gamma_i(x_1)$,

$y_2 = \gamma_j(x_2)$ amb $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ i per tant, $\rho(\gamma_i(x_1)) = \gamma_j(x_2)$, d'on resulta que $\gamma_j^{-1}\rho\gamma_i$ ens dóna una equivalència entre dos punts de l'interior del domini $\mathcal{D}$. Així, resulta que $\gamma_j^{-1}\rho\gamma_i = Id$ i per tant, $\gamma_j = \rho\gamma_i \in \Gamma'\gamma_i$ d'on tenim que $[\gamma_i] = [\gamma_j] \in \Gamma'\backslash\Gamma$.

Per altra banda, si $y_1 = \gamma(y_2)$ són dos punts equivalents per Γ' que estan en l'interior de $\mathcal{D}'$ però en la frontera dels transportats de $\mathcal{D}$ significa que podem prendre un entorn de y_1 contingut en $\mathcal{D}'$ de manera que γ envïi aquest entorn a un entorn de y_2 contingut en $\mathcal{D}'$. Per tant, trobem punts interiors equivalents per γ i ens podem reduir al cas anterior.

Finalment, si $y \in \mathcal{H}$, resulta que $\exists\gamma \in \Gamma$ i $x \in \mathcal{D}$ tal que $\gamma x = y$; però com $\{\gamma_i\}_i$ formen un sistema de representants de les classes, resulta que $\gamma = \gamma'\gamma_j$ amb $\gamma' \in \Gamma'$ i per tant, $\gamma'\gamma_j x = y$ i, per tant, y és equivalent a $\gamma_j x \in \gamma_j\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$. $\square$

Com a conseqüència de la proposició anterior obtenim el resultat següent, lliure de la hipòtesi tècnica de connexió.

Corol·lari 2. *Siguin* Γ *un grup fuchsià i* $\mathcal{D}$ *un domini fonamental per a* Γ. *Aleshores, si* $\Gamma' \subset \Gamma$ *és un subgrup que té domini fonamental* $\mathcal{D}'$, *resulta que si* $V_h(\mathcal{D}') < \infty$, *on* V_h *denota el volum hiperbòlic, tenim que* $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$ *i a més*

$$[\Gamma : \Gamma'] = V_h(\mathcal{D}')/V_h(\mathcal{D}).$$

$\square$

La proposició anterior ens permet construir dominis fonamentals per a subgrups d'un grup del qual en coneixem un domini fonamental. Per exemple, si notem $S = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in SL(2,\mathbb{Z})$ resulta que com a transformacions de la proposició podem prendre $\{Id\} \cup \{ST^k\}_{k=0}^{p-1}$ o, si $p > 2$, $\{Id\} \cup \{ST^k\}_{k=-(p-1)/2}^{(p-1)/2}$ i obtenim així diferents dominis per $\Gamma_0(p)$, que també són diferents del que ja havíem vist abans[6]. Per aquest mètode trobem, respectivament, els dominis fonamentals per a $\Gamma_0(5)$ que apareixen en la figura 3.

2 Grups fuchsians associats a ordres d'àlgebres de quaternions

Començarem introduint els principals objectes que necessitarem per a la construcció de grups fuchsians a partir de les àlgebres de quaternions sobre $\mathbb{Q}$: ordres, ordres d'Eichler, etc.

[6] Cal que les k recorrin un sistema de reduït de residus mòdul p i que el resultat sigui connex.

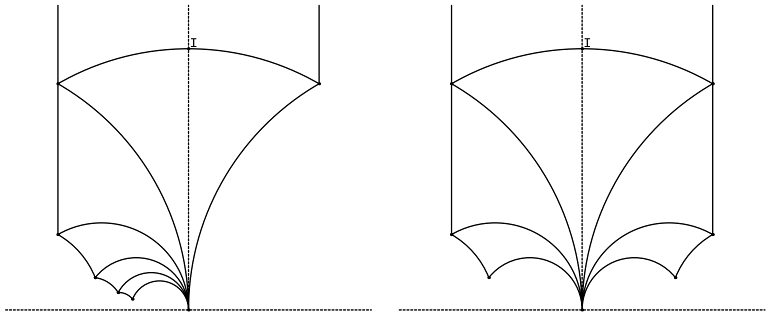

Figura 3: Dominis fonamentals per a $\Gamma_0(5)$

2.1 Introducció a les àlgebres de quaternions sobre $\mathbb{Q}$ i als seus ordres

Sigui K un cos de característica diferent de 2.

Definició. Una K-àlgebra de quaternions H és una K-àlgebra central i simple de dimensió 4 sobre K. Notem $H^* = \{w : \exists w' \in H, ww' = w'w = 1\}$ al conjunt d'elements invertibles.

Com que $\mathrm{car}(K) \neq 2$, tota K-àlgebra de quaternions H té una K-base $\{1, i, j, ij\}$ de manera que $i^2 = a, j^2 = b$ i $ij = -ji$, on $a, b \in K^*$. Recíprocament, una K-base i unes relacions com aquestes, juntament amb la propietat associativa, defineixen una K-àlgebra de quaternions, H, que denotarem per $\left(\frac{a,b}{K}\right)$[7].

Definició. Sigui H una K-àlgebra de quaternions amb K-base $\{1, i, j, ij\}$. Aleshores, tenim un endomorfisme involutiu de H definit per $w \mapsto \overline{w}$ on si $w = x + yi + xj + tij$, $\overline{w} = x - yi - xj - tij$. Utilitzant això, definim la traça i la norma de $w \in H$ com $\mathrm{tr}(w) = w + \overline{w}$, $\mathrm{nr}(w) = w\overline{w}$, respectivament, que amb la notació anterior per a w, s'escriuen $\mathrm{tr}(w) = 2x$, $\mathrm{nr}(w) = x^2 - ay^2 - by^2 + abt^2$. Aquests conceptes, en el cas d'una àlgebra de matrius, coincideixen amb els de traça i determinant habituals.

Tota K-àlgebra de quaternions és una K-àlgebra de divisió o una àlgebra isomorfa a l'àlgebra de matrius $M(2, K)$.

A partir d'ara prendrem $K = \mathbb{Q}$. Sigui v una plaça de $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}_v$ el corresponent completat de $\mathbb{Q}$. Recordem que $\mathbb{Q}$ té una plaça infinita que es correspon amb la inclusió de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ i les places finites, una per a cada primer $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$, representada per la inclusió de $\mathbb{Q}$ en el cos p-àdic $\mathbb{Q}_p$.

[7] Està clar que parelles (a, b) diferents poden donar K-àlgebres isomorfes.

Definició. Sigui H una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions. Per a tota plaça de $\mathbb{Q}$, v, $H_v := \mathbb{Q}_v \otimes H$ és una $\mathbb{Q}_v$-àlgebra de quaternions. Diem que H ramifica en v si H_v és una àlgebra de divisió; altrament, diem que H no ramifica en v.

Lema 6. *Sigui $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$. Aleshores, H ramifica en*

- *∞ si i només si $a < 0$ i $b < 0$.*
- *$p \in \mathbb{Z}$ si i només si $(a,b)_p = 1$, on $(\cdot,\cdot)_p$ denota el símbol de Hilbert.* □

Introduït aquest llenguatge, podem presentar el següent resultat de classificació.

Teorema 5.
- *Una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions H ramifica en un nombre finit i parell de places.*
- *Dues $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions són isomorfes si i només si ramifiquen en les mateixes places.*
- *Donat un nombre parell de places, existeix una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions que ramifica exactament en elles.* □

Per tant, té sentit considerar la noció següent.

Definició. El discriminant reduït D_H d'una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions H és l'ideal de $\mathbb{Z}$ producte dels ideals primers que ramifiquen en H, que podem identificar amb un element $D_H \in \mathbb{Z}$, $D_H > 0$, ja que $\mathbb{Z}$ és principal.

Donem a continuació la traducció dels resultats anteriors amb aquesta nova noció.

Corol·lari 3. *Dues $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions són isomorfes si i només si tenen el mateix discriminant reduït. L'àlgebra de quaternions ramifica en ∞ si i només si el discriminant és producte d'un nombre senar de primers.* □

Sovint, però, encara s'utilitza un altre llenguatge per parlar d'aquest fet.

Definició. Si K és un cos de nombres totalment real de grau $[K:\mathbb{Q}] = m$ i H és una K-àlgebra de quaternions, resulta que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H \cong M(2,\mathbb{R})^r \times \mathbb{H}^{m-r}$, on $\mathbb{H}$ indica l'àlgebra de quaternions de Hamilton. Diem que H és definida si $r = 0$ i altrament diem que és indefinida.

Observem que en el cas $K = \mathbb{Q}$ això correspon simplement a que la $\mathbb{Q}$-àlgebra sigui ramificada (definida) o no (indefinida) en infinit. En altres paraules, les $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions definides són aquelles que ramifiquen en ∞.

Proposició 9. *Sigui $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions indefinida amb $a > 0$. Aleshores, tenim una injecció $\Phi : H \hookrightarrow M(2, \mathbb{R})$ donada per:*

$$\Phi(x + yi + zj + tij) = \begin{bmatrix} x + y\sqrt{a} & z + t\sqrt{a} \\ b(z - t\sqrt{a}) & x - y\sqrt{a} \end{bmatrix},$$

que és de fet una immersió en $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a}))$. □

Exemple. Més endavant, apareixerà l'àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{3,-1}{\mathbb{Q}}\right)$. Aquesta és una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions indefinida de discriminant reduït 6 i la proposició anterior ens dóna un monomorfisme de H en $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$:

$$\Phi(x + yi + zj + tij) = \begin{bmatrix} x + y\sqrt{3} & z + t\sqrt{3} \\ -z + t\sqrt{3} & x - y\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Per tant, segons convingui, quan apareixi aquesta àlgebra de quaternions podrem treballar amb ella com a quaternions o bé com a matrius.

Introduirem ara el concepte d'ordre d'una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions. Per fer-ho necessitem el concepte d'elements enters en el context de les $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions.

Definició. Sigui $\alpha \in \mathbb{H}$, diem que és enter sobre $\mathbb{Q}$ si $\mathrm{nr}(\alpha)$ i $\mathrm{tr}(\alpha)$ són enteres.

Al contrari del que succeeix en el cas commutatiu, el conjunt d'elements enters no forma un anell i ens caldrà el concepte d'ordre.

Definició. Un subconjunt $\mathcal{O}$ de H s'anomena un $\mathbb{Z}$-ordre de H si: és un anell, tots els seus elements són enters, conté $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O} = H$.

Tot $\mathbb{Z}$-ordre està contingut en un $\mathbb{Z}$-ordre maximal de H i una generalització d'aquesta noció d'ordre maximal és la d'ordre d'Eichler.

Definició. Un ordre d'Eichler en una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions H és la intersecció de dos $\mathbb{Z}$-ordres maximals.

Sigui $\mathcal{O}$ un ordre d'Eichler i suposem que està contingut en un ordre maximal $\mathcal{O}'$.

Lema 7. *L'índex $[\mathcal{O}' : \mathcal{O}]$ com a $\mathbb{Z}$-mòduls és finit i no depèn de l'ordre maximal $\mathcal{O}'$ escollit.* □

Definició. Anomenem nivell d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}$ a l'índex $[\mathcal{O}' : \mathcal{O}]$, on $\mathcal{O}'$ és un ordre maximal qualsevol que conté $\mathcal{O}$.

Donem, per finalitzar aquesta introducció, alguns resultats sobre l'existència i unicitat d'ordres d'Eichler de nivell 'arbitrari'.

Proposició 10. *Si H és una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions de discriminant D, per a tot enter N coprimer amb D existeixen ordres d'Eichler de nivell N. A més a més, si H és indefinida, tots els ordres d'Eichler del mateix nivell són conjugats.* $\square$

Exemple. Alguns casos que apareixeran més endavant són:

- Un ordre d'Eichler de nivell N de l'àlgebra de matrius $M(2,\mathbb{Q})$ ve donat per $\mathcal{O}_0(N) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ cN & d \end{smallmatrix}\right] : a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Un ordre d'Eichler de nivell 1 de la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $\left(\frac{3,-1}{\mathbb{Q}}\right)$, que ja hem comentat abans, és $\mathcal{O}(6,1) = \mathbb{Z}[1,i,j,(1+i+j+ij)/2]$.
- Un ordre d'Eichler de nivell 5 de la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $\left(\frac{3,-1}{\mathbb{Q}}\right)$ és $\mathcal{O}(6,5) = \mathbb{Z}[1,5i,2i+j,(1+3i+j+ij)/2]$.

2.2 Grups associats a ordres d'àlgebres de quaternions

Siguin $D, N \geq 1$ nombres naturals coprimers. Aleshores considerem una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions H de discriminant D. Sigui $\mathcal{O}(D,N)$ un ordre d'Eichler de H de nivell N. Aleshores, considerem el grup d'unitats de norma 1,

$$\mathcal{O}(D,N)_1^* = \{w \in \mathcal{O}(D,N)^* : \mathrm{nr}(w) = 1\}.$$

A continuació resumim les propietats més importants d'aquests grups.

Teorema 6. *Sigui $\mathcal{O}(D,N)$ un ordre d'Eichler en una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions. Aleshores:*

- *Si H és indefinida, $\mathcal{O}(D,N)$ té unitats de norma -1 i*

$$[\mathcal{O}(D,N)^* : \mathcal{O}(D,N)_1^*] = 2.$$

- *Si H és definida, aleshores no hi ha elements de norma -1 i, per tant, $\mathcal{O}(D,N)_+^* = \mathcal{O}(D,N)^*$. A més a més, $\mathcal{O}(D,1)^*$ és un grup cíclic d'ordre $2,4$ o 6, llevat dels casos:*
  - *$H = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{Q}}\right)$, amb $D_H = 2$, en el qual $O(D,1)^*$ és isomorf a E_{24}, el grup tetrahedral binari, que té ordre 24.*
  - *$H = \left(\frac{-1,-3}{\mathbb{Q}}\right)$, amb $D_H = 3$, en el qual $O(D,1)^* \cong C_6 \times C_2$, un grup bicíclic d'ordre 12.* $\square$

Com que per a $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions definides el grup $\mathcal{O}(D,N)_1^*$ és finit ens restringirem al cas indefinit.

Suposem que D és producte d'un nombre parell de primers i aleshores, com que l'ordre d'Eichler està completament determinat llevat de conjugació (proposició 10, pàgina 22), aquest grup només depèn de D i N.

Exemple. Com que un ordre d'Eichler de nivell N de l'àlgebra de matrius $H = M(2,\mathbb{Q})$ és $\mathcal{O}_0(N) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ cN & d \end{smallmatrix}\right] : a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$, resulta que el grup que obtenim per aquest procés és $\tilde{\Gamma}_0(N)$, grup que ja hem estudiat.

Per altra banda, si el grup prové d'una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions indefinida qualsevol podem suposar que $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$ amb $a > 0$ lliure de quadrats i aleshores fixem el monomorfisme Φ que hem vist en la proposició 9. Definim $\tilde{\Gamma}(D,N) = \Phi(\mathcal{O}(D,N)_1^*)$, que és un subgrup de $SL(2,\mathbb{R})$, que per la projecció de $SL(2,\mathbb{R}) \to PSL(2,\mathbb{R})$ ens dóna un grup $\Gamma(D,N) \subset PSL(2,\mathbb{R})$

Observació. Tots aquests grups són infinits, fet que serà obvi a partir dels resultats que veurem a continuació; ara bé, en aquesta situació, si $a > 1$ lliure de quadrats, podem justificar de forma molt senzilla que $\Gamma(D,1)$ és un grup infinit. Per això només cal adonar-se que $\mathbb{Z}[\sqrt{a}] \subset \mathbb{Z}[1,i,j,ij]$ i $\mathbb{Z}[1,i,j,ij]$ és un ordre. Com que $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ té infinits elements de norma 1 resulta que $\mathbb{Z}[1,i,j,ij]$ té infinits elements de norma 1 i per tant, com que aquest ordre està contingut en algun ordre maximal, i tots són conjugats, obtenim que $\Gamma(D,1)$ és infinit.

És senzill veure que tots els grups $\tilde{\Gamma}(D,N)$ són subgrups discrets de $SL(2,\mathbb{R})$ (no es poden acumular a la identitat) i, per tant, tenim el resultat següent.

Proposició 11. $\Gamma(D,N)$ *és un grup fuchsià.* $\square$

Ja hem vist que el cas $D = 1$ correspon a l'àlgebra de quaternions no ramificada $M(2,\mathbb{Q})$. En aquest cas, $\Gamma(1,N)\backslash\mathcal{H}$ són superfícies de Riemann no compactes, les corbes modulars. En la resta de casos, $D > 1$, la superfície de Riemann $\Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ és compacta i, per tant, no hi ha cicles parabòlics.

Sigui $\mathcal{D}$ un domini fonamental per a $\Gamma(D,N)$. Notem $e_i(D,N)$ el nombre de cicles el·líptics d'ordre i de $\Gamma(D,N)$, e_∞ el nombre de cicles parabòlics, $V_h(D,N)$ el volum hiperbòlic de $\mathcal{D}$ i $g(D,N)$ el gènere de $\Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$. En el resultat següent presentem algunes de les propietats que té aquest domini fonamental.

Teorema 7. *Tots els cicles el·líptics són d'ordre* 2 *o* 3. *El nombre de cicles el·líptics, el volum del domini fonamental i el gènere de la corba* $\Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$

vénen donats per:

$$e_2(D,N) = \begin{cases} \prod_{p|D}\left(1-\left(\frac{-4}{p}\right)\right)\prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-4}{p}\right)\right) & si\ 4 \not| N, \\ 0 & si\ 4|N, \end{cases}$$

$$e_3(D,N) = \begin{cases} \prod_{p|D}\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right) & si\ 9 \not| N, \\ 0 & si\ 9|N, \end{cases}$$

$$V_h(D,N) = \frac{\pi N}{3}\prod_{p|D}(p-1)\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

$$2-2g(D,N) = -\frac{V(D,N)}{2\pi}+\frac{e_2(D,N)}{2}+\frac{2e_3(D,N)}{3}+e_\infty(D,N).$$

□

Observem que conegut aquest resultat obtenim que $[\Gamma(D,1):\Gamma(D,N)] = N\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \psi(N)$.

2.3 Un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$

Per a construir un domini fonamental per a aquest grup podríem intentar aplicar el teorema 3, però com ja hem comentat no és difícil veure que no es pot aplicar en aquest cas. Per tant, utilitzarem la demostració del teorema 1, que és aplicable amb tota generalitat, juntament amb els resultats que hem vist en la secció anterior.

Com que un ordre d'Eichler de nivell 1 de la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $\left(\frac{3,-1}{\mathbb{Q}}\right)$ és $\mathcal{O}(6,1) = \mathbb{Z}[1,i,j,(1+i+i+ij)/2]$, el grup $\tilde{\Gamma}(6,1)$ està format per les matrius

$$\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b\sqrt{3} & c+d\sqrt{3} \\ -c+d\sqrt{3} & a-b\sqrt{3}\end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) : a,b,c,d\in\mathbb{Z}, a\equiv b\equiv c\equiv d \pmod 2\right\}.$$

Recordem, a més, que el volum hiperbòlic d'un domini fonamental per a aquest grup és $2\pi/3$.

Comencem observant que el punt $\frac{\sqrt{3}-1}{2}i = i\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ és un punt que no és fix per cap transformació de $\Gamma(6,1)$ diferent de la identitat. Per tant, fixem

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & \frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{bmatrix},$$

que porta el punt $\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$ a ∞. Aleshores, aplicarem el teorema al grup $\eta\Gamma(6,1)\eta^{-1}$ i obtindrem un domini fonamental $\mathcal{D}'$ d'aquest grup; el domini fonamental que busquem serà $\mathcal{D} = \eta^{-1}(\mathcal{D}')$. Més precisament,

$$\mathcal{D} = \overline{\eta^{-1}\left(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{\gamma\in\Gamma(6,1)-\{Id\}} \overline{D}_{\eta\gamma\eta^{-1}}\right)} \bigcap \mathcal{H} = \overline{\left(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{\gamma\in\Gamma(6,1)-\{Id\}} \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\gamma\eta^{-1}}\right) \bigcap \mathcal{H}},$$

on les adherències estan preses en $\mathbb{C}_\infty$.

Escollim les transformacions de $\Gamma(6,1)$ donades per

$$\begin{aligned}
&\rho_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, && \rho_2 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
&\rho_3 = \rho_2^2, && \rho_4 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
&\rho_5 = \rho_4^2, && \rho_6 = \begin{bmatrix} 0 & -2+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

és una comprovació immediata que

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_1\eta^{-1}} &= \mathbb{C}_\infty - D(0,1), \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_2\eta^{-1}} &= \overline{D(-3+2\sqrt{3}, \sqrt{2}(2-\sqrt{3}))}, \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_3\eta^{-1}} &= \overline{D(\sqrt{3}, \sqrt{2})}, \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_4\eta^{-1}} &= \overline{D(3-2\sqrt{3}, \sqrt{2}(2-\sqrt{3}))}, \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_5\eta^{-1}} &= \overline{D(-\sqrt{3}, \sqrt{2})}, \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_6\eta^{-1}} &= \overline{D(0, 2-\sqrt{3})}.
\end{aligned}$$

A més a més,

$$\overline{\left(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{i=1}^{6} \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_i\eta^{-1}}\right) \bigcap \mathcal{H}}$$

és el polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$, on

$$\begin{aligned}
&P_1 = \frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{3}, && P_2 = \frac{-1+i}{1+\sqrt{3}} && P_3 = \frac{(3-2\sqrt{3})(1-\sqrt{2}i)}{3}, \\
&P_4 = (2-\sqrt{3})i, && P_5 = \frac{(-3+2\sqrt{3})(1+\sqrt{2}i)}{3}, && P_6 = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}}, \\
&P_7 = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{3}, && P_8 = i.
\end{aligned}$$

Els angles interiors en cada vèrtex són, respectivament, $\{\pi/2, 2\pi/3, \pi/2, \pi, \pi/2, 2\pi/3, \pi/2, \pi\}$ i, en conseqüència, el volum del polígon hiperbòlic és

$(8-2)\pi-(\pi/2+2\pi/3+\pi/2+\pi+\pi/2+2\pi/3+\pi/2+\pi) = 2\pi/3$. Com que ja sabem que aquest polígon conté un domini fonamental i el seu volum i el d'un domini fonamental coincideixen, aquest polígon és un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$.

Resumim algunes propietats d'aquest domini en el teorema següent.

Teorema 8. *Un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$ ve donat per l'octàgon hiperbòlic que té per vèrtexs els $\{P_i\}_{i=1}^{8}$ anteriors.*

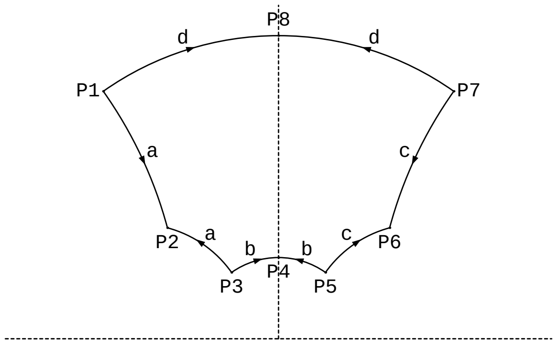

Figura 4: Domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$

Té les propietats següents:

- *Els angles en els vèrtexs són, respectivament,* $\{\pi/2, 2\pi/3, \pi/2, \pi, \pi/2, 2\pi/3, \pi/2, \pi\}$.

- *Els vèrtexs $\{P_2, P_4, P_6, P_8\}$ són el·líptics i les corresponents transformacions el·líptiques que els fixen són*

$$\gamma_{P_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{P_4} = \begin{bmatrix} 0 & -2+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\gamma_{P_6} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{P_8} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *El seu volum hiperbòlic és $2\pi/3$ i el gènere de $\Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$ és 0.*

- *$\{P_4, P_8\}$ són els vèrtexs el·líptics d'ordre 2 i cadascun d'ells constitueix un cicle el·líptic d'ordre 2.*

- *$\{P_2, P_6\}$ són els vèrtexs el·líptics d'ordre 3 i cadascun d'ells constitueix un cicle el·líptic d'ordre 3. A més, $\gamma_{P_2}(P_3) = P_1$ i $\gamma_{P_6}(P_5) = P_7$.*

- *$\{P_1, P_3, P_5, P_7\}$ constitueixen un cicle accidental.*

- *Les identificacions dels costats vénen donades per:*

$$\begin{array}{l}(P_1P_2, P_3P_2) \textit{ mitjançant } \gamma_{P_2}^{-1},\\ (P_3P_4, P_5P_4) \textit{ mitjançant } \gamma_{P_4},\\ (P_5P_6, P_7P_6) \textit{ mitjançant } \gamma_{P_6},\\ (P_7P_8, P_1P_8) \textit{ mitjançant } \gamma_{P_8}.\end{array}$$

- *Una presentació de* $\Gamma(6,1)$ *ve donada per*

$$\langle \gamma_{P_2}, \gamma_{P_4}, \gamma_{P_6}, \gamma_{P_8} : \gamma_{P_4}^2 = \gamma_{P_8}^2 = \gamma_{P_2}^3 = \gamma_{P_6}^3 = \gamma_{P_8}\gamma_{P_6}\gamma_{P_4}\gamma_{P_2}^{-1} = 1\rangle.$$

□

A partir d'aquest domini fonamental que hem calculat determinarem un domini fonamental, també simètric respecte l'eix imaginari, amb tots els vèrtexs el·líptics, o sigui, sense cicles accidentals. Per aconseguir-ho, a partir del polígon anterior, només cal moure els triangles hiperbòlics $P_2P_3P_4$ i $P_4P_5P_6$ per γ_{P_2} i γ_{P_6} respectivament. Així obtenim un nou domini fonamental, que anomenarem $\mathcal{D}(6,1)$, que és el que apareix a [1]. Com abans, resumim en el resultat següent les propietats més destacables d'aquest domini fonamental.

Teorema 9. *El domini fonamental* $\mathcal{D}(6,1)$ *és l'hexagon hiperbòlic de vèrtexs* $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, *on*

$$v_1 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \qquad v_2 = P_2 = \frac{-1+i}{1+\sqrt{3}}, \quad v_3 = P_4 = (2-\sqrt{3})i,$$
$$v_4 = P_6 = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}}, \qquad v_5 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \qquad v_6 = P_8 = i.$$

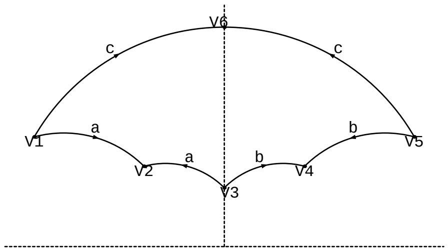

Figura 5: Domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$

Aquest domini té les propietats següents:

- *Els angles en aquests vèrtexs són* $\{\pi/4, 2\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi/4, \pi\}$, *respectivament.*

- *El volum de* $\mathcal{D}(6,1)$ *és* $V_h(6,1) = 2\pi/3$.

- *Tots els vèrtexs són el·líptics i les transformacions que els fixen són:*

$$\begin{aligned}
\gamma_{v_1} &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ -2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, & \gamma_{v_2} &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
\gamma_{v_3} &= \begin{bmatrix} 0 & -2+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, & \gamma_{v_4} &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
\gamma_{v_5} &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, & \gamma_{v_6} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

- *Hi ha 4 vèrtexs el·líptics d'ordre 2,* $\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$*, repartits en dos cicles el·líptics d'ordre 2,* $\{v_6\}$ *i* $\{v_1, v_3, v_5\}$*. A més,* $\gamma_{v_2}(v_3) = v_1$ *i* $\gamma_{v_4}(v_3) = v_5$.

- *Hi ha 2 vèrtexs el·líptics d'ordre 3,* $\{v_2, v_4\}$*, repartits en dos cicles el·líptics d'ordre 3,* $\{v_2\}$ *i* $\{v_4\}$.

- *Les identificacions de costats són:*

$$\begin{aligned}
&(v_2v_3, v_2v_1) \ \textit{mitjançant}\ \gamma_{v_2}, \\
&(v_3v_4, v_5v_4) \ \textit{mitjançant}\ \gamma_{v_4}, \\
&(v_5v_6, v_1v_6) \ \textit{mitjançant}\ \gamma_{v_6}.
\end{aligned}$$

- *Una presentació de* $\Gamma(6,1)$ *ve donada per*

$$\langle \gamma_{v_2}, \gamma_{v_4}, \gamma_{v_6} : \gamma_{v_2}^3 = \gamma_{v_4}^3 = \gamma_{v_6}^2 = (\gamma_{v_2}^{-1}\gamma_{v_6}\gamma_{v_4})^2 = 1\rangle.$$

□

3 El grup $\Gamma(6,5)$

A continuació estudiarem detalladament algunes propietats geomètriques del grup $\Gamma(6,5)$ que llegirem a partir del seu domini. Començarem construint un domini fonamental per a aquest grup, utilitzant que és un subgrup de $\Gamma(6,1)$, i aleshores estudiarem els possibles plegaments per unes simetries molt concretes d'aquest domini; això correspondrà a estudiar uns altres grups fuchsians, $\Gamma \supset \Gamma(6,5)$.

3.1 Un domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$

Fixem l'àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{3,-1}{\mathbb{Q}}\right)$. Com ja hem vist, $\mathcal{O}(6,1) = \mathbb{Z}[1, i, j, (1+i+j+ij)/2] = \mathbb{Z}[1, i, 2i+j, (1+3i+j+ij)/2]$ és un ordre maximal i $\mathcal{O}(6,5) = \mathbb{Z}[1, 5i, 2i+j, (1+3i+j+ij)/2]$ és un ordre d'Eichler de nivell 5. Ja coneixem un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$, el domini $\mathcal{D}(6,1)$ que ens dóna el teorema 9, i utilitzarem la proposició 8 per a construir-ne un per a $\Gamma(6,5)$.

Sabem que $[\Gamma(6,1) : \Gamma(6,5)] = \psi(5) = 6$ i és una comprovació rutinària veure que els 6 elements de $\tilde{\Gamma}(6,1)$ següents donen un sistema de representants de les classes de $\Gamma(6,5)\backslash\Gamma(6,1)$:

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\\
T_1 &= \gamma_{v_2} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix},\\
T_2 &= T_1^2 = \gamma_{v_2}^2 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix},\\
T_3 &= \gamma_{v_4} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix},\\
T_4 &= \gamma_{v_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\\
T_5 &= T_4 T_2 = \gamma_{v_6}\gamma_{v_2}^2 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

La reunió $\mathcal{D}(6,5) = \bigcup_{i=0}^{5} T_i\mathcal{D}(6,1)$ és un polígon hiperbòlic i, per tant, un domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$. Més precisament, és el polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{Q_i\}_{i=1}^{22}$ on, amb la notació del teorema 9,

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = T_4(v_3) = T_5(v_1) = i(2+\sqrt{3}), && Q_2 = T_4(v_4) = \frac{1-i}{1-\sqrt{3}},\\
&Q_3 = v_1 = T_4(v_5) = T_1(v_3) = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, && Q_4 = T_1(v_4) = \frac{-5+i}{1+3\sqrt{3}},\\
&Q_5 = T_1(v_5) = \frac{-6\sqrt{3}+i}{11+2\sqrt{3}}, && Q_6 = T_1(v_6) = \frac{-2\sqrt{3}+i}{4+\sqrt{3}},\\
&Q_7 = T_1(v_1) = T_2(v_3) = \frac{-2\sqrt{3}+i}{5+2\sqrt{3}}, && Q_8 = T_2(v_4) = \frac{-5+i}{7+5\sqrt{3}},\\
&Q_9 = T_2(v_5) = \frac{-4\sqrt{3}+i}{7(2+\sqrt{3})}, && Q_{10} = T_2(v_6) = \frac{-\sqrt{3}+i}{2(2+\sqrt{3})},\\
&Q_{11} = v_3 = T_2(v_1) = (2-\sqrt{3})i, && Q_{12} = v_4 = T_3(v_4) = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}},\\
&Q_{13} = T_3(v_5) = \frac{2\sqrt{3}+i}{5+2\sqrt{3}}, && Q_{14} = T_3(v_6) = \frac{2\sqrt{3}+i}{4+\sqrt{3}},\\
&Q_{15} = T_3(v_1) = \frac{6\sqrt{3}+i}{11+2\sqrt{3}}, && Q_{16} = T_3(v_2) = \frac{5+i}{1+3\sqrt{3}},\\
&Q_{17} = v_5 = T_3(v_3) = T_4(v_1) = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, && Q_{18} = T_4(v_2) = T_5(v_2) = -\frac{1+i}{1-\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

$$Q_{19} = T_5(v_3) = \frac{2\sqrt{3}+i}{5-2\sqrt{3}}, \quad Q_{20} = T_5(v_4) = -\frac{5+i}{7-5\sqrt{3}},$$
$$Q_{21} = T_5(v_5) = \frac{4\sqrt{3}+i}{7(2-\sqrt{3})}, \quad Q_{22} = T_5(v_6) = \frac{\sqrt{3}+i}{2(2-\sqrt{3})}.$$

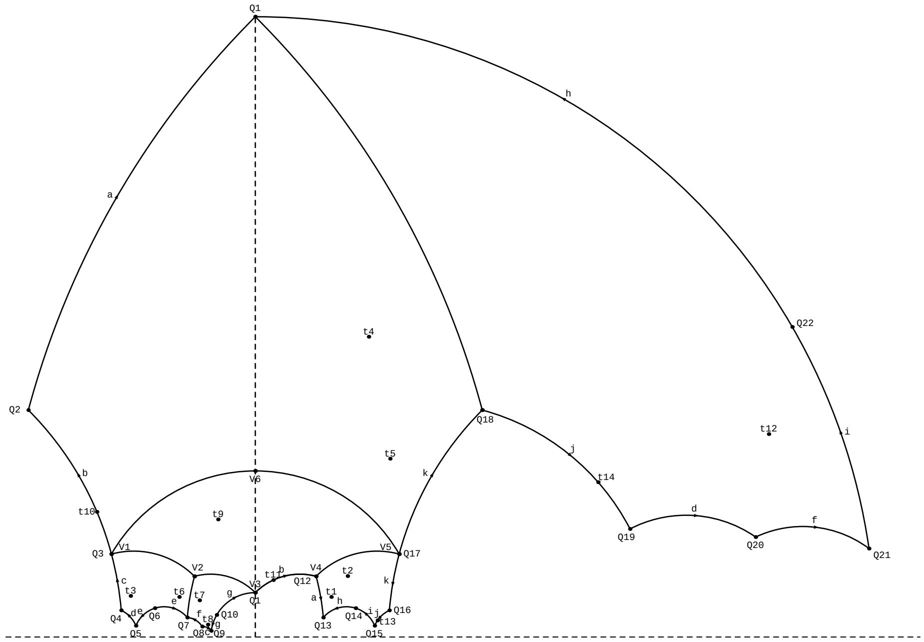

Figura 6: Domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$

Abans de continuar, introduirem una notació que ens serà còmoda a partir d'ara. Fixem la base $\{1, i, 2i+j, (1+3i+j+ij)/2\}$ de $\mathcal{O}(6,1)$. Identificarem $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ amb l'element de $\mathcal{O}(6,1)$ que té aquestes coordenades en aquesta base i també amb la matriu obtinguda per la immersió de H en $SL(2,\mathbb{R})$. Amb aquest conveni la norma de (a,b,c,d) ve donada per

$$\mathrm{nr}(a,b,c,d) = a^2 - 3b^2 - 12bc - 11c^2 + ad - 9bd - 17cd - 7d^2.$$

Observem també que $(a,b,c,d) \in \mathcal{O}(6,5)$ si, i només si, $b \in 5\mathbb{Z}$.

Resumim totes les propietats d'aquest domini en el teorema següent.

Teorema 10. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{Q_i\}_{i=1}^{22}$, $\mathcal{D}(6,5)$, és un domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$ que cumpleix:*

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament, $\{3\pi/4,\ 2\pi/3,\ \pi,\ 2\pi/3,\ \pi/4,\ \pi,\ 3\pi/4,\ 2\pi/3,\ \pi/4,\ \pi,\ 3\pi/4,\ 4\pi/3,\ \pi/4,\ \pi,\ \pi/4,\ 2\pi/3,\ \pi,\ 4\pi/3,\ \pi/2,\ 2\pi/3,\ \pi/4,\ \pi\}$.

b) *El volum hiperbòlic* $\mathcal{D}(6,5)$ *és* 4π *i el gènere de* $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$ *és* 1.

c) *Els vèrtexs el·líptics són* $\{Q_1, Q_6, Q_{10}, Q_{13}, Q_{17}\}$ *i tots ells són d'ordre* 2. *Les transformacions que fixen aquests vèrtexs són*

$$\begin{aligned}
\gamma_{Q_1} &= (1,5,-1,-2) = \begin{bmatrix} 0 & -2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \\
\gamma_{Q_6} &= (1,-5,5,-2) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 4-\sqrt{3} \\ -4-\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
\gamma_{Q_{10}} &= (2,-5,6,-4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 4-2\sqrt{3} \\ -4-2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
\gamma_{Q_{13}} &= (2,-10,7,-4) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & 5-2\sqrt{3} \\ -5-2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
\gamma_{Q_{17}} &= (0,5,-2,0) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

d) *Les identificacions de costats són:*

$(Q_1Q_2, Q_{13}Q_{12})$ *mitjançant* $(-1,0,1,-1)$,
$(Q_2Q_3, Q_{12}Q_{11})$ *mitjançant* $(-1,0,1,-1)$,
(Q_3Q_4, Q_9Q_8) *mitjançant* $(-1,-5,6,-3)$,
$(Q_4Q_5, Q_{20}Q_{19})$ *mitjançant* $(3,-5,-1,6)$,
(Q_5Q_6, Q_7Q_6) *mitjançant* γ_{Q_6},
$(Q_7Q_8, Q_{21}Q_{20})$ *mitjançant* $(-5,0,2,-5)$,
$(Q_9Q_{10}, Q_{11}Q_{10})$ *mitjançant* $\gamma_{Q_{10}}$,
$(Q_{13}Q_{14}, Q_1Q_{22})$ *mitjançant* $(3,5,-1,-1)$,
$(Q_{14}Q_{15}, Q_{22}Q_{21})$ *mitjançant* $(3,5,-1,-1)$,
$(Q_{15}Q_{16}, Q_{19}Q_{18})$ *mitjançant* $\gamma_{Q_{17}}$,
$(Q_{16}Q_{17}, Q_{18}Q_{17})$ *mitjançant* $\gamma_{Q_{17}}$.

e) *Tots els cicles ordinaris i les relacions donades per cadascun d'ells són:*

- $\{Q_1, Q_{13}\}$ *constitueix un cicle el·líptic d'ordre* 2 *i la relació donada és* $[(3,5,-1,-1)(-1,0,1,-1)]^2 = 1$.
- $\{Q_2, Q_{12}\}$ *constitueix un cicle accidental de només dos vèrtexs i la relació donada és trivial.*
- $\{Q_3, Q_{11}, Q_9\}$ *constitueix un cicle accidental i la relació donada és* $(-1,-5,6,-3)^{-1}\gamma_{Q_{10}}^{-1}(-1,0,1,-1) = 1$.
- $\{Q_4, Q_8, Q_{20}\}$ *constitueix un cicle accidental i la relació donada és* $(3,-5,-1,6)^{-1}(-5,0,2,-5)(-1,-5,6,-3) = 1$.
- $\{Q_5, Q_7, Q_{21}, Q_{15}, Q_{19}\}$ *constitueix un cicle accidental i la relació donada és* $(3,-5,-1,6)^{-1}\gamma_{Q_{17}}(3,5,-1,-1)^{-1}(-5,0,2,-5)\gamma_{Q_6} = 1$.
- $\{Q_6\}$ *constitueix un cicle el·líptic d'ordre* 2 *i la relació donada és* $\gamma_{Q_6}^2 = 1$.

- $\{Q_{10}\}$ *constitueix un cicle el·líptic d'ordre* 2 *i la relació donada és* $\gamma_{Q_{10}}^2 = 1$.
- $\{Q_{14}, Q_{22}\}$ *constitueix un cicle accidental de només dos vèrtexs i la relació donada és trivial.*
- $\{Q_{16}, Q_{18}\}$ *constitueix un cicle accidental de només dos vèrtexs i la relació donada és trivial.*
- $\{Q_{17}\}$ *constitueix un cicle el·líptic d'ordre* 2 *i la relació donada és* $\gamma_{Q_{17}}^2 = 1$.

f) Les transformacions de d) amb les relacions de e) donen una presentació del grup $\Gamma(6,5)$.

g) Hi ha 12 *punts de multiplicació complexa especials (la definició, les propietats i el mètode de càlcul apareix a [1]) que estan associats a ordres quadràtics de* $\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$ *i* $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$ *de conductor* 1. *Per a l'ordre de* $\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$ *s'obtenen els* 8 *punts:*

$$\tau_1 = \frac{5+\sqrt{7}i}{4(1+\sqrt{3})}, \quad \tau_2 = \frac{4+\sqrt{7}i}{2+3\sqrt{3}}, \quad \tau_3 = \frac{-8+\sqrt{7}i}{2+5\sqrt{3}}, \quad \tau_4 = \frac{1+\sqrt{7}i}{-2+2\sqrt{3}},$$
$$\tau_5 = \frac{2+\sqrt{7}i}{-1+2\sqrt{3}}, \quad \tau_6 = \frac{-5+\sqrt{7}i}{4(1+\sqrt{3})}, \quad \tau_7 = \frac{-4+\sqrt{7}i}{5+4\sqrt{3}}, \quad \tau_8 = \frac{-10+\sqrt{7}i}{16+11\sqrt{3}};$$

i per a l'ordre de $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$ *s'obtenen els* 4 *punts:*

$$\tau_9 = \frac{-1+\sqrt{10}i}{1+2\sqrt{3}}, \quad \tau_{10} = \frac{1+\sqrt{10}i}{4+3\sqrt{3}}, \quad \tau_{11} = \frac{4-\sqrt{10}i}{1-3\sqrt{3}},$$
$$\tau_{12} = \frac{8+\sqrt{10}i}{-13+9\sqrt{3}}, \quad \tau_{13} = \frac{23+\sqrt{10}i}{7+14\sqrt{3}}, \quad \tau_{14} = \frac{7+\sqrt{10}i}{-7+6\sqrt{3}},$$

tenint en compte que, en $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$, $\tau_{10} = \tau_{11}$ *i* $\tau_{13} = \tau_{14}$

□

Treballant directament sobre aquest domini o bé escollint representants $\{T_i\}$ diferents trobaríem altres dominis. Per exemple, és molt senzill comprovar que canviant T_3 per $(0,5,-2,0)T_3 = \gamma_{Q_{17}}T_3$ obtenim un nou domini que és convex, figura 7, on notem $X' = (0,5,-2,0)X$ per a $X \in \mathcal{H}$. Amb aquest procés eliminem un cicle accidental trivial.

3.2 Plegaments del domini fonamental de $\Gamma(6,5)$

El proper objectiu serà estudiar els plegaments d'aquest domini, o, equivalentment, uns nous grups fuchsians obtinguts adjuntant involucions adequades, en el sentit que precisarem a continuació, al grup $\Gamma(6,5)$. De fet, això

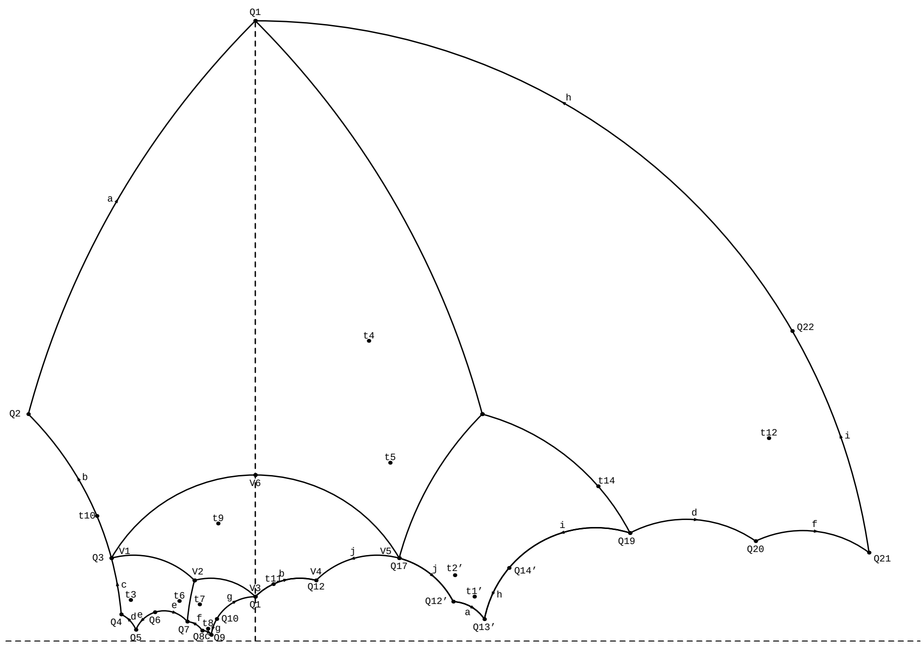

Figura 7: Un altre domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$

correspon a estudiar com actuen aquestes involucions en la corba $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$, i.e. correspon a estudiar automorfismes de $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$. A partir d'ara, notarem $X(6,5) := \Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$.

Per tant, ens interessen transformacions que actuïn en $X(6,5)$; això correspon a buscar transformacions que transportin $\mathcal{D}(6,5)$ en un nou domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$ conservant les identificacions; per a aconseguir-ho buscarem elements que normalitzin $\Gamma(6,5)$, o, equivalentment, que normalitzin $\tilde{\Gamma}(6,5)$. De fet, tenim el següent resultat.

Lema 8. *Siguin Γ un grup fuchsià, $\mathcal{D}$ un domini fonamental i $w \in PSL(2,\mathbb{R})$ una transformació qualsevol. Aleshores, $w\mathcal{D}$ és un domini fonamental per a Γ i w preserva les identificacions del domini si i només si w normalitza Γ.*

Demostració. Si w normalitza, és una comprovació rutinària veure que se satisfan totes les propietats demanades. Recíprocament, imposar que w preservi les identificacions del domini ens dóna de forma immediata que w normalitza totes les transformacions que identifiquen costats del domini; però ja sabem que aquestes formen un sistema de generadors de Γ. $\square$

La qüestió que apareix és: com determinarem transformacions que normalitzin $\Gamma(6,5)$? Notem

$$\mathcal{O}(6,5)^*_k = \{x \in \mathcal{O}(6,5) : \mathrm{nr}(x) = k\}$$

per a $k \in \mathbb{N}$. Aleshores buscarem elements de la forma $w_k = \frac{1}{\sqrt{k}} x \in SL(2,\mathbb{R})$ amb $x \in \mathcal{O}(6,5)^*_k$ per a $k | 6 \times 5 = 30$. Però no només demanarem; buscarem transformacions que donin involucions sobre $X(6,5)$, això és, w_k que normalitzi i tal que $w_k^2 \in \Gamma(6,5)$.

Mitjançant aquest procés determinem els elements w_2, w_3, w_5 que normalitzen $\Gamma(6,5)$ i que a més donen involucions $\omega_2, \omega_3, \omega_5$ de $X(6,5)$:

$$\begin{aligned}
w_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2,5,-1,-2) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \\
w_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-5,0,-2,1) = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -5-3\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 5-3\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
w_5 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1,1) = \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 5+\sqrt{3} \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

a més w_2, w_3 també normalitzen $\Gamma(6,1)$ i òbviament també donen involucions, per tant, tota aquesta discussió que farem per $\Gamma(6,5)$ seria possible de la mateixa manera per a $\Gamma(6,1)$. En canvi, resulta que w_5 no normalitza $\Gamma(6,1)$ i, per tant, no dóna un automorfisme de $\Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$.

A partir d'aquests elements que hem trobat podem construir-ne d'altres, per exemple,

$$\begin{aligned}
w_6 &= w_3^{-1} w_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-5,4,-2) = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \\
w_{10} &= w_2 w_5 = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(3,15,-4,-6) = \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & -7-3\sqrt{3} \\ 7-3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
w_{15} &= w_3 w_5 = \tfrac{1}{\sqrt{15}}(-7,5,-4,-1) = \tfrac{1}{2\sqrt{15}} \begin{bmatrix} -15-9\sqrt{3} & -9-\sqrt{3} \\ 9-\sqrt{3} & -15+9\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
w_{30} &= w_3^{-1} w_2 w_5 = \tfrac{1}{\sqrt{30}}(1,-10,7,-2) = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 6-\sqrt{3} \\ -6-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

que també normalitzen i donen involucions ω_k de $X(6,5)$.

Utilitzant aquests elements volem estudiar els grups $\langle \Gamma(6,5), w_k \rangle$, però tenint en compte que w_k dóna un automorfisme de $X(6,5)$, per determinar un domini només hem d'estudiar $\langle \omega_k \rangle \backslash X(6,5)$; en altres paraules, només hem d'estudiar l'acció de w_k en el domini $\mathcal{D}(6,5)$. Notarem $X(6,5)^{\langle \omega_k \rangle} := \langle \omega_k \rangle \backslash X(6,5)$.

A partir d'ara fixem el domini fonamental de $\Gamma(6,5)$, $\mathcal{D}(6,5)$, que ens dóna el teorema 10.

3.2.1 Estudi de $X(6,5)^{\langle \omega_2 \rangle}$

A la figura 8 representem quines regions de $\mathcal{D}(6,5)$ queden identificades per $w_2\Gamma(6,5)$, i.e. descrivim l'acció de ω_2 en $X(6,5)$.

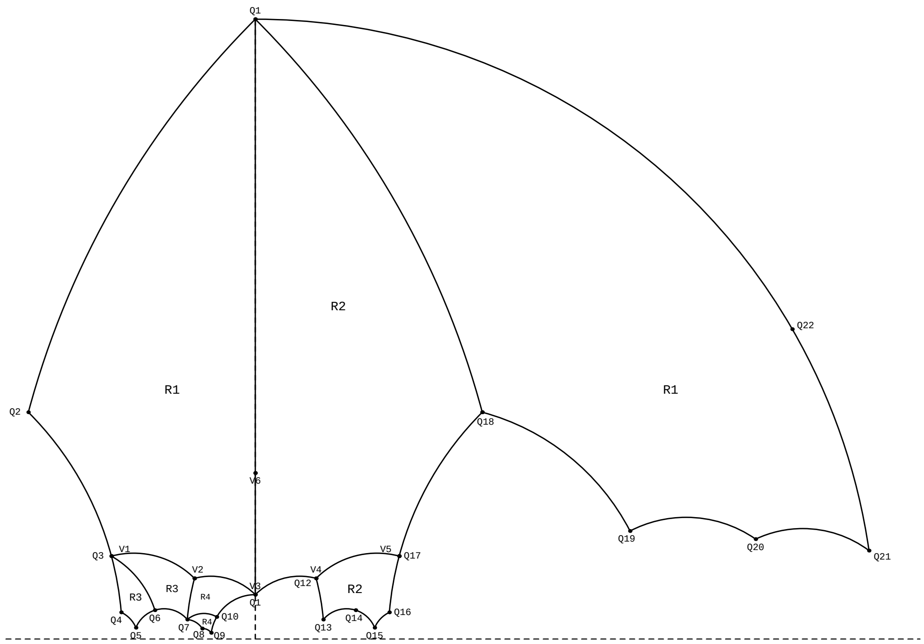

Figura 8: Identificacions realitzades per w_2

Més precisament,

- El polígon $Q_1Q_{18}Q_{19}Q_{20}Q_{21}Q_{22}$ es transforma en $Q_1Q_2Q_3v_2v_3v_6$, mitjançant w_2.
- El polígon $Q_{17}Q_{16}Q_{15}Q_{14}Q_{13}Q_{12}$ es transforma en $Q_{17}Q_{12}Q_{11}v_6Q_1Q_{18}$, mitjançant $w_2(3,5,-1,-1)$.
- El polígon $Q_3Q_4Q_5Q_6$ es transforma en $Q_7v_2Q_3Q_6$, mitjançant $w_2(3,-5,-1,6)$.
- El polígon $Q_7Q_8Q_9Q_{10}$ es transforma en $Q_{11}v_2Q_7Q_{10}$, mitjançant $w_2(-5,0,2,-5)$.

Notem

$$
\begin{array}{lllll}
Q_1^2 = Q_1, & Q_2^2 = Q_2, & Q_3^2 = Q_3 = v_1, & Q_4^2 = Q_6, & Q_5^2 = Q_7, \\
Q_6^2 = Q_{10}, & Q_7^2 = Q_{11} = v_3, & Q_8^2 = Q_{12} = v_4, & Q_9^2 = Q_{17} = v_5, & Q_{10}^2 = Q_{18}.
\end{array}
$$

Amb aquestes notacions tenim el resultat següent.

Teorema 11. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs* $\{Q_i^2\}_{i=1}^{10}$ *és un domini fonamental per al grup* $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$.

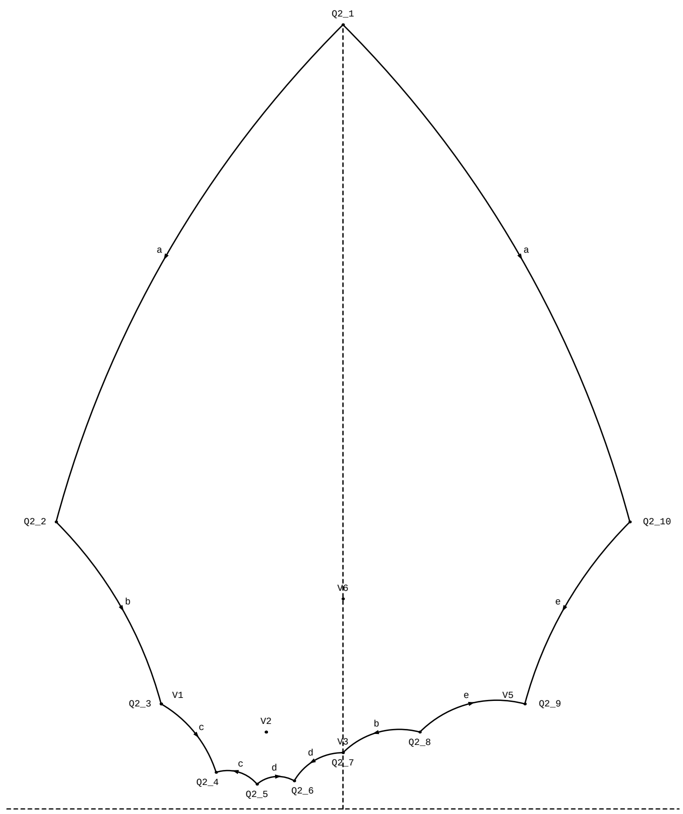

Figura 9: $X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, \pi/2, \pi/2, \pi/2, 3\pi/4, 2\pi/3, \pi/2, 2\pi/3\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π *i el gènere de* $X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}$ *és* 0.

c) Hi ha 4 *vèrtexs el·líptics d'ordre* 4, $\{Q_1^2, Q_4^2, Q_6^2, Q_9^2\}$ *i les transformacions que els fixen són:*

$$\gamma_{Q_1^2} = w_2, \qquad \gamma_{Q_4^2} = w_2(3,-5,-1,6),$$
$$\gamma_{Q_6^2} = w_2(-5,0,2,-5), \quad \gamma_{Q_9^2} = w_2(3,5,-1,-1);$$

a més, $\gamma_{Q_1^2}(Q_{10}^2) = Q_2^2$, $\gamma_{Q_4^2}(Q_3^2) = Q_5^2$, $\gamma_{Q_6^2}(Q_5^2) = Q_7^2$ *i* $\gamma_{Q_9^2}(Q_8^2) = Q_{10}^2$.

d) Cadascun dels vèrtexs el·líptics anteriors constitueix un cicle el·líptic. Per altra banda, hi ha dos cicles accidentals: $\{Q_2^2, Q_{10}^2, Q_8^2\}$ *i* $\{Q_3^2, Q_5^2, Q_7^2\}$.

e) Les identificacions de costats vénen donades per:

$$\begin{array}{l} (Q_1^2Q_{10}^2, Q_1^2Q_2^2) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_1^2} = w_2, \\ (Q_2^2Q_3^2, Q_8^2Q_7^2) \textit{ mitjançant } (-1,0,1,-1), \\ (Q_3^2Q_4^2, Q_5^2Q_4^2) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_4^2}, \\ (Q_5^2Q_6^2, Q_7^2Q_6^2) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_6^2}, \\ (Q_8^2Q_9^2, Q_{10}^2Q_9^2) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_9^2}, \end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l} \gamma_{Q_1^2}^4 = \gamma_{Q_4^2}^4 = \gamma_{Q_6^2}^4 = \gamma_{Q_9^2}^4 = 1, \\ \gamma_{Q_9^2}(-1,0,1,-1)\gamma_{Q_1^2} = 1, \\ (-1,0,1,-1)^{-1}\gamma_{Q_6^2}\gamma_{Q_4^2} = 1. \end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle$.

h) La línia poligonal tancada unió dels segments hiperbòlics $Q_1^2Q_4^2$, $Q_4^2Q_6^2$, $Q_6^2Q_9^2$ *i* $Q_9^2Q_1^2$ *és un eix de simetria del domini fonamental.*

□

3.2.2 Estudi de $X(6,5)^{\langle \omega_3 \rangle}$

En aquest cas, $w_3\Gamma(6,5)$ identifica les regions de $\mathcal{D}(6,5)$ següents:

- $Q_2Q_3Q_6Q_7Q_8Q_9Q_{10}v_2v_6$ amb $Q_{20}Q_{22}Q_1v_6Q_{12}Q_{14}Q_{17}Q_{18}Q_{19}$, mitjançant $w_3(0,5,-7,5)$,
- $v_2Q_{10}Q_{11}v_6$ amb $Q_{16}Q_{17}Q_{14}Q_{15}$, mitjançant $w_3(-5,15,-18,13)$,
- $Q_3Q_4Q_6$ amb $Q_{14}Q_{12}Q_{13}$, mitjançant $w_3(3,10,-16,11)$,
- $Q_4Q_5Q_6$ amb $Q_2v_6Q_1$, mitjançant $w_3(-1,0,1,-1)$,
- $v_6Q_{11}Q_{12}$ amb $Q_{21}Q_{22}Q_{20}$, mitjançant $w_3(4,-10,11,-8)$.

Notem

$$\begin{array}{llll} Q_1^3 = Q_1, & Q_2^3 = Q_2, & Q_3^3 = Q_3 = v_1, & Q_4^3 = v_2, \\ Q_5^3 = Q_{11} = v_3, & Q_6^3 = Q_{12} = v_4, & Q_7^3 = Q_{13}, & Q_8^3 = Q_{14}, \\ Q_9^3 = Q_{16}, & Q_{10}^3 = Q_{17}, & Q_{11}^3 = Q_{18}, & Q_{12}^3 = Q_{22}. \end{array}$$

Amb aquestes notacions tenim el resultat següent.

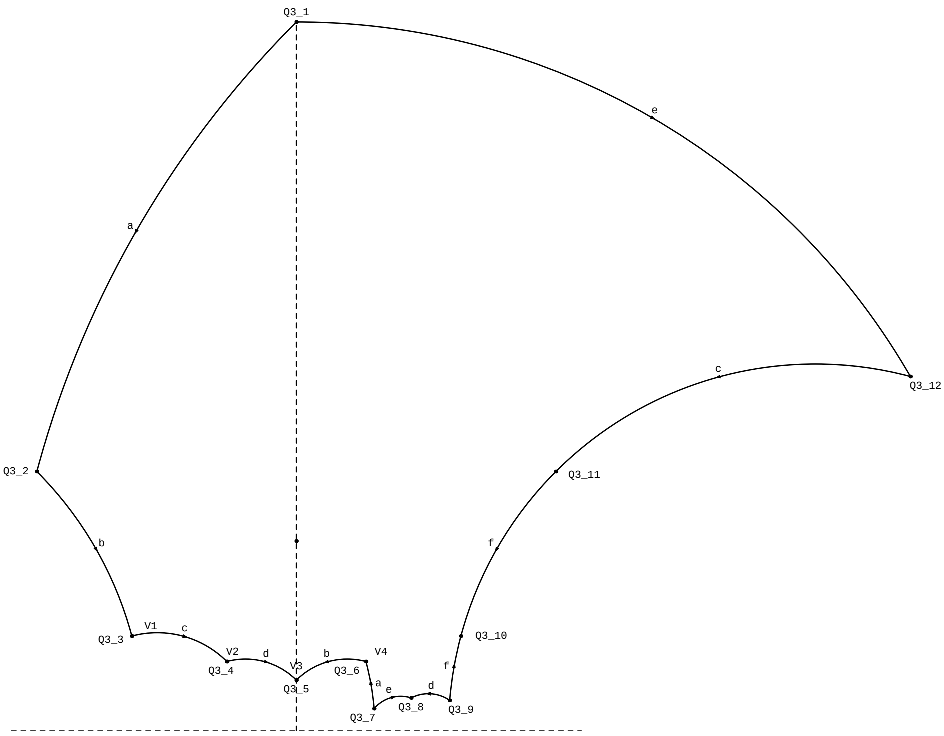

Figura 10: $X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}$

Teorema 12. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs* $\{Q_i^3\}_{i=1}^{12}$ *és un domini fonamental per al grup* $\langle\Gamma(6,5), w_3\rangle$.

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{3\pi/4, 2\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi/2, 4\pi/3, \pi/4, 3\pi/4, \pi/3, \pi, \pi, \pi/4\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π *i el gènere de la corba* $X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}$ *és* 1.

c) Hi ha tres vèrtexs el·líptics, tots ells d'ordre 2, $\{Q_1^3, Q_7^3, Q_{10}^3\}$ *i les transformacions que els fixen són:*

$$\begin{aligned}\gamma_{Q_1^3} &= (1,5,-1,-2),\\ \gamma_{Q_7^3} &= (2,-10,7,-4),\\ \gamma_{Q_{10}^3} &= (0,5,-2,0).\end{aligned}$$

Tots ells provenen de vèrtexs el·líptics de $X(6,5)$.

d) Hi ha dos cicles el·líptics d'ordre 2: $\{Q_1^3, Q_7^3\}$ *i* $\{Q_{10}^3\}$. *Hi ha tres cicles accidentals:* $\{Q_2^3, Q_6^3\}$, $\{Q_3^3, Q_{12}^3, Q_8^3, Q_5^3\}$ *i* $\{Q_4^3, Q_9^3, Q_{11}^3\}$.

e) Les identificacions de costats vénen donades per:

$$
\begin{array}{l}
(Q_1^3 Q_2^3, Q_7^3 Q_6^3) \text{ mitjançant } (-1,0,1,-1), \\
(Q_2^3 Q_3^3, Q_6^3 Q_5^3) \text{ mitjançant } (-1,0,1,-1), \\
(Q_3^3 Q_4^3, Q_{12}^3 Q_{11}^3) \text{ mitjançant } w_3(0,5,-7,5), \\
(Q_4^3 Q_5^3, Q_9^3 Q_8^3) \text{ mitjançant } w_3(-5,15,-18,13), \\
(Q_7^3 Q_8^3, Q_1^3 Q_{12}^3) \text{ mitjançant } (3,5,-1,-1), \\
(Q_9^3 Q_{10}^3, Q_{11}^3 Q_{10}^3) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_{10}^3}.
\end{array}
$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$
\begin{array}{l}
[(3,5,-1,-1)(-1,0,1,-1)]^2 = 1, \\
\gamma_{Q_{10}^3}^2 = 1, \\
[w_3(0,5,-7,5)]^{-1}(3,5,-1,-1)w_3(-5,15,-18,13)(-1,0,1,-1) = 1, \\
[w_3(-5,15,-18,13)]^{-1}\gamma_{Q_{10}^3} w_3(0,5,-7,5) = 1.
\end{array}
$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_3 \rangle$.

□

Aquest domini no és convex, però a partir d'ell, movent el triangle $Q_6^3 Q_7^3 Q_8^3$ mitjançant $(1,0,-1,1)^{-1}$ i notant $X^* = (1,0,-1,1)^{-1} X$ per a $X \in \mathcal{H}$, obtenim un domini fonamental que és convex i que representem en la figura 11. En aquest domini es pot prescindir dels vèrtexs Q_6^3 i Q_2^3; és, per tant, un polígon hiperbòlic de 10 vèrtexs.

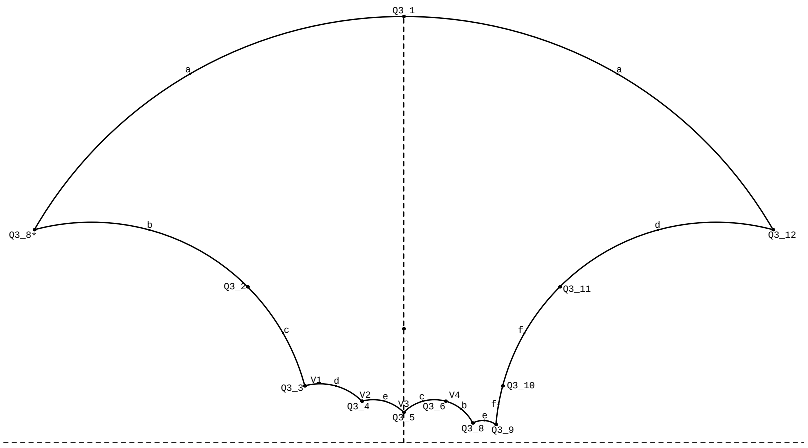

Figura 11: $X(6,5)^{\langle \omega_3 \rangle}$

3.2.3 Estudi de $X(6,5)^{\langle\omega_5\rangle}$

En aquest cas, el càlcul per tal de trobar les regions identificades resulta considerablement més llarg per la quantitat de regions que cal distingir. Aquesta complicació és conseqüència del fet que w_5 no normalitza $\Gamma(6,1)$ i, per tant, les regions transformades no s'adapten bé a les regions que nosaltres havíem enganxat per a construir el domini de $\Gamma(6,5)$ a partir del que teníem per a $\Gamma(6,1)$.

En aquest cas, per poder estudiar l'acció de ω_5 en $X(6,5)$ ens convindrà introduir uns quants punts auxiliars que ens facilitaran la notació:

$$\begin{array}{lll}
A_1 = \dfrac{-13+5i}{13+11\sqrt{3}}, & A_2 = \dfrac{-6+5\sqrt{3}i}{6+7\sqrt{3}}, & A_3 = \dfrac{1+5i}{-1+3\sqrt{3}}, \\
A_4 = \dfrac{4\sqrt{3}+5i}{11-4\sqrt{3}}, & A_5 = \dfrac{13+5i}{7+9\sqrt{3}}, & A_6 = \dfrac{11\sqrt{3}+5i}{34-16\sqrt{3}}, \\
A_7 = \dfrac{-51+\sqrt{57}i}{15+31\sqrt{3}}, & A_8 = \dfrac{-96+\sqrt{138}i}{33+59\sqrt{3}}, & A_9 = \dfrac{-36+\sqrt{138}i}{33+29\sqrt{3}}, \\
A_{10} = \dfrac{-27+\sqrt{57}i}{33+25\sqrt{3}}, & A_{11} = \dfrac{-51+\sqrt{138}i}{69+50\sqrt{3}}, & A_{12} = \dfrac{16\sqrt{3}+5i}{29+4\sqrt{3}}, \\
A_{13} = \dfrac{27+\sqrt{57}i}{-33+25\sqrt{3}}, & A_{14} = \dfrac{57+\sqrt{138}i}{-84+59\sqrt{3}}, & A_{15} = \dfrac{39+\sqrt{57}i}{-63+43\sqrt{3}};
\end{array}$$

que podem situar sobre el domini de $\Gamma(6,5)$ tal com segueix:

- A_1, A_2, A_3, A_4 estan sobre la recta hiperbòlica Q_7Q_{19} en l'ordre següent: $Q_7, A_1, v_2, A_2, v_6, A_3, Q_{18}, A_4, Q_{19}$;
- A_5 està en el segment hiperbòlic delimitat per Q_{12}, Q_{14};
- A_6 està en el segment hiperbòlic delimitat per Q_{20}, Q_{22};
- la resta de punts estan sobre la frontera del domini en l'ordre següent: $Q_4, A_7, Q_5, A_8, Q_6, A_9, Q_7, A_{10}, A_{11}, Q_8, Q_{15}, A_{12}, Q_{16}, Q_{18}, A_4, Q_{19}, A_{13}, Q_{20}, A_{14}, A_{15}, Q_{21}$.

Aleshores, $w_5\Gamma(6,5)$ identifica

- $Q_1Q_2Q_3Q_4A_7A_8Q_6A_2A_3Q_{17}Q_{18}A_4A_6Q_{22}$ amb $Q_{17}A_3A_2A_1A_{10}A_{11}Q_{10}Q_{11}Q_{12}Q_{13}A_5Q_{14}Q_{15}A_{12}$ mitjançant w_5,
- $Q_{13}Q_{14}A_5$ amb $Q_{17}A_{12}Q_{16}$ mitjançant $w_5(-3,-5,1,1)$,
- $Q_{21}Q_{22}A_6A_{15}$ amb $A_6A_4Q_{19}A_{13}$ mitjançant $w_5(-1,-5,1,2)$,
- $Q_6A_9A_1A_2$ amb $Q_{10}A_{11}Q_8Q_9$ mitjançant $w_5(1,-5,5,-2)$.
- $A_6A_{14}A_{15}$ amb $Q_5A_8A_7$ mitjançant $w_5(16,15,0,-12)$.

- $Q_{20}A_{14}A_6A_{13}$ amb $A_1A_9Q_7A_{10}$ mitjançant $w_5(9,5,1,-6)$.

Notem

$$\begin{array}{llll}
Q_1^5 = Q_7, & Q_2^5 = \dfrac{-18+\sqrt{3}i}{21+16\sqrt{3}}, & Q_3^5 = \dfrac{-48+5\sqrt{3}i}{63+46\sqrt{3}}, & Q_4^5 = Q_8, \\
Q_5^5 = Q_9, & Q_6^5 = Q_{10}, & Q_7^5 = Q_{11}, & Q_8^5 = Q_{12}, \\
Q_9^5 = A_5, & Q_{10}^5 = Q_{14}, & Q_{11}^5 = Q_{15}, & Q_{12}^5 = A_{12}, \\
Q_{13}^5 = Q_{16}, & Q_{14}^5 = Q_{17}, & Q_{15}^5 = Q_{18}, & Q_{16}^5 = A_3, \\
Q_{17}^5 = A_2, & Q_{18}^5 = A_1. & &
\end{array}$$

Amb aquestes notacions tenim el resultat següent.

Teorema 13. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{Q_i^5\}_{i=1}^{18}$ és un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_5\rangle$.*

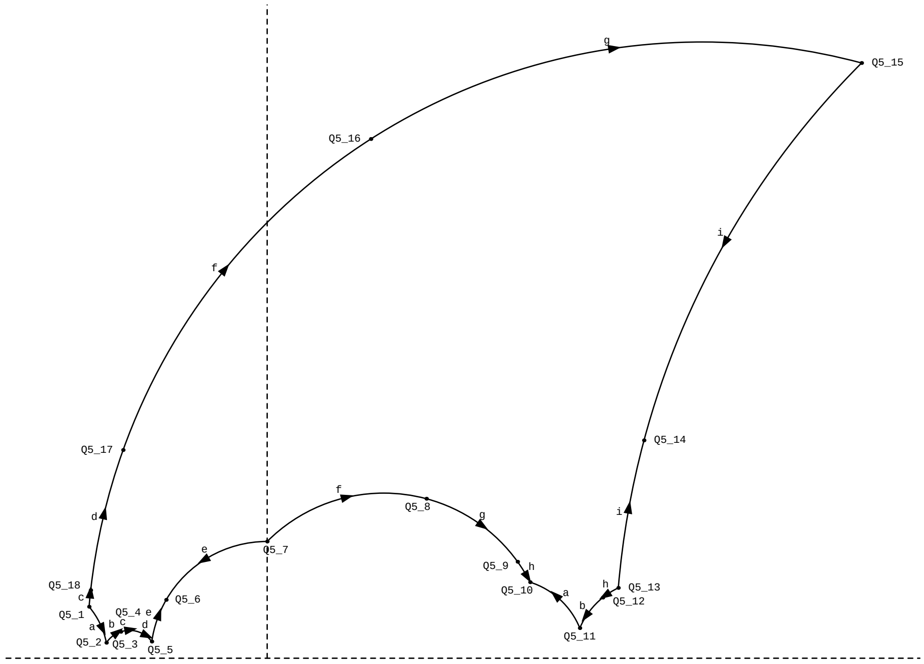

Figura 12: $X(6,5)^{\langle\omega_5\rangle}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament, $\{3\pi/4, \pi/4, \pi, \pi, \pi/4, \pi, 3\pi/4, \pi, \pi, 3\pi/4, \pi/4, \pi, 2\pi/3, \pi, \pi/3, \pi, \pi, \pi\}$.

b) El seu volum hiperbòlic és de 2π i el gènere de $X(6,5)^{\langle\omega_5\rangle}$ és 1.

c) Hi ha dos vèrtexs el·líptics d'ordre 2, Q_6^5 i Q_{14}^5, i les transformacions que els fixen són:

$$\gamma_{Q_6^5} = (2,-5,6,-4), \quad \gamma_{Q_{14}^5} = (0,5,-2,0).$$

d) Hi ha dos cicles el·líptics d'ordre 2: $\{Q_6^5\}$ i $\{Q_{14}^5\}$; i sis cicles accidentals: $\{Q_4^5, Q_{18}^5\}$, $\{Q_8^5, Q_{16}^5\}$, $\{Q_1^5, Q_{11}^5, Q_3^5\}$, $\{Q_2^5, Q_{10}^5, Q_{12}^5\}$, $\{Q_5^5, Q_{17}^5, Q_7^5\}$ i $\{Q_9^5, Q_{13}^5, Q_{15}^5\}$.

e) Les identificacions de costats vénen donades per:

$(Q_1^5Q_2^5, Q_{11}^5Q_{10}^5)$ *mitjançant* $(2,5,-8,8)$,
$(Q_2^5Q_3^5, Q_{12}^5Q_{11}^5)$ *mitjançant* $w_5(-5,0,2,-5)$,
$(Q_3^5Q_4^5Q_5^5, Q_1^5Q_{18}^5Q_{17}^5)$ *mitjançant* $w_5(-4,5,-6,3)$,
$(Q_5^5Q_6^5, Q_7^5Q_6^5)$ *mitjançant* $\gamma_{Q_6^5}$,
$(Q_7^5Q_8^5Q_9^5, Q_{17}^5Q_{16}^5Q_{15}^5)$ *mitjançant* $w_5^{-1} = w_5(2,0,1,-1)$,
$(Q_9^5Q_{10}^5, Q_{13}^5Q_{12}^5)$ *mitjançant* $w_5(-3,-5,1,1)$,
$(Q_{13}^5Q_{14}^5, Q_{15}^5Q_{14}^5)$ *mitjançant* $\gamma_{Q_{14}^5}$.

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris no trivials són:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{Q_6^5}^2 = \gamma_{Q_{14}^5}^2 = 1,\\
&[w_5(-4,5,-6,3)]\,[w_5(-5,0,2,-5)]^{-1}\,(2,5,-8,8) = 1,\\
&[w_5(-5,0,2,-5)]^{-1}\,[w_5(-3,-5,1,1)]\,(2,5,-8,8) = 1,\\
&\gamma_{Q_6^5}\,[w_5(2,0,1,-1)]^{-1}\,w_5(-4,5,-6,3) = 1,\\
&[w_5(2,0,1,-1)]^{-1}\,\gamma_{Q_{14}^5}\,w_5(-3,-5,1,1) = 1.
\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_5\rangle$.

□

Observació. • El domini que donem en el teorema és

$$Q_7Q_8Q_9Q_{10}Q_1Q_{12}Q_{14}Q_{15}Q_{16}Q_{17} \cup (-5,0,2,-5)^{-1}(Q_{20}Q_{21}Q_{22}).$$

Si no consideréssim l'acció de $(-5,0,2,-5)^{-1}$ sobre $Q_{20}Q_{21}Q_{22}$ obtindríem una regió fonamental no connexa reunió dels dos polígons

$$\begin{matrix} Q_7Q_8Q_9Q_{10}Q_1Q_{12}Q_{14}Q_{15}Q_{16}Q_{17} \\ Q_{20}Q_{21}Q_{22} \end{matrix}.$$

• En aquest polígon hi ha uns quants vèrtexs dels quals podem prescindir: $Q_{18}^5, Q_4^5, Q_8^5, Q_{16}^5$; ja que el segment hiperbòlic $Q_3^5Q_4^5Q_5^5$ s'identifica tot ell amb el segment $Q_1^5Q_{18}^5Q_{17}^5$ i per tant podem prescindir dels vèrtexs Q_{18}^5 i Q_4^5. El mateix argument serveix per als altres dos vèrtexs.

3.2.4 Estudi de $X(6,5)^{\langle\omega_6\rangle}$

Com que $w_6 = w_3^{-1}w_2$, l'acció de ω_6 s'obté a partir de les de ω_2, ω_3. $w_6\Gamma(6,5)$ identifica:

- $Q_1Q_2v_2v_6Q_{18}Q_{22}$ amb $Q_6v_2Q_2Q_3Q_4Q_5$ mitjançant $w_6(1,0,-1,1)$,
- $v_2Q_{12}Q_{13}Q_{14}Q_{16}Q_{17}v_6$ amb $Q_{12}v_2Q_6Q_7Q_8Q_{10}Q_{11}$ mitjançant w_6,
- $v_6Q_{17}Q_{18}$ amb $Q_9Q_{10}Q_8$ mitjançant $w_6(0,-5,2,0)$,
- $Q_{14}Q_{15}Q_{16}$ amb $Q_{21}Q_{22}Q_{20}$ mitjançant $w_6(-13,15,-14,11)$,
- $Q_{18}Q_{19}Q_{20}Q_{22}$ amb $Q_{20}Q_{22}Q_{18}Q_{19}$ mitjançant $w_6(8,-5,3,-3)$.

Notem

$$\begin{array}{llll}
Q_1^6 = Q_1, & Q_2^6 = Q_2, & Q_3^6 = \dfrac{-\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{3}, & Q_4^6 = v_2, \\
Q_5^6 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i, & Q_6^6 = Q_{12} = v_4, & Q_7^6 = Q_{13}, & Q_8^6 = Q_{14}, \\
Q_9^6 = \dfrac{8+\sqrt{2}i}{3+5\sqrt{3}}, & Q_{10}^6 = Q_{15}, & Q_{11}^6 = Q_{16}, & Q_{12}^6 = Q_{17}, \\
Q_{13}^6 = Q_{18}, & Q_{14}^6 = Q_{19}, & Q_{15}^6 = \dfrac{3+\sqrt{2}i}{-4+3\sqrt{3}}, & Q_{16}^6 = Q_{22}.
\end{array}$$

Amb aquestes notacions tenim el resultat següent.

Teorema 14. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{Q_i^6\}_{i=1}^{16}$ és un domini fonamental per al grup $\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle$.*

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{3\pi/4, \pi/2, \pi, \pi/3, \pi, 7\pi/6, \pi/4, \pi, \pi, \pi/4, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, \pi/4, \pi, \pi/2\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π i el gènere de $X(6,5)^{\langle\omega_6\rangle}$ és 0.

c) Hi ha 7 vèrtexs el·líptics, $\{Q_1^6, Q_3^6, Q_5^6, Q_7^6, Q_9^6, Q_{12}^6, Q_{15}^6\}$, tots ells d'ordre 2 i les transformacions que els fixen són:

$$\begin{array}{ll}
\gamma_{Q_1^6} = (1,5,-1,-2), & \gamma_{Q_3^6} = w_6(1,0,-1,1), \\
\gamma_{Q_5^6} = w_6, & \gamma_{Q_7^6} = (2,-10,7,-4), \\
\gamma_{Q_9^6} = w_6(-10,5,-8,8), & \gamma_{Q_{12}^6} = (0,5,-2,0), \\
\gamma_{Q_{15}^6} = w_6(8,-5,3,-3). &
\end{array}$$

d) Hi ha 6 cicles el·líptics: $\{Q_1^6, Q_7^6\}$, $\{Q_3^6\}$, $\{Q_5^6\}$, $\{Q_9^6\}$, $\{Q_{12}^6\}$ i $\{Q_{15}^6\}$. Hi ha tres cicles accidentals: $\{Q_2^6, Q_4^6, Q_6^6\}$, $\{Q_8^6, Q_{10}^6, Q_{14}^6, Q_{16}^6\}$ i $\{Q_{11}^6, Q_{13}^6\}$.

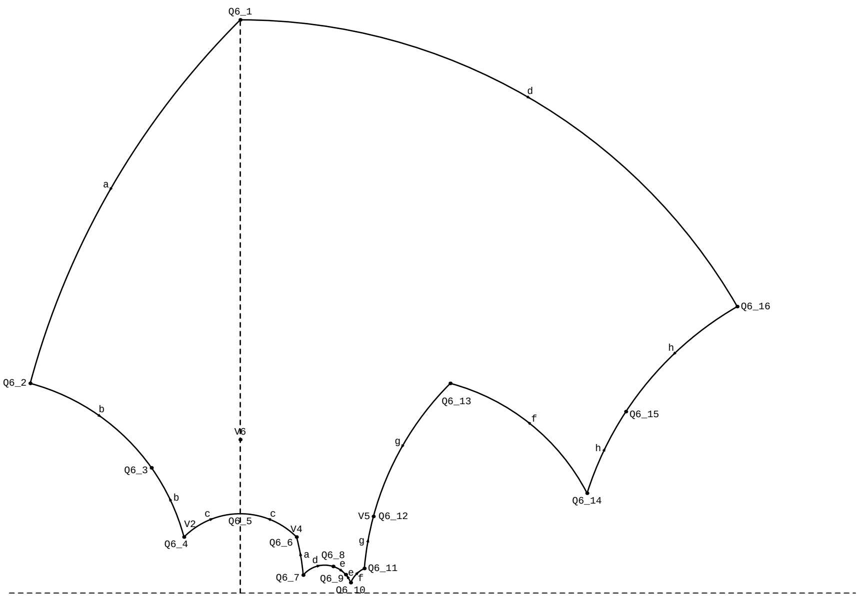

Figura 13: $X(6,5)^{\langle \omega_6 \rangle}$

e) Les identificacions de costats vénen donades per:

$$\begin{array}{l}
(Q_1^6Q_2^6, Q_7^6Q_6^6) \textit{ mitjançant } (-1,0,1,-1),\\
(Q_2^6Q_3^6, Q_4^6Q_3^3) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_3^6},\\
(Q_4^6Q_5^6, Q_6^6Q_5^6) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_5^6},\\
(Q_7^6Q_8^6, Q_1^6Q_{16}^6) \textit{ mitjançant } (3,5,-1,-1),\\
(Q_8^6Q_9^6, Q_{10}^6Q_9^6) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_9^6},\\
(Q_{10}^6Q_{11}^6, Q_{14}^6Q_{13}^6) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_{12}^6},\\
(Q_{11}^6Q_{12}^6, Q_{13}^6Q_{12}^6) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_{12}^6},\\
(Q_{14}^6Q_{15}^6, Q_{16}^6Q_{15}^6) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_{15}^6}.
\end{array}$$

f) Les relacions no trivials donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l}
\gamma_{Q_3^6}^2 = \gamma_{Q_5^6}^2 = \gamma_{Q_9^6}^2 = \gamma_{Q_{12}^6}^2 = \gamma_{Q_{15}^6}^2 = 1,\\
[(3,5,-1,-1)(-1,0,1,-1)]^2 = 1,\\
\gamma_{Q_3^6}\gamma_{Q_5^6}(-1,0,1,-1) = 1,\\
(3,5,-1,-1)^{-1}\gamma_{Q_{15}^6}\gamma_{Q_{12}^6}\gamma_{Q_9^6} = 1.
\end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_6 \rangle$.

$\square$

De la mateixa manera que passava amb el domini de $\Gamma(6,5)$ aquest domini que acabem de trobar no és convex i tampoc no se li veu cap simetria de manera fàcil. Per això, igual que vàrem fer per al domini de $\Gamma(6,5)$ estudiarem el nou domini que obtenim transportant el polígon $Q_6^6Q_7^6Q_8^6Q_9^6Q_{10}^6Q_{11}^6Q_{12}^6$ mitjançant $(0,5,-2,0)$. Notarem $X' = (0,5,-2,0)X$ per a $X \in \mathcal{H}$.

Teorema 15. *El polígon hiperbòlic* $Q_1^6Q_2^6Q_3^6Q_4^6Q_5^6Q_6^6Q_{12}^6Q_6^{6'}Q_7^{6'}Q_8^{6'}Q_9^{6'}Q_{14}^6$ $Q_{15}^6Q_{16}^6$*, que té* 14 *vèrtexs és un domini fonamental per al grup* $\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle$.

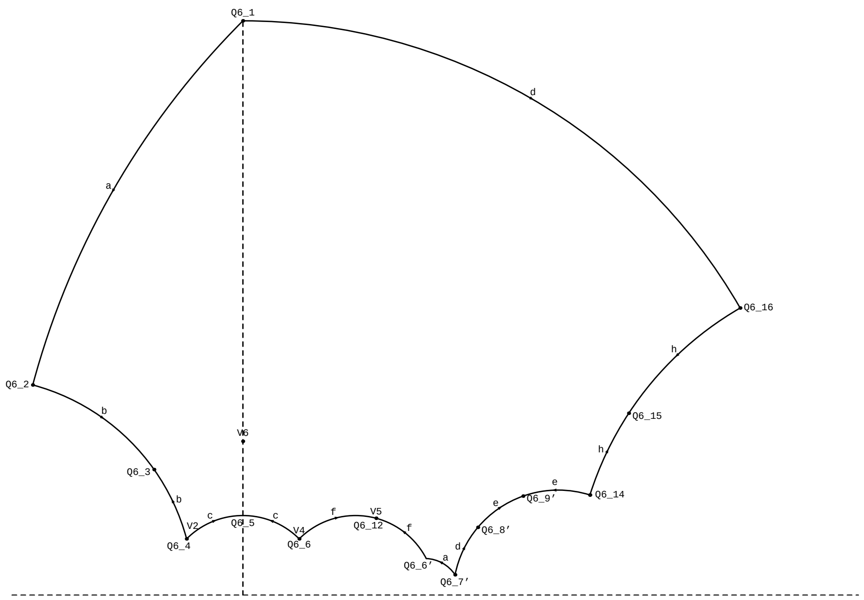

Figura 14: $X(6,5)^{\langle\omega_6\rangle}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{3\pi/4, \pi/2, \pi, \pi/3, \pi, \pi/2, \pi, 2\pi/3, \pi/4, \pi, \pi, \pi/2, \pi, \pi/2\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π *i el gènere de* $X(6,5)^{\langle\omega_6\rangle}$ *és* 0.

c) Hi ha 7 *vèrtexs el·líptics,* $\{Q_1^6, Q_3^6, Q_5^6, Q_{12}^6, Q_7^{6'}, Q_9^{6'}, Q_{15}^6\}$*, tots ells d'ordre* 2 *i les transformacions que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll}
\gamma_{Q_1^6} = (1,5,-1,-2), & \gamma_{Q_3^6} = w_6(1,0,-1,1), \\
\gamma_{Q_5^6} = w_6, & \gamma_{Q_{12}^6} = (0,5,-2,0), \\
\gamma_{Q_7^{6'}} = (2,30,-9,-4), & \gamma_{Q_9^{6'}} = w_6(8,-5,4,-4), \\
\gamma_{Q_{15}^6} = w_6(8,-5,3,-3). &
\end{array}$$

d) Hi ha 6 *cicles el·líptics:* $\{Q_1^6, Q_7^{6'}\}$, $\{Q_3^6\}$, $\{Q_5^6\}$, $\{Q_{12}^6\}$, $\{Q_9^{6'}\}$ *i* $\{Q_{15}^6\}$. *Hi ha dos cicles accidentals:* $\{Q_2^6, Q_4^6, Q_6^6, Q_6^{6'}\}$, $\{Q_8^{6'}, Q_{14}^6, Q_{16}^6\}$.

e) Les identificacions de costats vénen donades per:

$$\begin{array}{l}
(Q_1^6 Q_2^6, Q_7^{6'} Q_6^{6'}) \textit{ mitjançant } (1,-5,0,3),\\
(Q_2^6 Q_3^6, Q_4^6 Q_3^3) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_3^6},\\
(Q_4^6 Q_5^6, Q_6^6 Q_5^6) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_5^6},\\
(Q_6^6 Q_{12}^6, Q_6^{6'} Q_{12}^6) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_{12}^6},\\
(Q_7^{6'} Q_8^{6'}, Q_1^6 Q_{16}^6) \textit{ mitjançant } (3,10,-2,-3),\\
(Q_8^{6'} Q_9^{6'}, Q_{14}^6 Q_9^{6'}) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_9^{6'}},\\
(Q_{14}^6 Q_{15}^6, Q_{16}^6 Q_{15}^6) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_{15}^6}.
\end{array}$$

f) Les relacions no trivials donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l}
\gamma_{Q_3^6}^2 = \gamma_{Q_5^6}^2 = \gamma_{Q_{12}^6}^2 = \gamma_{Q_9^{6'}}^2 = \gamma_{Q_{15}^6}^2 = 1,\\
[(3,10,-2,-3)(1,-5,0,3)]^2 = 1,\\
\gamma_{Q_3^6}\gamma_{Q_5^6}\gamma_{Q_{12}^6}(1,-5,0,3) = 1,\\
\gamma_{Q_9^{6'}}\gamma_{Q_{15}^6}(3,10,-2,-3) = 1.
\end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_6\rangle$.

h) La línia polígonal tancada formada pels segments hiperbòlics $Q_1^6 Q_3^6$, $Q_3^6 Q_5^6$, $Q_5^6 Q_{12}^6$, $Q_{12}^6 Q_9^{6'}$, $Q_9^{6'} Q_{15}^6$ *i* $Q_{15}^6 Q_1^6$ *és un eix de simetria d'aquest domini fonamental.*

□

Ara tornarem a plegar els dominis que ja hem trobat. Per poder fer això només cal adonar-se que tots els w_j que hem calculat abans normalitzen $\langle \Gamma(6,5), w_k\rangle$ i aleshores haurem d'estudiar els grups $\langle \Gamma(6,5), w_k, w_j\rangle$. Seguint la mateixa notació que ja hem emprat anteriorment, notarem

$$X(6,5)^{\langle \omega_k, \omega_j\rangle} := \langle \Gamma(6,5), \omega_k, \omega_j\rangle \backslash \mathcal{H}.$$

3.2.5 Estudi de $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3\rangle} = X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_6\rangle} = X(6,5)^{\langle \omega_3, \omega_6\rangle}$

Podem partir de qualsevol dels dominis que ja hem calculat de $\langle \Gamma(6,5), w_2\rangle$, $\langle \Gamma(6,5), w_3\rangle$ o $\langle \Gamma(6,5), w_6\rangle$ i veure com actua l'altra transformació que afegim al grup sobre aquest. Nosaltres fixarem el domini de $\langle \Gamma(6,5), w_6\rangle$ que ens dóna el teorema 14 i la transformació w_2.

En aquesta situació, $w_2\langle \Gamma(6,5), w_6\rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle \Gamma(6,5), w_6\rangle$ identificant:

- $Q_1^6 Q_{13}^6 Q_{15}^6 Q_{16}^6$ amb $Q_1^6 Q_2^6 Q_3^6 v_6$ mitjançant w_2,
- $Q_{13}^6 Q_{14}^6 Q_{15}^6$ amb $Q_4^6 v_6 Q_3^6$ mitjançant $w_6 w_2(3, 10, -2, -3)$,
- $Q_{12}^6 Q_{11}^6 Q_9^6 Q_8^6 Q_7^6 Q_6^6$ amb $Q_{12}^6 Q_6^6 Q_5^6 v_6 Q_1^6 Q_{13}^6$ mitjançant $w_2(3, 5, -1, -1)$,
- $Q_{11}^6 Q_{10}^6 Q_9^6$ amb $Q_4^6 v_6 Q_5^6$ mitjançant $w_6 w_2(3, 5, -1, -1)$.

Notem

$$\begin{array}{llll} Q_1^{2,6} = Q_1^6, & Q_2^{2,6} = Q_2^6, & Q_3^{2,6} = Q_3^6, & Q_4^{2,6} = Q_4^6 = v_2, \\ Q_5^{2,6} = Q_5^6, & Q_6^{2,6} = Q_6^6 = v_4, & Q_7^{2,6} = Q_{12}^6 = v_5, & Q_8^{2,6} = Q_{13}^6. \end{array}$$

Amb aquestes notacions tenim el resultat següent.

Teorema 16. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{Q_i^{2,6}\}_{i=1}^8$ és un domini fonamental per al grup $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_6 \rangle$.*

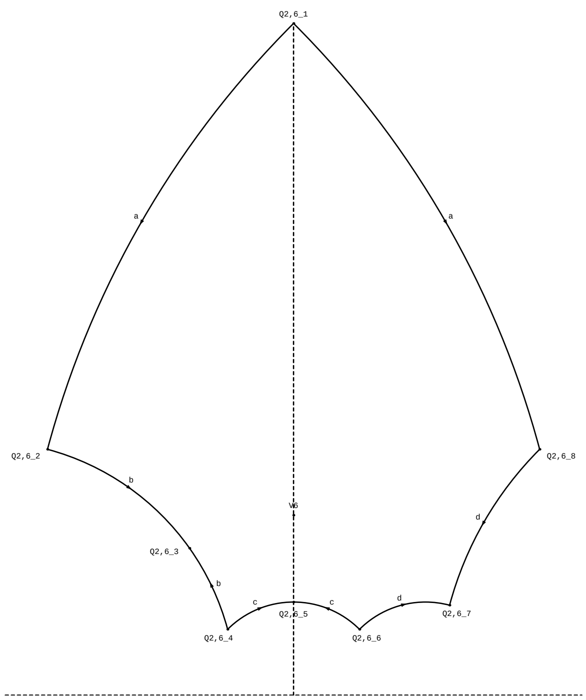

Figura 15: $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_6 \rangle}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/2, \pi/2, \pi, \pi/3, \pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi/3\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és π *i el gènere de* $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_6\rangle}$ *és* 0.

c) Hi ha 2 *vèrtexs el·líptics d'ordre* 2, $\{Q_3^{2,6}, Q_5^{2,6}\}$ *i* 2 *vèrtexs el·líptics d'ordre* 4, $\{Q_1^{2,6}, Q_7^{2,6}\}$. *Les transformacions que els fixen són:*

$$\begin{aligned} \gamma_{Q_1^{2,6}} &= w_2, \quad \gamma_{Q_3^{2,6}} = w_6(1,0,-1,1), \\ \gamma_{Q_5^{2,6}} &= w_6, \quad \gamma_{Q_7^{2,6}} = w_2(3,5,-1,-1). \end{aligned}$$

i a més $\gamma_{Q_1^{2,6}}(Q_8^{2,6}) = Q_2^{2,6}$ *i* $\gamma_{Q_7^{2,6}}(Q_6^{2,6}) = Q_8^{2,6}$.

d) Hi ha quatre cicles el·líptics ja que cada vèrtexs el·líptic en constitueix un. Hi ha un sol cicle accidental, $\{Q_2^{2,6}, Q_4^{2,6}, Q_6^{2,6}, Q_8^{2,6}\}$.

e) Les identificacions de costats vénen donades per:

$$\begin{aligned} &(Q_1^{2,6}Q_8^{2,6}, Q_1^{2,6}Q_2^{2,6}) \ \textit{mitjançant} \ \gamma_{Q_1^{2,6}}, \\ &(Q_2^{2,6}Q_3^{2,6}, Q_4^{2,6}Q_3^{2,6}) \ \textit{mitjançant} \ \gamma_{Q_3^{2,6}}, \\ &(Q_4^{2,6}Q_5^{2,6}, Q_6^{2,6}Q_5^{2,6}) \ \textit{mitjançant} \ \gamma_{Q_5^{2,6}}, \\ &(Q_6^{2,6}Q_7^{2,6}, Q_8^{2,6}Q_7^{2,6}) \ \textit{mitjançant} \ \gamma_{Q_7^{2,6}}. \end{aligned}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned} &\gamma^4_{Q_1^{2,6}} = \gamma^4_{Q_7^{2,6}} = \gamma^2_{Q_3^{2,6}} = \gamma^2_{Q_5^{2,6}} = 1, \\ &\gamma_{Q_7^{2,6}}\gamma_{Q_5^{2,6}}\gamma_{Q_3^{2,6}}\gamma_{Q_1^{2,6}} = 1. \end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_6\rangle$.

h) La línia poligonal tancada que és unió dels segments hiperbòlics $Q_1^{2,6}Q_3^{2,6}$, $Q_3^{2,6}Q_5^{2,6}$, $Q_5^{2,6}Q_7^{2,6}$ *i* $Q_7^{2,6}Q_1^{2,6}$ *és un eix de simetria del domini fonamental.*

□

3.2.6 Estudi de $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle} = X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_{10}\rangle} = X(6,5)^{\langle\omega_5,\omega_{10}\rangle}$

Fixem el domini de $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$ que ens dóna el teorema 11 i volem plasmar l'acció de w_5 sobre $X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}$ en el domini.

Tenint en compte la notació ja introduïda, l'acció de w_5 identifica:

- $Q_1^2Q_2^2Q_3^2Q_4^2Q_{17}^5Q_{16}^5$ amb $Q_9^2Q_{16}^5Q_{17}^5Q_6^2Q_7^2Q_8^2$ mitjançant w_5,
- $Q_{10}^2Q_{16}^5Q_9^2$ amb $Q_{16}^5Q_{10}^2Q_1^2$ mitjançant $w_2w_5(4,5,0,-3)$,

- $Q_4^2 Q_5^2 Q_{17}^5$ amb $Q_6^2 Q_{17}^5 Q_5^2$ mitjançant $w_2 w_5(6,-5,4,1)$.

Notem

$$Q_1^{2,5} = Q_5^2, \quad Q_2^{2,5} = Q_6^2, \quad Q_3^{2,5} = Q_7^2, \quad Q_4^{2,5} = Q_8^2 = v_4,$$
$$Q_5^{2,5} = Q_9^2 = v_5, \quad Q_6^{2,5} = Q_{10}^2, \quad Q_7^{2,5} = \frac{3+i\sqrt{30}}{-3+4\sqrt{3}}, \quad Q_8^{2,5} = Q_{16}^5$$
$$Q_9^{2,5} = Q_{17}^5, \quad Q_{10}^{2,5} = \frac{-9+i\sqrt{30}}{9+8\sqrt{3}}.$$

Amb aquestes notacions tenim el resultat següent.

Teorema 17. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{Q_i^{2,5}\}_{i=1}^{10}$ és un domini fonamental per al grup $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle$.*

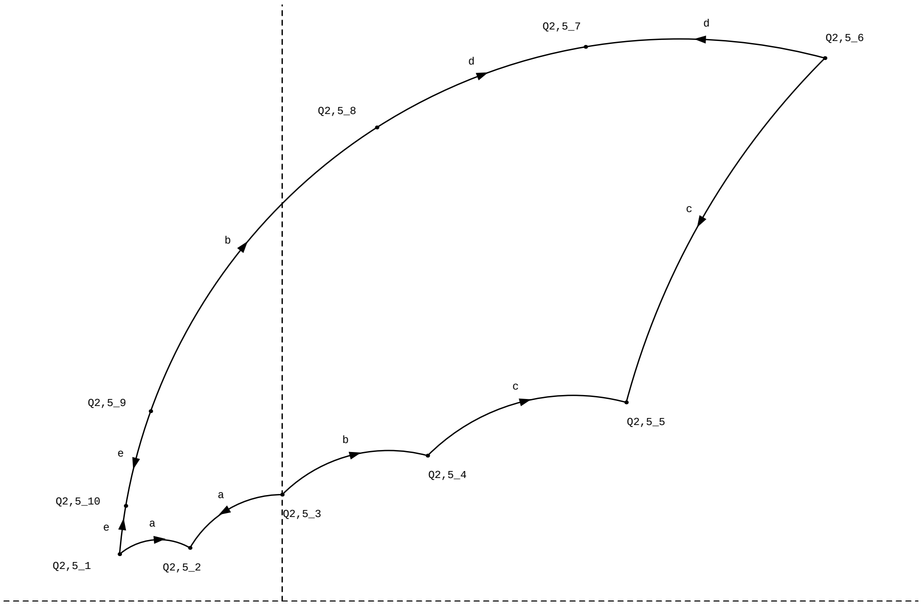

Figura 16: $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, 2\pi/3, \pi/2, \pi/3, \pi, \pi, \pi, \pi\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és π i el gènere de $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}$ és 0.

c) Hi ha 2 vèrtexs el·líptics d'ordre 2, $\{Q_7^{2,5}, Q_{10}^{2,5}\}$, i dos vèrtexs el·líptics d'ordre 4, $\{Q_2^{2,5}, Q_5^{2,5}\}$. Les transformacions que els fixen són:

$$\gamma_{Q_2^{2,5}} = w_2(-5,0,2,-5), \quad \gamma_{Q_5^{2,5}} = w_2(3,5,-1,-1)$$
$$\gamma_{Q_7^{2,5}} = w_2 w_5(4,5,0,-3), \quad \gamma_{Q_{10}^{2,5}} = w_2 w_5(6,-5,4,1).$$

A més, $\gamma_{Q_2^{2,5}}(Q_1^{2,5}) = Q_3^{2,5}$ *i* $\gamma_{Q_5^{2,5}}(Q_4^{2,5}) = Q_6^{2,5}$.

d) Cada vèrtex el·líptic constitueix un cicle el·líptic. Hi ha 2 *cicles accidentals,* $\{Q_1^{2,5}, Q_3^{2,5}, Q_9^{2,5}\}$ *i* $\{Q_4^{2,5}, Q_6^{2,5}, Q_8^{2,5}\}$.

e) Les identificacions de costats vénen donades per

$$\begin{array}{l} (Q_1^{2,5}Q_2^{2,5}, Q_3^{2,5}Q_2^{2,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_2^{2,5}}, \\ (Q_3^{2,5}Q_4^{2,5}, Q_9^{2,5}Q_8^{2,5}) \text{ mitjançant } w_5^{-1}, \\ (Q_4^{2,5}Q_5^{2,5}, Q_6^{2,5}Q_5^{2,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_5^{2,5}}, \\ (Q_6^{2,5}Q_7^{2,5}, Q_8^{2,5}Q_7^{2,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_7^{2,5}}, \\ (Q_9^{2,5}Q_{10}^{2,5}, Q_1^{2,5}Q_{10}^{2,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_{10}^{2,5}}. \end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l} \gamma^4_{Q_2^{2,5}} = \gamma^4_{Q_5^{2,5}} = \gamma^2_{Q_7^{2,5}} = \gamma^2_{Q_{10}^{2,5}} = 1, \\ \gamma_{Q_{10}^{2,5}} w_5^{-1} \gamma_{Q_2^{2,5}} = 1, \\ w_5 \gamma_{Q_7^{2,5}} \gamma_{Q_5^{2,5}} = 1. \end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_5 \rangle$.

h) La línia poligonal que és unió dels segments hiperbòlics $Q_{10}^{2,5}Q_2^{2,5}$, $Q_2^{2,5}Q_5^{2,5}$ *i* $Q_5^{2,5}Q_7^{2,5}$ *és un eix de simetria del domini fonamental.*

□

A partir d'aquest domini, o directament a partir de l'acció de w_5 sobre el domini és molt fàcil trobar un altre domini més senzill que aquest que acabem de trobar.

Notem

$$\begin{array}{lll} Q2_1^{2,5} = Q_4^2, & Q2_2^{2,5} = Q_{10}^{2,5}, & Q2_3^{2,5} = Q_6^2, \\ Q2_4^{2,5} = Q_9^2, & Q2_5^{2,5} = Q_7^{2,5}, & Q2_6^{2,5} = Q_1^2. \end{array}$$

Teorema 18. *L'hexàgon hiperbòlic de vèrtexs* $\{Q2_i^{2,5}\}_{i=1}^6$ *és un domini fonamental per a* $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_5 \rangle$.

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi, \pi/4, \pi/4, \pi, \pi/4\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és π *i, com ja sabíem, el gènere de* $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_5 \rangle}$ *és* 0.

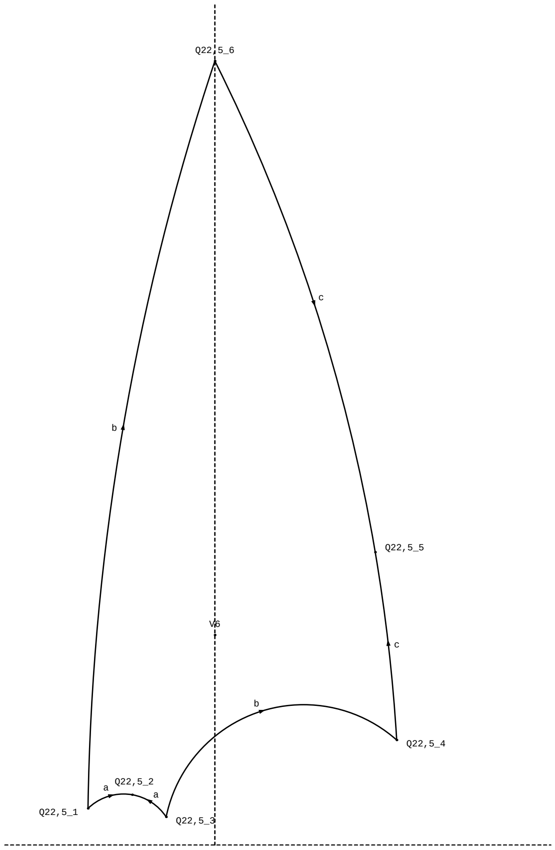

Figura 17: $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}$

c) *Tots els vèrtexs són el·líptics:* $\{Q2_2^{2,5}, Q2_5^{2,5}\}$ *són vèrtexs el·líptics d'ordre* 2 *i* $\{Q2_1^{2,5}, Q2_3^{2,5}, Q2_4^{2,5}, Q2_6^{2,5}\}$ *són el·líptics d'ordre* 4. *Les transformacions que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{Q2_1^{2,5}} = w_2(3,-5,-1,6), & \gamma_{Q2_2^{2,5}} = w_2w_5(6,-5,4,1), \\ \gamma_{Q2_3^{2,5}} = w_2(-5,0,2,-5), & \gamma_{Q2_4^{2,5}} = w_2(3,5,-1,-1), \\ \gamma_{Q2_5^{2,5}} = w_2w_5(4,5,0,-3), & \gamma_{Q2_6^{2,5}} = w_2. \end{array}$$

d) *Hi ha* 4 *cicles el·líptics:* $\{Q2_2^{2,5}\}$ *i* $\{Q2_5^{2,5}\}$ *són cicles el·líptics d'ordre* 2*;* $\{Q2_1^{2,5}, Q2_3^{2,5}\}$ *i* $\{Q2_4^{2,5}, Q2_6^{2,5}\}$ *són cicles el·líptics d'ordre* 4.

e) *Les identificacions de costats vénen donades per:*

$$\begin{array}{l} (Q2_1^{2,5}Q2_2^{2,5}, Q2_3^{2,5}Q2_2^{2,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q2_2^{2,5}}, \\ (Q2_3^{2,5}Q2_4^{2,5}, Q2_1^{2,5}Q2_6^{2,5}) \text{ mitjançant } w_5^{-1} \\ (Q2_4^{2,5}Q2_5^{2,5}, Q2_6^{2,5}Q2_5^{2,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q2_5^{2,5}}. \end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\gamma^2_{Q2^{2,5}_2} = \gamma^2_{Q2^{2,5}_5} = 1,$$
$$\left[w_5^{-1}\gamma_{Q2^{2,5}_2}\right]^4 = 1,$$
$$\left[w_5\gamma_{Q2^{2,5}_5}\right]^4 = 1.$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle$.

h) El segment hiperbòlic $Q2^{2,5}_2 Q2^{2,5}_5$ és un eix de simetria del domini fonamental.

□

3.2.7 Estudi de $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle} = X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{15}\rangle} = X(6,5)^{\langle\omega_5,\omega_{15}\rangle}$

Fixem el domini de $\langle\Gamma(6,5), w_3\rangle$ que ens dóna el teorema 12 i volem plasmar l'acció de w_5 sobre $X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}$ en el domini.

Notem

$$A_{16} = \frac{-9+i\sqrt{57}}{3+7\sqrt{3}}, \quad A_{17} = \frac{-9+\sqrt{138}i}{12+11\sqrt{3}}, \quad A_{18} = \frac{-3+\sqrt{57}i}{9+7\sqrt{3}},$$
$$A_{19} = \frac{36+\sqrt{138}i}{21+25\sqrt{3}}, \quad A_{20} = \frac{27+\sqrt{57}i}{9+17\sqrt{3}}, \quad A_{21} = \frac{51+\sqrt{138}i}{12+31\sqrt{3}},$$
$$A_{22} = \frac{9+\sqrt{57}i}{-15+11\sqrt{3}}, \quad A_{23} = \frac{15+\sqrt{138}i}{-33+22\sqrt{3}}.$$

A més, tots els punts anteriors estan a la frontera del domini fonamental en l'ordre següent: $Q^3_3 A_{16} Q^3_4 A_{17} A_{18} Q^3_5 Q^3_7 A_{19} Q^3_8 A_{20} A_{21} Q^3_9 Q^3_{11} A_{22} Q^3_{12} A_{23}$.

Tenint en compte la notació ja introduïda, $w_5\langle\Gamma(6,5), w_3\rangle$ identifica:

- $Q^3_1 Q^3_2 Q^3_3 A_{16} Q^5_{17} Q^5_{16} Q^3_{10} Q^3_{11} A_{22} A_{23}$ amb $Q^3_{10} Q^5_{16} Q^5_{17} A_{18} Q^3_5 Q^3_6 Q^3_7 Q^5_9 A_{20} A_{21}$ mitjançant w_5,
- $A_{16} Q^3_4 A_{17} Q^5_{17}$ amb $A_{20} Q^5_9 A_{19} Q^3_8$ mitjançant $w_3 w_5(2,-10,12,-7)$,
- $A_{17} A_{18} Q^5_{17}$ amb $A_{23} A_{22} Q^3_{12}$ mitjançant $w_3 w_5(-2,5,-6,4)$,
- $Q^3_7 A_{19} Q^5_9$ amb $Q^3_{10} A_{21} Q^3_9$ mitjançant $w_5(-3,-5,1,1)$.

Notem

$$Q^{3,5}_1 = Q^3_4, \quad Q^{3,5}_2 = Q^3_5, \quad Q^{3,5}_3 = Q^3_6, \quad Q^{3,5}_4 = Q^5_9,$$
$$Q^{3,5}_5 = Q^3_8, \quad Q^{3,5}_6 = Q^3_9, \quad Q^{3,5}_7 = Q^3_{10}, \quad Q^{3,5}_8 = Q^3_{11},$$
$$Q^{3,5}_9 = Q^5_{16}, \quad Q^{3,5}_{10} = Q^5_{17}.$$

Teorema 19. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{Q_i^{3,5}\}_{i=1}^{10}$ és un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_5 \rangle$.*

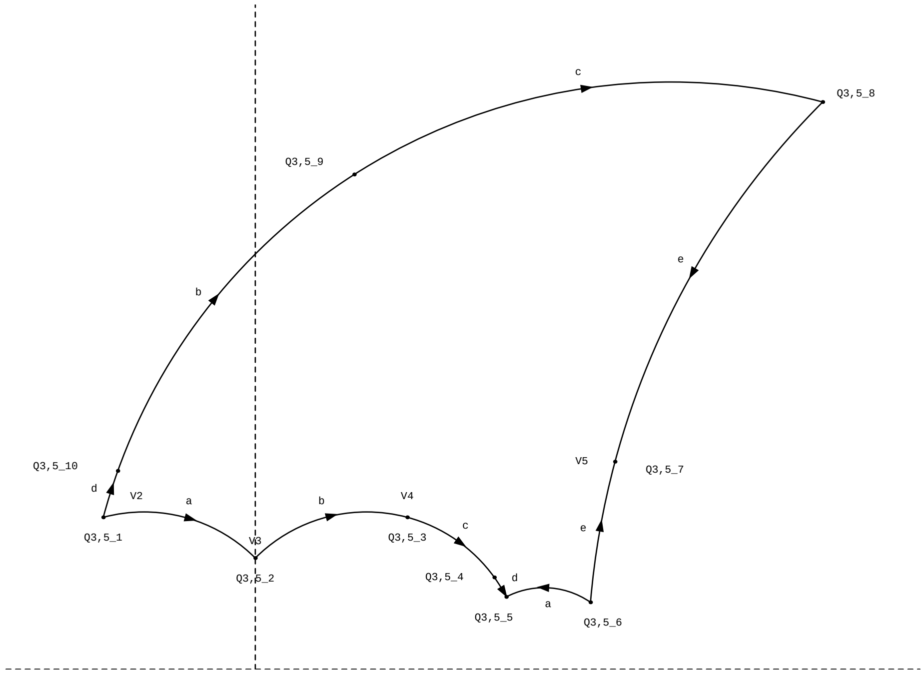

Figura 18: $X(6,5)^{\langle \omega_3, \omega_5 \rangle}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/3, \pi/2, \pi, \pi, \pi/2, \pi/3, \pi, \pi/3, \pi, \pi\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és π i el gènere de $X(6,5)^{\langle \omega_3, \omega_5 \rangle}$ és 1.

c) Hi ha un sol vèrtex el·líptic, $Q_7^{3,5}$, que és d'ordre 2. La transformació que el fixa és:

$$\gamma_{Q_7^{3,5}} = (0, 5, -2, 0).$$

d) Hi ha un sol cicle el·líptic, $\{Q_7^{3,5}\}$, i tres cicles accidentals, $\{Q_1^{3,5}, Q_6^{3,5}, Q_8^{3,5}, Q_4^{3,5}\}$, $\{Q_2^{3,5}, Q_{10}^{3,5}, Q_5^{3,5}\}$ i un de trivial $\{Q_3^{3,5}, Q_9^{3,5}\}$.

e) Les identificacions de costats vénen donades per:

$$(Q_1^{3,5}Q_2^{3,5}, Q_6^{3,5}Q_5^{3,5}) \text{ mitjançant } w_3(-5, 15, -18, 13),$$
$$(Q_2^{3,5}Q_3^{3,5}Q_4^{3,5}, Q_{10}^{3,5}Q_9^{3,5}Q_8^{3,5}) \text{ mitjançant } w_5^{-1},$$
$$(Q_4^{3,5}Q_5^{3,5}, Q_1^{3,5}Q_{10}^{3,5}) \text{ mitjançant } w_3w_5(-10, 5, -8, 8),$$
$$(Q_6^{3,5}Q_7^{3,5}, Q_8^{3,5}Q_7^{3,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_7^{3,5}}.$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned}
&\gamma^2_{Q_7^{3,5}} = 1,\\
&[w_3w_5(-10,5,-8,8)]\, w_5\gamma_{Q_7^{3,5}}\, [w_3(-5,15,-18,13)] = 1,\\
&w_5\, [w_3w_5(-10,5,-8,8)]\, [w_3(-5,15,-18,13)] = 1.
\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle$.

□

3.2.8 Estudi de $X(6,5)^{\langle\omega_6,\omega_5\rangle} = X(6,5)^{\langle\omega_6,\omega_{30}\rangle}$

Fixem el domini de $\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle$ que ens dóna el teorema 14 i volem plasmar l'acció de w_5 sobre $X(6,5)^{\langle\omega_6\rangle}$ en el domini.

$w_5\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle$ identifica:

- $Q^6_1Q^6_2Q^6_3Q^5_{16}Q^6_{12}Q^6_{13}A_4Q^6_{15}Q^6_{16}$ amb $Q^6_{12}Q^5_{16}Q^6_5Q^6_6Q^6_7Q^5_9Q^6_8Q^6_9Q^5_{12}$ mitjançant w_5,
- $Q^6_3Q^6_4Q^6_5Q^5_{16}$ amb $Q^6_5Q^5_{16}Q^6_3Q^6_4$ mitjançant w_6w_5,
- $A_4Q^6_{14}Q^6_{15}$ amb $Q^6_{10}Q^5_{12}Q^6_9$ mitjançant $w_6w_5(9,5,1,-6)$,
- $Q^6_7Q^6_8Q^5_9$ amb $Q^6_{12}Q^5_{12}Q^6_{11}$ mitjançant $w_5(-3,-5,1,1)$.

Notem

$$\begin{aligned}
&Q^{6,5}_1 = Q^6_4, \quad Q^{6,5}_2 = Q^6_5, && Q^{6,5}_3 = Q^6_6, \quad Q^{6,5}_4 = Q^5_9,\\
&Q^{6,5}_5 = Q^6_8, \quad Q^{6,5}_6 = Q^6_9, && Q^{6,5}_7 = Q^6_{10}, \quad Q^{6,5}_8 = \frac{23+\sqrt{10}i}{7+14\sqrt{3}},\\
&Q^{6,5}_9 = Q^5_{12}, \quad Q^{6,5}_{10} = Q^6_{11}, && Q^{6,5}_{11} = Q^6_{12}, \quad Q^{6,5}_{12} = Q^6_{13},\\
&Q^{6,5}_{13} = Q^5_{16}, \quad Q^{6,5}_{14} = \frac{-1+\sqrt{10}i}{1+2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Teorema 20. *El polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{Q^{6,5}_i\}_{i=1}^{14}$ és un domini fonamental per a $\langle\Gamma(6,5), w_6, w_5\rangle$.*

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/6, \pi, 5\pi/6, \pi, 3\pi/4, \pi, \pi/4, \pi, \pi, 2\pi/3, \pi, \pi/3, \pi, \pi\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és π i el gènere de $X(6,5)^{\langle\omega_6,\omega_5\rangle}$ és 0.

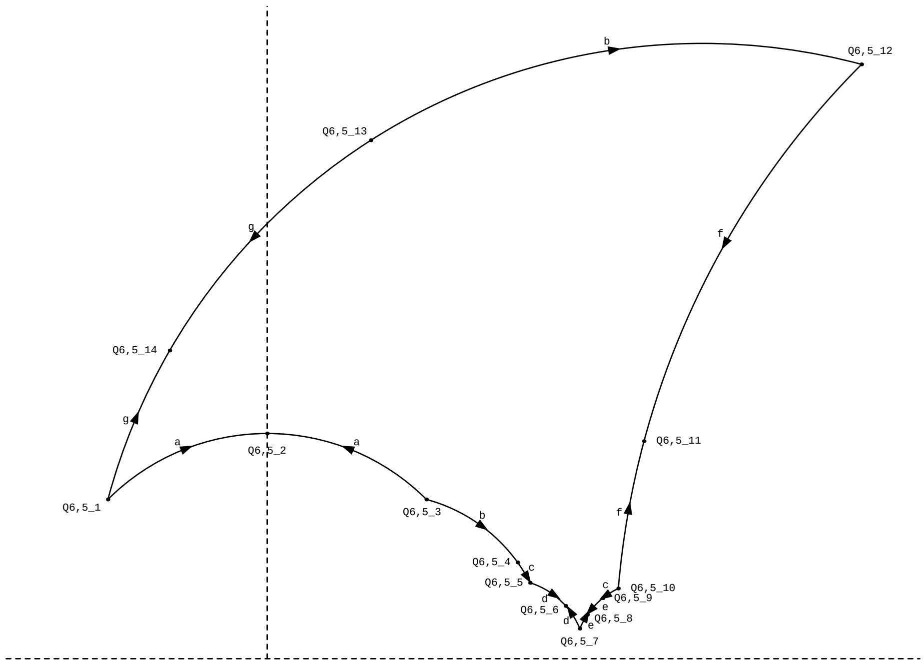

Figura 19: $X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_5 \rangle}$

c) *Hi ha* 5 *vèrtexs el·liptics,* $\{Q_2^{6,5}, Q_6^{6,5}, Q_8^{6,5}, Q_{11}^{6,5}, Q_{14}^{6,5}\}$*, i tots ells són d'ordre* 2*. Les transformacions que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{Q_2^{6,5}} = w_6, & \gamma_{Q_6^{6,5}} = w_6(-10,5,-8,8), \\ \gamma_{Q_8^{6,5}} = w_6 w_5(-16,0,-9,12), & \gamma_{Q_{11}^{6,5}} = (0,5,-2,0), \\ \gamma_{Q_{14}^{6,5}} = w_6 w_5. & \end{array}$$

d) *Hi ha* 5 *cicles el·líptics, cada vèrtex el·líptic en constitueix un, i* 3 *cicles accidentals,* $\{Q_1^{6,5}, Q_3^{6,5}, Q_{13}^{6,5}\}$*,* $\{Q_4^{6,5}, Q_{12}^{6,5}, Q_{10}^{6,5}\}$ *i* $\{Q_5^{6,5}, Q_9^{6,5}, Q_7^{6,5}\}$*.*

e) *Les identificacions de costats vénen donades per:*

$$\begin{array}{l} (Q_1^{6,5}Q_2^{6,5}, Q_3^{6,5}Q_2^{6,5}) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_2^{6,5}}, \\ (Q_3^{6,5}Q_4^{6,5}, Q_{13}^{6,5}Q_{12}^{6,5}) \textit{ mitjançant } w_5^{-1}, \\ (Q_4^{6,5}Q_5^{6,5}, Q_{10}^{6,5}Q_9^{6,5}) \textit{ mitjançant } w_5(-3,-5,1,1), \\ (Q_5^{6,5}Q_6^{6,5}, Q_7^{6,5}Q_6^{6,5}) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_6^{6,5}}, \\ (Q_7^{6,5}Q_8^{6,5}, Q_9^{6,5}Q_8^{6,5}) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_8^{6,5}}, \\ (Q_{10}^{6,5}Q_{11}^{6,5}, Q_{12}^{6,5}Q_{11}^{6,5}) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_{11}^{6,5}}, \\ (Q_{13}^{6,5}Q_{14}^{6,5}, Q_1^{6,5}Q_{14}^{6,5}) \textit{ mitjançant } \gamma_{Q_{14}^{6,5}}. \end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$
\begin{aligned}
&\gamma^2_{Q_2^{6,5}} = \gamma^2_{Q_6^{6,5}} = \gamma^2_{Q_8^{6,5}} = \gamma^2_{Q_{11}^{6,5}} = \gamma^2_{Q_{14}^{6,5}} = 1,\\
&\gamma_{Q_{14}^{6,5}} w_5^{-1} \gamma_{Q_2^{6,5}} = 1,\\
&w_5 \gamma_{Q_{11}^{6,5}} [w_5(-3,-5,1,1)] = 1,\\
&[w_5(-3,-5,1,1)]^{-1} \gamma_{Q_8^{6,5}} \gamma_{Q_6^{6,5}} = 1.
\end{aligned}
$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_6, w_5 \rangle$.

$\square$

Com passava amb el domini de $\langle \Gamma(6,5), w_6 \rangle$ a aquest domini que acabem de trobar no se li veu cap simetria de manera fàcil. Per això, igual que vàrem fer per al domini de $\Gamma(6,5)$ estudiarem el nou domini que obtenim transportant el polígon $Q_3^{6,5}Q_4^{6,5}Q_5^{6,5}Q_6^{6,5}Q_7^{6,5}Q_8^{6,5}Q_9^{6,5}Q_{10}^{6,5}Q_{11}^{6,5}$ mitjançant $(0,5,-2,0)$. Notarem $X' = (0,5,-2,0)X$ per a $X \in \mathcal{H}$.

Teorema 21. *El polígon hiperbòlic $Q_1^{6,5}Q_2^{6,5}Q_3^{6,5}Q_{11}^{6,5}Q_3^{6,5'}Q_4^{6,5'}Q_5^{6,5'}Q_6^{6,5'}Q_7^{6,5'}Q_8^{6,5'}Q_9^{6,5'}Q_{12}^{6,5}Q_{13}^{6,5}Q_{14}^{6,5}$ és un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_6, w_5 \rangle$.*

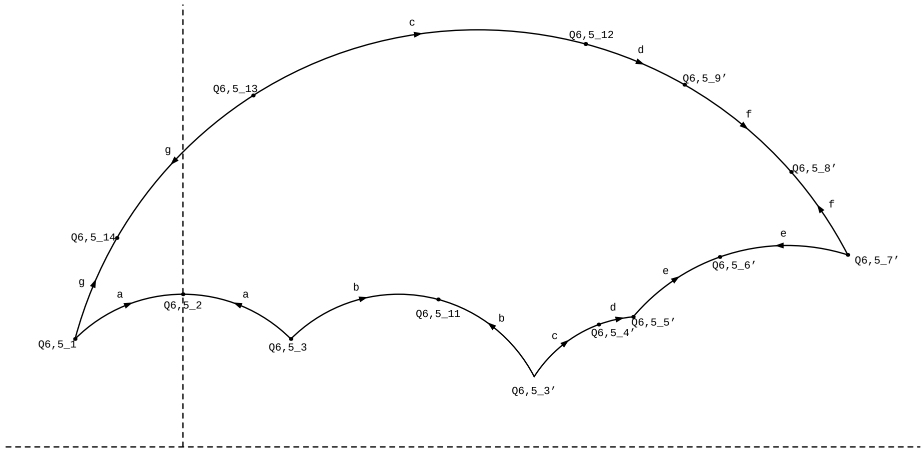

Figura 20: $X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_5 \rangle}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/6, \pi, \pi/2, \pi, \pi/3, \pi, 3\pi/4, \pi, \pi/4, \pi, \pi, \pi, \pi, \pi\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és π i el gènere de $X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_5 \rangle}$ és 0.

c) Hi ha 5 vèrtexs el·liptics, $\{Q_2^{6,5}, Q_{11}^{6,5}, Q_6^{6,5'}, Q_8^{6,5'}, Q_{14}^{6,5}\}$*, i tots ells són d'ordre* 2*. Les transformacions que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{Q_2^{6,5}} = w_6, & \gamma_{Q_{11}^{6,5}} = (0,5,-2,0), \\ \gamma_{Q_6^{6,5'}} = w_6(8,-5,4,-4), & \gamma_{Q_8^{6,5'}} = w_6 w_5(7,0,2,-4), \\ \gamma_{Q_{14}^{6,5}} = w_6 w_5. & \end{array}$$

d) Hi ha 5 *cicles el·líptics, cada vèrtex el·líptic en constitueix un, i* 3 *cicles accidentals,* $\{Q_1^{6,5}, Q_3^{6,5}, Q_3^{6,5'}, Q_{13}^{6,5}\}$, $\{Q_5^{6,5'}, Q_9^{6,5'}, Q_7^{6,5'}\}$ *i un de trivial* $\{Q_4^{6,5'}, Q_{12}^{6,5}\}$*.*

e) Les identificacions de costats vénen donades per:

$$\begin{array}{l} (Q_1^{6,5}Q_2^{6,5}, Q_3^{6,5}Q_2^{6,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_2^{6,5}}, \\ (Q_3^{6,5}Q_{11}^{6,5}, Q_3^{6,5'}Q_{11}^{6,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_{11}^{6,5}}, \\ (Q_3^{6,5'}Q_4^{6,5'}Q_5^{6,5'}, Q_{13}^{6,5}Q_{12}^{6,5}Q_9^{6,5'}) \text{ mitjançant } w_5(4,5,0,-3), \\ (Q_5^{6,5'}Q_6^{6,5'}, Q_7^{6,5'}Q_6^{6,5'}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_6^{6,5'}}, \\ (Q_7^{6,5'}Q_8^{6,5'}, Q_9^{6,5'}Q_8^{6,5'}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_8^{6,5'}}, \\ (Q_{13}^{6,5}Q_{14}^{6,5}, Q_1^{6,5}Q_{14}^{6,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_{14}^{6,5}}. \end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l} \gamma^2_{Q_2^{6,5}} = \gamma^2_{Q_{11}^{6,5}} = \gamma^2_{Q_6^{6,5'}} = \gamma^2_{Q_8^{6,5'}} = \gamma^2_{Q_{14}^{6,5}} = 1, \\ \gamma_{Q_{14}^{6,5}} \left[w_5(4,5,0,-3)\right] \gamma_{Q_{11}^{6,5}} \gamma_{Q_2^{6,5}} = 1, \\ \gamma_{Q_6^{6,5'}} \gamma_{Q_8^{6,5}} w_5(4,5,0,-3) = 1. \end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_6, w_5 \rangle$*.*

h) La línia poligonal tancada formada pels segments hiperbòlics $Q_{14}^{6,5}Q_2^{6,5}$, $Q_2^{6,5}Q_{11}^{6,5}$, $Q_{11}^{6,5}Q_6^{6,5'}$, $Q_6^{6,5'}Q_8^{6,5'}$ *i* $Q_8^{6,5'}Q_{14}^{6,5}$ *és un eix de simetria d'aquest domini fonamental.*

□

3.2.9 Estudi de $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$

Fixem el domini de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3 \rangle$ que ens dóna el teorema 16 i volem plasmar l'acció de w_5 sobre $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3 \rangle}$ en el domini.

$w_5 \langle \Gamma(6,5), w_2, w_3 \rangle$ identifica:

- $Q_1^{2,6}Q_2^{2,6}Q_3^{2,6}Q_{16}^{5}$ amb $Q_7^{2,6}Q_{16}^{5}Q_5^{2,6}Q_6^{2,6}$ mitjançant w_5,
- $Q_3^{2,6}Q_4^{2,6}Q_5^{2,6}Q_{16}^{5}$ amb $Q_5^{2,6}Q_{16}^{5}Q_3^{2,6}Q_4^{2,6}$ mitjançant $w_6 w_5$,
- $Q_7^{2,6}Q_8^{2,6}Q_1^{2,6}Q_{16}^{5}$ amb $Q_1^{2,6}Q_{16}^{5}Q_7^{2,6}Q_8^{2,6}$ mitjançant $w_2 w_5(4,5,0,-3)$.

Notem

$$\begin{array}{lll} Q_1^{2,3,5} = Q_1^{2,6}, & Q_2^{2,3,5} = Q_3^{2,6}, & Q_3^{2,3,5} = Q_{14}^{6,5}, \\ Q_4^{2,3,5} = Q_5^{2,6}, & Q_5^{2,3,5} = Q_7^{2,6}, & Q_6^{2,3,5} = Q_7^{2,5}. \end{array}$$

Teorema 22. *L'hexàgon hiperbòlic de vèrtexs* $\{Q_i^{2,3,5}\}_{i=1}^{6}$ *és un domini fonamental per a* $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5 \rangle$.

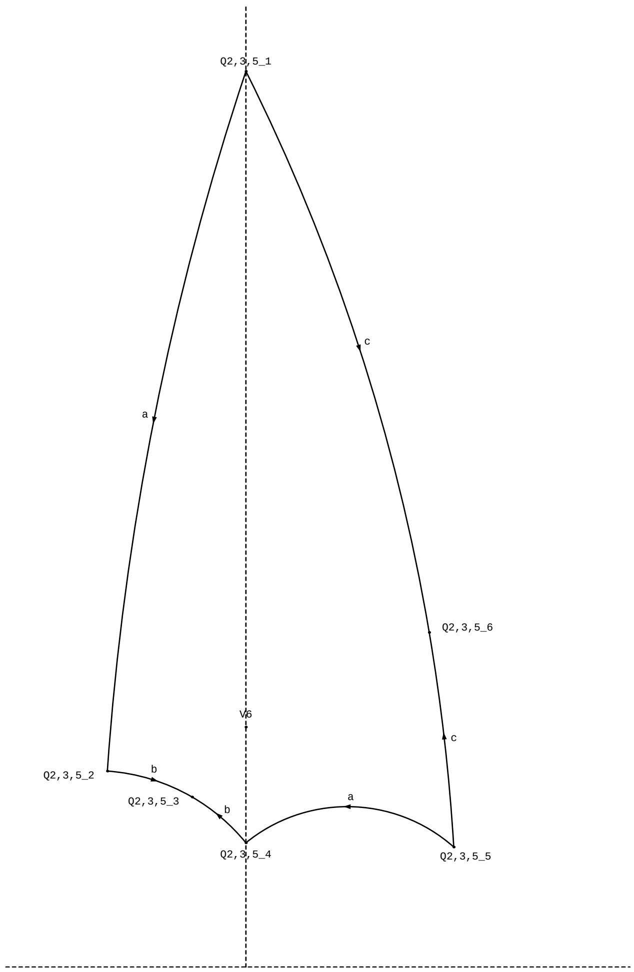

Figura 21: $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$

a) *Els angles en els vèrtexs són, respectivament,*

$$\{\pi/4, \pi/2, \pi, \pi/2, \pi/4, \pi\}.$$

b) *El seu volum hiperbòlic és* $\pi/2$ *i el gènere de* $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}$ *és* 0.

c) *Tots els vèrtexs del domini són el·líptics:* $\{Q_1^{2,3,5}, Q_5^{2,3,5}\}$ *d'ordre* 4 *i* $\{Q_2^{2,3,5}, Q_3^{2,3,5}, Q_4^{2,3,5}, Q_6^{2,3,5}\}$ *d'ordre* 2. *Les transformacions que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{Q_1^{2,3,5}} = w_2, & \gamma_{Q_2^{2,3,5}} = w_6(1,0,-1,1), \\ \gamma_{Q_3^{2,3,5}} = w_6 w_5, & \gamma_{Q_4^{2,3,5}} = w_6, \\ \gamma_{Q_5^{2,3,5}} = w_2(3,5,-1,-1), & \gamma_{Q_6^{2,3,5}} = w_2 w_5(4,5,0,-3). \end{array}$$

d) *Els cicles ordinaris, tots ells el·líptics, són:* $\{Q_1^{2,3,5}, Q_5^{2,3,5}\}$ *d'ordre* 4 *i* $\{Q_2^{2,3,5}, Q_4^{2,3,5}\}$, $\{Q_3^{2,3,5}\}$, $\{Q_6^{2,3,5}\}$ *d'ordre* 2.

e) *Les identificacions de costats vénen donades per:*

$$\begin{array}{l} (Q_1^{2,3,5}Q_2^{2,3,5}, Q_5^{2,3,5}Q_4^{2,3,5}) \text{ mitjançant } w_5, \\ (Q_2^{2,3,5}Q_3^{2,3,5}, Q_4^{2,3,5}Q_3^{2,3,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_3^{2,3,5}} \\ (Q_5^{2,3,5}Q_6^{2,3,5}, Q_1^{2,3,5}Q_6^{2,3,5}) \text{ mitjançant } \gamma_{Q_6^{2,3,5}}. \end{array}$$

f) *Les relacions donades pels cicles ordinaris són:*

$$\begin{array}{l} \gamma^2_{Q_3^{2,3,5}} = \gamma^2_{Q_6^{2,3,5}} = 1, \\ \left[\gamma_{Q_6^{6,5}} w_5\right]^4 = 1, \\ \left[\gamma_{Q_3^{2,3,5}} w_5\right]^2 = 1. \end{array}$$

g) *Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de* $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle$.

h) *El segment hiperbòlic* $Q_3^{2,3,5}Q_6^{2,3,5}$ *és un eix de simetria del domini fonamental.*

□

Observació. De la mateixa manera que vàrem fer en la secció 3.2.6 aquí també podem prendre com a domini alternatiu el polígon hiperbòlic

$$Q_4^{2,6}Q_5^{2,6}Q_6^{2,6}Q_7^{2,6}Q_8^{2,6}Q_7^{2,5}Q_{16}^{5}Q_{14}^{6,5}.$$

Aquest domini no té tots els vèrtexs el·líptics.

3.2.10 Relacions entre els dominis

Sempre que tinguem $\Gamma \subset \Gamma'$ grups fuchsians aquesta inclusió ens dóna de forma natural una aplicació de $\Gamma\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \Gamma'\backslash\mathcal{H}$. Per tant, si $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ són dominis fonamentals de Γ, Γ' respectivament, identificant $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ amb $\mathcal{D}$ (amb identificacions) i de la mateixa manera per $\Gamma'\backslash\mathcal{H}$, obtenim una aplicació exhaustiva entre dominis.

A continuació estudiarem aquesta aplicació en alguns punts concrets, entre els quals hi ha els punts de ramificació, per als dominis (amb identificacions) que hem trobat. Per això, considerarem $\Gamma\backslash\Gamma'$ i prendrem $\{\gamma_i\}$ un sistema de representants de les classes. Aleshores, per a $x \in \mathcal{D}'$, les antiimatges de x per l'aplicació anterior seran $\gamma_i^{-1}(x)$ en $\Gamma\backslash\mathcal{H}$, que ens donaran els corresponents punts del domini.

Fixem els dominis següents: per a $\Gamma(6,5)$ el que ens dóna el teorema 10; per a $\Gamma(6,1)$ el que ens dóna el teorema 9; per a $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$ el que ens dóna el teorema 11; per a $\langle\Gamma(6,5), w_3\rangle$ el que ens dóna el teorema 12; per a $\langle\Gamma(6,5), w_5\rangle$ el que ens dóna el teorema 13; per a $\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle$ el que ens dóna el teorema 14; per a $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_3\rangle$ el que ens dóna el teorema 16; per a $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle$ el que ens dóna el teorema 17; per a $\langle\Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle$ que ens dóna el teorema 19; per a $\langle\Gamma(6,5), w_6, w_5\rangle$ el que ens dóna el teorema 20; per a $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle$ el que ens dóna el teorema 22.

$X \in \Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$v_1 = v_3 = v_5$	$Q_1 + 2Q_3 + 2Q_7 + Q_{17}$
v_2	$3v_2 + 3Q_{16}$
v_4	$3Q_{12} + 3Q_8$
v_6	$Q_6 + Q_{10} + 2Q_{14} + 2v_6$

Taula 1: $X(6,5) \twoheadrightarrow X(6,1)$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
Q_1^2	$2Q_1$
$Q_2^2 = Q_8^2 = Q_2^{10}$	$Q_2 + Q_{18}$
$Q_3^2 = Q_5^2 = Q_7^2$	$Q_3 + Q_7$
Q_4^2	$2Q_6$
Q_6^2	$2Q_{10}$
Q_9^2	$2Q_{17}$
v_2	$Q_4 + v_2$
v_6	$v_6 + Q_{14}$

Taula 2: $X(6,5) \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), w_3 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^3 = Q_7^3$	$Q_1 + Q_6$
$Q_2^3 = Q_6^3$	$Q_2 + Q_4$
$Q_3^3 = Q_5^3 = Q_8^3 = Q_{12}^3$	$Q_3 + Q_{14}$
$Q_4^3 = Q_9^3 = Q_{11}^3$	$v_2 + Q_{16}$
Q_{10}^3	$Q_{10} + Q_{17}$
v_6	$v_6 + Q_5$

Taula 3: $X(6,5) \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_3 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^5 = Q_3^5 = Q_{11}^5$	$Q_5 + A_6$
$Q_2^5 = Q_{10}^5 = Q_{12}^5$	$Q_{14} + A_{12}$
$Q_4^5 = Q_{18}^5$	$Q_4 + A_1$
$Q_5^5 = Q_7^5 = Q_{17}^5$	$Q_3 + A_2$
Q_6^5	$Q_6 + Q_{10}$
$Q_8^5 = Q_{16}^5$	$A_3 + Q_2$
$Q_9^5 = Q_{13}^5 = Q_{15}^5$	$A_5 + Q_{16}$
Q_{14}^5	$Q_1 + Q_{17}$

Taula 4: $X(6,5) \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^6 = Q_7^6$	$Q_1 + Q_6$
$Q_2^6 = Q_4^6 = Q_6^6$	$Q_2 + v_2$
Q_3^6	$2Q_3^6$
Q_5^6	$2Q_5^6$
Q_8^6	$Q_5 + Q_{14}$
Q_9^6	$2Q_9^6$
$Q_{11}^6 = Q_{13}^6$	$Q_4 + Q_{16}$
Q_{12}^6	$Q_{10} + Q_{17}$
Q_{15}^6	$2Q_{15}^6$
v_6	$Q_3 + v_6$

Taula 5: $X(6,5) \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle\omega_6\rangle}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), \omega_2, \omega_3\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,6}$	$Q_1^2 + Q_4^2$
$Q_2^{2,6} = Q_4^{2,6} = Q_6^{2,6} = Q_8^{2,6}$	$Q_2^2 + v_2$
$Q_3^{2,6}$	$2Q_3^{2,6}$
$Q_5^{2,6}$	$2Q_5^{2,6}$
$Q_7^{2,6}$	$Q_6^2 + Q_9^2$
v_6	$Q_3^2 + v_6$

Taula 6: $X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_2, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,5} = Q_3^{2,5} = Q_9^{2,5}$	$Q_3^2 + Q_{17}^5$
$Q_2^{2,5}$	$Q_4^2 + Q_6^2$
$Q_4^{2,5} = Q_6^{2,5} = Q_9^{2,5}$	$Q_2^2 + Q_{16}^5$
$Q_5^{2,5}$	$Q_1^2 + Q_9^2$
$Q_7^{2,5}$	$2Q_7^{2,5}$
$Q_{10}^{2,5}$	$2Q_{10}^{2,5}$

Taula 7: $X(6,5)^{\langle \omega_2 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_2, \omega_3 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,6}$	$2Q_1^3$
$Q_2^{2,6} = Q_4^{2,6} = Q_6^{2,6} = Q_8^{2,6}$	$Q_2^3 + Q_{11}^3$
$Q_3^{2,6}$	$2Q_3^{2,6}$
$Q_5^{2,6}$	$2Q_5^{2,6}$
$Q_7^{2,6}$	$2Q_{10}^3$
v_6	$Q_3^3 + v_6$

Taula 8: $X(6,5)^{\langle \omega_3 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_3, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{3,5} = Q_4^{3,5} = Q_6^{3,5} = Q_8^{3,5}$	$Q_4^3 + Q_9^5$
$Q_2^{3,5} = Q_5^{3,5} = Q_{10}^{3,5}$	$Q_3^3 + Q_{17}^5$
$Q_3^{3,5} = Q_9^{3,5}$	$Q_2^3 + Q_{16}^5$
$Q_7^{3,5}$	$Q_1^3 + Q_{10}^3$

Taula 9: $X(6,5)^{\langle \omega_3 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_3, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_2, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,5} = Q_3^{2,5} = Q_9^{2,5}$	$Q_1^5 + Q_{17}^5$
$Q_2^{2,5}$	$2Q_6^5$
$Q_4^{2,5} = Q_6^{2,5} = Q_9^{2,5}$	$Q_8^5 + Q_{15}^5$
$Q_5^{2,5}$	$2Q_{14}^5$
$Q_7^{2,5}$	$2Q_7^{2,5}$
$Q_{10}^{2,5}$	$2Q_{10}^{2,5}$

Taula 10: $X(6,5)^{\langle \omega_5 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_3, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{3,5} = Q_4^{3,5} = Q_6^{3,5} = Q_8^{3,5}$	$Q_9^5 + v_2$
$Q_2^{3,5} = Q_5^{3,5} = Q_{10}^{3,5}$	$Q_5^5 + Q_2^5$
$Q_3^{3,5} = Q_9^{3,5}$	$Q_4^5 + Q_8^5$
$Q_7^{3,5}$	$Q_6^5 + Q_{14}^5$
v_6	$Q_1^5 + v_6$

Taula 11: $X(6,5)^{\langle \omega_5 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_3, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_6, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{6,5} = Q_3^{6,5} = Q_{13}^{6,5}$	$Q_8^5 + v_2$
$Q_2^{6,5}$	$2Q_2^{6,5}$
$Q_4^{6,5} = Q_{10}^{6,5} = Q_{12}^{6,5}$	$Q_9^5 + Q_4^5$
$Q_5^{6,5} = Q_7^{6,5} = Q_9^{6,5}$	$Q_1^5 + Q_2^5$
$Q_6^{6,5}$	$2Q_6^{6,5}$
$Q_8^{6,5}$	$2Q_8^{6,5}$
$Q_{11}^{6,5}$	$Q_6^5 + Q_{14}^5$
$Q_{14}^{6,5}$	$2Q_{14}^{6,5}$
v_6	$Q_5^5 + v_6$

Taula 12: $X(6,5)^{\langle \omega_5 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_2, \omega_3 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,6}$	$2Q_1^6$
$Q_2^{2,6} = Q_4^{2,6} = Q_6^{2,6} = Q_8^{2,6}$	$Q_2^6 + Q_{13}^6$
$Q_3^{2,6}$	$Q_3^6 + Q_{15}^6$
$Q_5^{2,6}$	$Q_5^6 + Q_9^6$
$Q_7^{2,6}$	$2Q_{12}^6$
v_6	$Q_8^6 + v_6$

Taula 13: $X(6,5)^{\langle \omega_6 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_6, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{6,5} = Q_3^{6,5} = Q_{13}^{6,5}$	$Q_4^6 + Q_{16}^5$
$Q_2^{6,5}$	$Q_5^6 + Q_3^6$
$Q_4^{6,5} = Q_{10}^{6,5} = Q_{12}^{6,5}$	$Q_9^5 + Q_{11}^6$
$Q_5^{6,5} = Q_7^{6,5} = Q_9^{6,5}$	$Q_8^6 + Q_{12}^5$
$Q_6^{6,5}$	$Q_9^6 + Q_{15}^6$
$Q_8^{6,5}$	$2Q_8^{6,5}$
$Q_{11}^{6,5}$	$Q_1^6 + Q_{12}^6$
$Q_{14}^{6,5}$	$2Q_{14}^{6,5}$

Taula 14: $X(6,5)^{\langle \omega_6 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,3,5} = Q_5^{2,3,5}$	$Q_1^{2,6} + Q_7^{2,6}$
$Q_2^{2,3,5} = Q_4^{2,3,5}$	$Q_3^{2,6} + Q_5^{2,6}$
$Q_3^{2,3,5}$	$2Q_3^{2,3,5}$
$Q_6^{2,3,5}$	$2Q_6^{2,3,5}$
Q_{16}^5	$Q_2^{2,6} + Q_{16}^5$

Taula 15: $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,3,5} = Q_5^{2,3,5}$	$Q_2^{2,5} + Q_5^{2,5}$
$Q_2^{2,3,5} = Q_4^{2,3,5}$	$2Q_4^{2,3,5}$
$Q_3^{2,3,5}$	$2Q_3^{2,3,5}$
$Q_6^{2,3,5}$	$Q_7^{2,5} + Q_{10}^{2,5}$
v_6	$v_6 + Q_1^{2,5}$
Q_{16}^{5}	$Q_{16}^{5} + Q_4^{2,5}$

Taula 16: $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_5 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,3,5} = Q_5^{2,3,5}$	$2Q_7^{3,5}$
$Q_2^{2,3,5} = Q_4^{2,3,5}$	$2Q_4^{2,3,5}$
$Q_3^{2,3,5}$	$2Q_3^{2,3,5}$
$Q_6^{2,3,5}$	$2Q_6^{2,3,5}$
v_6	$v_6 + Q_2^{3,5}$
Q_{16}^{5}	$Q_1^{3,5} + Q_9^{3,5}$

Taula 17: $X(6,5)^{\langle \omega_3, \omega_5 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$

$X \in \langle \Gamma(6,5), \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$	antiimatges de X
$Q_1^{2,3,5} = Q_5^{2,3,5}$	$2Q_{11}^{6,5}$
$Q_2^{2,3,5} = Q_4^{2,3,5}$	$Q_2^{6,5} + Q_6^{6,5}$
$Q_3^{2,3,5}$	$Q_8^{6,5} + Q_{14}^{6,5}$
$Q_6^{2,3,5}$	$2Q_6^{2,3,5}$
v_6	$v_6 + Q_5^{6,5}$
Q_{16}^{5}	$Q_4^{6,5} + Q_{13}^{6,5}$

Taula 18: $X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_5 \rangle} \twoheadrightarrow X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$

Referències

[1] M. Alsina i P. Bayer, *Quaternion Orders, Quadratic Forms and Shimura Curves*, CRM Monograph Series, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, 2004.

[2] L.R. Ford, *Automorphic Functions*, Chelsea, USA, 1929.

[3] J. Lehner, *Discontinuous groups and automorphic functions*, Mathematical Surveys, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, 1964.

[4] H. Poincaré, *Théorie des groups fuchsiens*, Acta Mathematica, vol. 1, 1882, 1-62.

[5] M.F. Vignéras, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 800, Springer, Berlín, 1980.