Dominis fonamentals, polinomis modulars i corbes de Shimura

Joan Nualart

Setembre 2007

Índex

Introducció

L'objectiu d'aquest treball és la introducció de les corbes de Shimura, centrant-nos en l'estudi d'un cas concret i amb especial atenció en la construcció de dominis fonamentals i en la uniformització explícita.

Siguin K un cos totalment real de grau d, H una àlgebra de quaternions indefinida sobre K tal que $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times H_{\mathbb{R}}^{d-1}$, on $H_{\mathbb{R}}$ denota l'àlgebra dels quaternions de Hamilton, i $\mathcal{O}$ un ordre en H. Considerem una immersió $H \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, a través de la qual el grup d'unitats de $\mathcal{O}$ de norma positiva dóna un grup fuchsià $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que actua en el semiplà superior $\mathcal{H}$ i proporciona una superfície de Riemann $\Gamma\backslash\mathcal{H}$. Aquesta superfície de Riemann és un obert d'una corba projectiva i llisa sobre un determinat cos de nombres, que s'anomena corba de Shimura. En el cas en què Γ és commensurable amb $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ retrobem les corbes modulars, l'estudi de les quals es remunta a Fricke i Klein i dóna lloc a les formes modulars, entre les quals cal distingir la funció J de Klein (que ja era coneguda per Dedekind), que és associada a la corba $X_0(1) \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ i té la remarcable propietat que pren valors algebraics que generen determinats cossos de classes en els punts quadràtics imaginaris de $\mathcal{H}$. La peculiaritat més important de les corbes modulars és que són els únics exemples d'aquesta família en què la superfície de Riemann no és compacta. La teoria de les corbes de Shimura, més precisament els models canònics de les corbes de Shimura, proporciona teòricament funcions que ocupen el lloc de la funció J i que prenen valors algebraics, que generen determinats cossos de classes, en uns punts especials, els punts de multiplicació complexa. A més, Shimura també dóna una interpretació d'aquestes corbes com a espai de mòduli de superfícies abelianes principalment polaritzades amb multiplicació quaterniònica i estructura de nivell, que generalitza la interpretació de les corbes modulars com a espai de mòduli de corbes el·líptiques amb estructura de nivell.

En aquest treball ens centrem en el cas en què $K = \mathbb{Q}$ i $\mathcal{O}$ és un ordre d'Eichler; més concretament encara, quan $H = \mathbb{H}$ és l'àlgebra de quaternions racional de discriminant $D = 6$ i $\mathcal{O} = \mathcal{O}(D, N)$ és un ordre d'Eichler de nivell $N = 1$ o 5. En aquest context, seguint les notacions de [AB04], escriurem $\Gamma = \Gamma(D, N) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ el corresponent grup fuchsià i $X(D, N)$ la corba de Shimura.

A continuació descrivim, de forma general, els continguts d'aquest treball, així com alguna referència bàsica.

En el capítol 1 introduïm els fonaments i fixem la notació que mantindrem en la resta de treball. En primer lloc, descrivim alguns resultats sobre grups fuchsians i la construcció de dominis fonamentals, per als quals les referències bàsiques són [Poi82], [For29] i [Leh64]. A continuació, presentem alguns fets sobre àlgebres de quaternions, ordres quaterniònics i immersions d'ordres quadràtics en ordres quaterniònics, que condueixen de forma natural a la noció de punt de multiplicació complexa; tot això parant especial atenció al cas $D = 6$. Les referències bàsiques per a aquests punts són [AB04] i [Vig80]. Finalment, introduïm les corbes de Shimura: donem la definició de model canònic i en descrivim algunes propietats bàsiques. Tots aquests resultats es poden trobar a [Shi67] i d'altres referències i resultats a [AB04].

En el capítol 2 construïm dominis fonamentals per a $\Gamma(6,1)$ i $\Gamma(6,5)$; en particular, retrobem el domini de $\Gamma(6,1)$ que es determina a [AB04].

En el capítol 3 estudiem les involucions d'Atkin-Lehner (així com algunes simetries especials) d'aquestes corbes; per a això, construïm dominis fonamentals adients per a les corbes quocient i estudiem les projeccions corresponents. Una referència teòrica per a aquesta secció és [Ogg83].

En el capítol 4 generalitzem la teoria de polinomis modulars per al cas de les corbes de Shimura, centrant-nos en el cas $D = 6$ que hem pres com a model, intentant mostrar el paral·lelisme entre el cas clàssic i aquesta generalització.

En el capítol 5 veiem com podem construir funcions automorfes a partir del domini fonamental, seguint les idees de [BT07b] i [BT07a]. Per altra banda, veiem com els polinomis modulars que hem introduït en el capítol anterior ens poden ajudar a determinar alguns dels paràmetres de les derivades schwarzianes d'aquestes funcions, que en [BT07b] es determinen utilitzant altres tècniques basades en què la corba $X(6,1)^+$ és triangular. En contraposició, el mètode que utilitzem aquí, tot i ser més complex a nivell computacional, és aplicable a qualsevol grup aritmètic en aquest context que doni lloc a una corba de gènere 0; tot i això no permet determinar les constants locals com es fa a [BT07b] utilitzant sèries hipergeomètriques. Els fonaments teòrics que justifiquen aquest mètode es poden trobar a [SD77]. Un cop vist tot això, utilitzem l'abundància de quocients de $X(6,5)$ que tenen gènere 0 per a determinar els models canònics d'aquestes corbes de Shimura. Per a això, utilitzem de nou les mateixes idees de [BT07b] i retrobem l'equació de $X(6,5)$ que apareix en [GR06].

Capítol 1

Introducció a les corbes de Shimura

1.1 Grups fuchsians i dominis fonamentals

Sigui $\mathcal{H}$ el semiplà superior de Poincaré amb la mètrica hiperbòlica. Recordem que donat un polígon hiperbòlic $\mathcal{D}$ de n costats podem calcular el seu volum hiperbòlic com $V(\mathcal{D}) = (n-2)\pi - (\theta_1 + \cdots + \theta_n)$, on θ_k denota l'angle interior en el vèrtex k-èsim del polígon $\mathcal{D}$.

Considerem l'acció fidel de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ en $\mathcal{H}$ donada per

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

i també l'acció definida de la mateixa manera de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ en l'esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. En compondre amb les projeccions dels grups especials lineals en els respectius grups projectius especials lineals obtenim accions de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$; treballarem indistintament amb les unes o les altres.

Definició. Donada $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, definida per la matriu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, diem que γ és: el·líptica si té dos punts fixos complexos conjugats diferents en l'esfera de Riemann (equivalentment, si $(a+d)^2 > 4$); hiperbòlica si té dos punts fixos diferents en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (equivalentment, si $(a+d)^2 < 4$); parabòlica si té un únic punt fix doble, necessàriament en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (equivalentment, si $(a+d)^2 = 4$).

Diem que un punt z de l'esfera de Riemann és el·líptic (resp. hiperbòlic, parabòlic) per a un subgrup Γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ si existeix $\gamma \in \Gamma$ el·líptica (resp.

hiperbòlica, parabòlica) que fixa z. En el cas d'un punt el·líptic, anomenarem ordre del punt a l'ordre del grup d'isotropia d'aquest punt (subgrup de Γ format per les transformacions que el fixen). Diem que un punt $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ és una punta si és fix per una transformació parabòlica.

Observació. Podem estendre aquesta acció a $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ considerant

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d}, \ \text{si} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0 \\ \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) & \mapsto & \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}, \ \text{si} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0. \end{array}$$

Recordem ara la definició de domini fonamental.

Definició. Un polígon hiperbòlic tancat $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ és un domini fonamental per a $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (o per a $\tilde{\Gamma} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$) si cumpleix que dos punts qualssevol interiors de $\mathcal{D}$ no són equivalents per l'acció de Γ (resp. $\tilde{\Gamma}$) i si tot punt de $\mathcal{H}$ és equivalent a un punt de $\mathcal{D}$.

Per a acabar, anomenem cicle ordinari el conjunt de vèrtexs del domini que són equivalents a un vèrtex donat. Sovint precisarem anomenant cicle el·líptic d'ordre k el cicle ordinari format per vèrtexs el·líptics d'ordre k, cicle parabòlic el cicle ordinari format per vèrtexs parabòlics i cicle accidental en qualsevol altre cas.

Observació. La classificació de vèrtexs del domini, en el cas general, sol distingir bastants més casos dels que hem explicitat, vegeu [For29]. La simplificació que hem fet bastarà en el nostre cas.

Es pot veure, cf. [For29] o [Leh64], que les transformacions que identifiquen costats del domini juntament amb les relacions que donen els cicles ordinaris constitueixen una presentació de $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Anomenem grup fuchsià tot subgrup discret $\tilde{\Gamma} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, o equivalentment tal que l'acció d'aquest en $\mathcal{H}$ sigui discontínua. Diem que $\tilde{\Gamma}$ és de primera espècie si $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{H}^*$, on $\mathcal{H}^*$ és la unió de $\mathcal{H}$ amb les puntes, és compacte. Per a simplificar, ja que habitualment treballarem amb les imatges en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'aquests grups, també ens referirem als subgrups $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que actuen discontínuament en $\mathcal{H}$ com a grups fuchsians.

Exemple. L'exemple més habitual de grup fuchsià és $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, que és un grup fuchsià de primera espècie. El subgrup de les translacions de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ és un grup fuchsià que no és de primera espècie.

Per a construir dominis fonamentals necessitarem treballar amb una família una mica més àmplia de grups. Per a la resta de la secció considerarem subgrups de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ que deixen invariant una circumferència de

$\mathbb{C}_\infty$, o, equivalentment, subgrups que són conjugats en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ a un grup fuchsià.

Com que treballem amb grups que no estan necessàriament continguts en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, hem de considerar accions en l'esfera de Riemann i per tant ampliar la noció de domini fonamental de la manera òbvia.

Sigui $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $c \neq 0$, escrivim $D_\gamma = \{z : |cz + d| < 1\}$ i l'anomenem el cercle isomètric associat a γ.

Teorema 1. *Sigui $\tilde{\Gamma}$ un conjugat en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ d'un grup fuchsià i suposem que no conté cap element que fixi ∞. El conjunt*

$$\mathcal{D} = \overline{\bigcap_{\gamma \in \tilde{\Gamma}} (\mathbb{C}_\infty - \overline{D}_\gamma)}$$

és un domini fonamental per a l'acció de $\tilde{\Gamma}$ en $\mathbb{C}_\infty$. □

Com que tot grup fuchsià té un conjugat en les condicions del teorema anterior, això ens permet construir dominis fonamentals utilitzant el lema següent:

Lema 1. *Sigui $\tilde{\Gamma} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ un grup i $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Suposem que existeix $\mathcal{D}$ un domini fonamental per a l'acció de $\tilde{\Gamma}$ en $\mathbb{C}_\infty$. Aleshores, $\gamma\mathcal{D}$ és un domini fonamental per a l'acció de $\gamma\tilde{\Gamma}\gamma^{-1}$ en $\mathbb{C}_\infty$.* □

Observació. Si Γ és un grup fuchsià de primera espècie, els dominis fonamentals construïts per aquest mètode són dominis fonamentals en $\mathcal{H}$ en el sentit que hem definit. Per a més detalls, veure el capítol 2.

1.2 Àlgebres de quaternions: ordres i grups d'unitats

Sigui K un cos de característica diferent de 2.

Definició. Una K-àlgebra de quaternions H és una K-àlgebra central i simple de dimensió 4 sobre K. Notem $H^* = \{w : \exists w' \in H, ww' = w'w = 1\}$ el conjunt d'elements invertibles.

Com que $\mathrm{car}(K) \neq 2$, tota K-àlgebra de quaternions H té una K-base $\{1, i, j, ij\}$ tal que $i^2 = a$, $j^2 = b$ i $ij = -ji$, on $a, b \in K^*$. Recíprocament, una K-base i unes relacions com aquestes, juntament amb la propietat associativa, defineixen una K-àlgebra de quaternions, H, que denotarem per $\left(\frac{a,b}{K}\right)$. Observem que parelles (a, b) diferents poden donar K-àlgebres isomorfes.

Definició. Sigui H una K-àlgebra de quaternions amb K-base $\{1, i, j, ij\}$. Aleshores, tenim un endomorfisme involutiu de H definit per $w \mapsto \overline{w}$ on si $w = x + yi + xj + tij$, $\overline{w} = x - yi - xj - tij$. Utilitzant això, definim la traça i la norma de $w \in H$ com $\mathrm{tr}(w) = w + \overline{w}$ i $\mathrm{nr}(w) = w\overline{w}$ respectivament, que amb la notació anterior per a w, s'escriuen $\mathrm{tr}(w) = 2x$ i $\mathrm{nr}(w) = x^2 - ay^2 - by^2 + abt^2$. Aquests conceptes, en el cas d'una àlgebra de matrius, coincideixen amb els de traça i determinant habituals.

Tota K-àlgebra de quaternions és una K-àlgebra de divisió o una àlgebra isomorfa a l'àlgebra de matrius $\mathrm{M}_2(K)$.

A partir d'ara prendrem $K = \mathbb{Q}$. Sigui v una plaça de $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}_v$ la corresponent completació de $\mathbb{Q}$.

Definició. Sigui H una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions. Per a tota plaça de $\mathbb{Q}$, v, $H_v := \mathbb{Q}_v \otimes H$ és una $\mathbb{Q}_v$-àlgebra de quaternions. Diem que H ramifica en v si H_v és una àlgebra de divisió; altrament, diem que H no ramifica en v.

Lema 2. *Sigui $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$. Aleshores, H ramifica en*

- *∞ si i només si $a < 0$ i $b < 0$.*
- *$p \in \mathbb{Z}$ si i només si $(a, b)_p = 1$, on $(\cdot, \cdot)_p$ denota el símbol de Hilbert.* $\square$

Introduït aquest llenguatge, podem presentar el següent resultat de classificació.

Teorema 2.
- *Una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions H ramifica en un nombre finit i parell de places.*
- *Dues $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions són isomorfes si i només si ramifiquen en les mateixes places.*
- *Donat un nombre parell de places, existeix una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions que ramifica exactament en elles.* $\square$

Per tant, té sentit considerar la noció següent.

Definició. El discriminant reduït D_H d'una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions H és l'ideal de $\mathbb{Z}$ producte dels ideals primers que ramifiquen en H, que podem identificar amb un element $D_H \in \mathbb{Z}$, $D_H > 0$.

Corol·lari 1. *Dues $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions són isomorfes si i només si tenen el mateix discriminant reduït. Una àlgebra de quaternions ramifica en ∞ si i només si el seu discriminant reduït és producte d'un nombre senar de primers.* $\square$

Sovint s'utilitza un altre llenguatge per a parlar d'aquest fet.

Definició. Si K és un cos de nombres totalment real de grau $[K:\mathbb{Q}]=d$ i H és una K-àlgebra de quaternions, resulta que $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} H \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})^r \times H_{\mathbb{R}}^{d-r}$, on $H_{\mathbb{R}}$ indica l'àlgebra de quaternions de Hamilton. Diem que H és definida si $r=0$ i altrament diem que és indefinida.

Observem que en el cas $K=\mathbb{Q}$ això correspon simplement a que la $\mathbb{Q}$-àlgebra sigui ramificada (definida) o no (indefinida) en infinit. En altres paraules, les $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions definides són aquelles que ramifiquen en ∞.

Proposició 1. *Sigui $H=\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions indefinida amb $a>0$. Aleshores, tenim una immersió $\Phi: H \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ donada per:*

$$\Phi(x+yi+zj+tij)=\begin{pmatrix} x+y\sqrt{a} & z+t\sqrt{a} \\ b(z-t\sqrt{a}) & x-y\sqrt{a}\end{pmatrix},$$

que és, de fet, una immersió en $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{a}))$. □

Exemple. Més endavant, apareixerà l'àlgebra de quaternions $\mathbb{H}=\left(\frac{3,-1}{\mathbb{Q}}\right)$. Aquesta és una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions indefinida de discriminant reduït 6 i la proposició anterior ens dóna una immersió de $\mathbb{H}$ en $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$:

$$\Phi(x+yi+zj+tij)=\begin{pmatrix} x+y\sqrt{3} & z+t\sqrt{3} \\ -z+t\sqrt{3} & x-y\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Introduirem ara el concepte d'ordre d'una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions. Per a fer-ho necessitem la noció d'element enter en el context de les $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions.

Definició. Sigui $\alpha \in H$. Diem que α és enter sobre $\mathbb{Q}$ si $\mathrm{nr}(\alpha)$ i $\mathrm{tr}(\alpha)$ són enteres.

Al contrari del que succeeix en el cas commutatiu, el conjunt d'elements enters no forma un anell i ens caldrà el concepte d'ordre.

Definició. Un subconjunt $\mathcal{O}$ de H s'anomena un $\mathbb{Z}$-ordre de H si: és un anell, tots els seus elements són enters, conté $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}=H$.

Tot $\mathbb{Z}$-ordre de H està contingut en un $\mathbb{Z}$-ordre maximal. A més dels $\mathbb{Z}$-ordres maximals ens interessarà considerar una família més àmplia d'ordres, la dels ordres d'Eichler.

Definició. Un ordre d'Eichler en una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions H és la intersecció de dos $\mathbb{Z}$-ordres maximals.

Lema 3. *Sigui $\mathcal{O}$ un ordre d'Eichler que està contingut en un ordre maximal $\mathcal{O}'$. L'índex $[\mathcal{O}' : \mathcal{O}]$ com a $\mathbb{Z}$-mòduls és finit i no depèn de l'ordre maximal $\mathcal{O}'$ escollit.* $\square$

Definició. Anomenem nivell d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}$ a l'índex $[\mathcal{O}' : \mathcal{O}]$, on $\mathcal{O}'$ és un ordre maximal qualsevol que conté $\mathcal{O}$.

Observació. Hem donat aquesta definició per comoditat, però en general se sol definir el nivell a partir dels nivells locals, que requereixen un coneixement explícit dels ordres en el cas local.

Per a acabar donem un resultat sobre l'existència i la unicitat d'ordres d'Eichler.

Proposició 2. *Si H és una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions de discriminant D, per a tot enter N coprimer amb D existeixen ordres d'Eichler de nivell N. A més a més, si H és indefinida, tots els ordres d'Eichler del mateix nivell són conjugats.* $\square$

1.2.1 Grups associats a ordres d'àlgebres de quaternions

Siguin $D, N \geq 1$ nombres naturals coprimers i H una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions de discriminant D. Sigui $\mathcal{O}(D,N)$ un ordre d'Eichler de H de nivell N. Considerem el grup d'unitats de norma 1,

$$\mathcal{O}(D,N)^*_1 = \{w \in \mathcal{O}(D,N)^* : \mathrm{nr}(w) = 1\}.$$

A continuació resumim les propietats més importants d'aquests grups.

Teorema 3. *Sigui $\mathcal{O}(D,N)$ un ordre d'Eichler en una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions H. Aleshores:*

- *Si H és indefinida, $\mathcal{O}(D,N)$ té unitats de norma -1 i*

$$[\mathcal{O}(D,N)^* : \mathcal{O}(D,N)^*_1] = 2.$$

- *Si H és definida, $\mathcal{O}(D,N)^*_1 = \mathcal{O}(D,N)^*$, és a dir, no hi ha elements de norma -1. A més a més, $\mathcal{O}(D,1)^*$ és un grup cíclic d'ordre $2,4$ o 6, llevat dels casos:*
  - *$H = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{Q}}\right)$, amb $D_H = 2$, en el qual $O(D,1)^*$ és isomorf a E_{24}, el grup tetrahedral binari, que té ordre 24.*
  - *$H = \left(\frac{-1,-3}{\mathbb{Q}}\right)$, amb $D_H = 3$, en el qual $O(D,1)^* \cong C_6 \times C_2$, un grup bicíclic d'ordre 12.* $\square$

Com que per a $\mathbb{Q}$-àlgebres de quaternions definides el grup $\mathcal{O}(D,N)_1^*$ és finit ens restringirem al cas indefinit. En aquest cas, D és producte d'un nombre parell de primers i, com que l'ordre d'Eichler està completament determinat llevat de conjugació, cf. proposició 2, aquest grup només depèn de D i N.

Exemple. Com que un ordre d'Eichler de nivell N de l'àlgebra de matrius $H = \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ és $\mathcal{O}(1,N) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ cN & d \end{smallmatrix}\right) : a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$, el grup que obtenim mitjançant aquest procés és el subgrup de congruència $\tilde{\Gamma}_0(N) = \tilde{\Gamma}(1,N)$, la imatge del qual en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ escriurem $\Gamma_0(N) = \Gamma(1,N)$.

Per altra banda, si el grup prové d'una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions indefinida, podem suposar que $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$ amb $a > 0$ lliure de quadrats i fixar la immersió Φ que hem vist en la proposició 1. Definim $\tilde{\Gamma}(D,N) = \Phi(\mathcal{O}(D,N)_1^*) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, que per la projecció de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dóna un grup $\Gamma(D,N) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

És senzill veure que tots els grups $\tilde{\Gamma}(D,N)$ són subgrups discrets de $\mathrm{SL}(\mathbb{R})$ (no es poden acumular a la identitat) i, per tant, tenim el resultat següent.

Proposició 3. $\Gamma(D,N)$ *és un grup fuchsià de primera espècie.* $\square$

1.2.2 El cas $D = 6$

Fixem l'àlgebra de quaternions indefinida sobre $\mathbb{Q}$ de discriminant reduït 6, $\mathbb{H} = \left(\frac{3,-1}{\mathbb{Q}}\right)$, juntament amb la immersió $\Phi : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ definida per

$$\Phi(x + yi + zj + tij) = \begin{bmatrix} x + y\sqrt{3} & z + t\sqrt{3} \\ -z + t\sqrt{3} & x - y\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Considerem també l'ordre maximal en $\mathbb{H}$ donat per

$$\mathcal{O}(6,1) = \mathbb{Z}[1, i, 2i + j, (1 + 3i + j + ij)/2]$$

amb la base $\{1, I, J, K\}$, on $I = i$, $J = 2i + j$ i $K = (1 + 3i + j + ij)/2$. Escriurem abreujadament un element $a + bI + cJ + dK$ com (a,b,c,d). També escriurem de la mateixa manera les matrius (o les transformacions) obtingudes aplicant la immersió Φ a l'element $a + bI + cJ + dK$. Amb aquesta notació, la norma reduïda d'un element de $\mathcal{O}(6,1)$ és $\mathrm{nr}(a,b,c,d) = a^2 - 3b^2 - 11c^2 - 7d^2 + ad - 12bc - 9bd - 17cd$.

D'altra banda, un ordre d'Eichler de nivell 5 en aquesta mateixa àlgebra de quaternions és

$$\mathcal{O}(6,5) = \mathbb{Z}[1, 5i, 2i + j, (1 + 3i + j + ij)/2] \subset \mathcal{O}(6,1);$$

és fàcil veure que s'obté com a intersecció dels ordres maximals $\mathcal{O}(6,1)$ i $g^{-1}\mathcal{O}(6,1)g$, on $g=(2,0,-1,1)\in\mathcal{O}(6,1)$ és un element de norma reduïda 5. Com que $\mathcal{O}(6,5)\subset\mathcal{O}(6,1)$, per als elements de $\mathcal{O}(6,5)$ també utilitzarem la notació (a,b,c,d); a més, notem que aquest element de $\mathcal{O}(6,1)$ és de $\mathcal{O}(6,5)$ si, i només si, $b\in 5\mathbb{Z}$.

1.2.3 Immersions d'ordres quadràtics i punts de multiplicació complexa

Els punts de multiplicació complexa tindran un paper central en la darrera part del treball, per la seva importància en la definició de corba de Shimura, com veurem en la secció següent. Per a introduir els punts de multiplicació complexa necessitarem algunes nocions sobre immersions d'ordres quadràtics en ordres d'àlgebres de quaternions.

Com abans, fixem H una àlgebra de quaternions i $\mathcal{O}$ un ordre en aquesta àlgebra de quaternions. Per altra banda, considerem F un cos quadràtic i Λ un ordre en F de D_Λ.

Escrivim
$$\mathcal{E}(H,F)=\{\varphi:\varphi\text{ immersió de }F\text{ en }H\}.$$
Diem que una immersió $\varphi\in\mathcal{E}(H,F)$ és una immersió de Λ en $\mathcal{O}$ si $\varphi(\Lambda)\subset\mathcal{O}$. Diem que la immersió és optimal si $\varphi(F)\cap\mathcal{O}=\varphi(\Lambda)$, o equivalentment, si $\Lambda=\varphi^{-1}(\varphi(F)\cap\mathcal{O})$. Escrivim

$$\mathcal{E}(\mathcal{O},\Lambda)=\{\varphi:\varphi\text{ immersió de }\Lambda\text{ en }\mathcal{O}\},$$
$$\mathcal{E}^*(\mathcal{O},\Lambda)=\{\varphi:\varphi\text{ immersió optimal de }\Lambda\text{ en }\mathcal{O}\}.$$

Suposem que Λ és un ordre de conductor m en $F=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, on d és un enter lliure de quadrats; això és, $\Lambda=\mathbb{Z}[1,mw]$ on $w=\sqrt{d}$ si $d\equiv 2,3 \pmod 4$ i $w=(1+\sqrt{d})/2$ si $d\equiv 1\pmod 4$. Aleshores, definir una immersió φ de Λ en $\mathcal{O}$ és el mateix que fixar un element $\varphi(mw)\in\mathcal{O}$ tal que $\mathrm{nr}(\varphi(mw))=m^2\,\mathrm{nr}(w)$ i $\mathrm{tr}(\varphi(mw))=m\,\mathrm{tr}(w)$, o equivalentment, tal que $(\varphi(mw)-\overline{\varphi(mw)})^2=D_\Lambda$. Notem també que una immersió $\varphi\in\mathcal{E}(H,F)$ està determinada per $\varphi|_\Lambda$.

Algunes propietats elementals que satisfan aquestes immersions són:

- Sigui $\varphi\in\mathcal{E}(H,F)$, aleshores, $\varphi\in\mathcal{E}^*(\mathcal{O},\varphi^{-1}(\varphi(F)\cap\mathcal{O}))$.
- Sigui $\varphi\in\mathcal{E}(\mathcal{O},\Lambda)$, aleshores, $\Lambda\subset\varphi^{-1}(\varphi(F)\cap\mathcal{O})$.
- Sigui Λ_F l'anell d'enters de F, aleshores, $\mathcal{E}(\mathcal{O},\Lambda_F)=\mathcal{E}^*(\mathcal{O},\Lambda_F)$.

Considerem el grup H^* d'unitats de H i definim l'acció de H^* en $\mathcal{E}(H,F)$ donada per

$$\mathcal{E}(H,F) \times H^* \to \mathcal{E}(H,F),\ (\varphi,\sigma) \mapsto \varphi^\sigma,$$

on $\varphi^\sigma(\alpha) = \sigma^{-1}\varphi(\alpha)\sigma$, per a tot $\alpha \in F$.

- Per a tot $\sigma \in H^*$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{O},\Lambda)$ si i només si $\varphi^\sigma \in \mathcal{E}(\sigma^{-1}\mathcal{O}\sigma,\Lambda)$. Anàlogament per a immersions optimals.

Vist això ja podem definir els punts de multiplicació complexa.

Sigui H una àlgebra de quaternions i escrivim $\mathcal{I}(H)$ el conjunt de cossos quadràtics imaginaris F tals que $\mathcal{E}(H,F) \neq \emptyset$. Aleshores, tota transformació $\gamma \neq id$ en la imatge de $\Phi(\varphi(F^*))$, per a $F \in \mathcal{I}(H)$ i $\varphi \in \mathcal{E}(H,F)$, té un únic punt fix en $\mathcal{H}$. Per tant, podem definir una aplicació

$$\bigcup_{F\in\mathcal{I}(H)} \mathcal{E}(\mathbb{H},F) \to \mathcal{H},\ \varphi \mapsto z(\varphi)$$

on $z(\varphi)$ denota l'únic punt fix de $\Phi(\varphi(\alpha))$ en $\mathcal{H}$ per a $\alpha \in F^* - \mathbb{Q}^*$.

Definició. Sigui $F \in \mathcal{I}(H)$ i Λ un ordre de F. Un punt $z \in \Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ es diu punt de multiplicació complexa per Λ si existeix una immersió optimal $\varphi \in \mathcal{E}^*(\mathcal{O}(D,N),\Lambda)$ tal que $z = z(\varphi)$.

Notem que si $z \in \mathcal{H}$ és el punt fix d'una transformació $\gamma = \Phi(w)$, per a $w \in H - \mathbb{Q}$, aleshores, el quaternió w determina un cos quadràtic imaginari $F_w = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on $d = \mathrm{tr}(\gamma)^2 - 4\det(\gamma)$, que és el cos que defineix el polinomi característic de la transformació γ, i tenim una immersió $\varphi \in \mathcal{E}(H,F_w)$ tal que $w \in \varphi(F_w)$; la immersió φ satisfà que $z(\varphi) = z$.

Un cas particular de punts de multiplicació complexa són els punts el·líptics: un punt de $X(D,N)$ és el·líptic si i només si és un punt de multiplicació complexa per l'anell d'enters de $\mathbb{Q}(i)$ (ordre 2) o $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (ordre 3).

Un tipus molt particular de punts de multiplicació complexa són els punts de multiplicació complexa especial: aquells punts de multiplicació complexa per Λ fixos per una transformació $\gamma \in \Phi(\Lambda^*)$ de determinant DN.

Una discussió detallada del càlcul de punts de multiplicació complexa es pot trobar a [AB04].

1.3 Les corbes de Shimura $X(D,N)$

Siguin D, N nombres naturals. Suposem que D és producte d'un nombre parell de primers i que N és coprimer amb D. Fixem H una $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions indefinida de discriminant D, $\mathcal{O}(D,N)$ un ordre d'Eichler de nivell N en H i una immersió $\Phi : H \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Considerem el grup de transformacions $\Gamma(D,N)$ associat a l'ordre $\mathcal{O}(D,N)$ i Φ.

El grup $\Gamma(D,N) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ és un grup fuchsià de primera espècie que actua en el semiplà superior. El quocient $\Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ és una superfície de Riemann. La teoria de Shimura dóna un model canònic $X(D,N)$ per a $\Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ i una interpretació modular.

El model canònic $X(D,N)$ està determinat per les propietats següents:

1. $X(D,N)$ és una corba projectiva definida sobre $\mathbb{Q}$.
2. Existeix un morfisme $j = j_{(D,N)} : \mathcal{H} \to X(D,N)(\mathbb{C})$ que factoritza en un isomorfisme entre l'espai analític $\Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ i un obert (per la topologia de Zariski) de $X(D,N)(\mathbb{C})$.
3. Sigui $z \in \Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ un punt de multiplicació complexa per a un ordre Λ d'un cos quadràtic imaginari F. Aleshores, $H_\Lambda = F(j(z))$, on H_Λ és el cos de classes d'anell de Λ, és a dir, l'extensió abeliana de K no ramificada fora del conductor de Λ tal que $\mathrm{Gal}(H_\Lambda|F) \cong \mathrm{Pic}(\Lambda)$, el grup de Picard de Λ.

La corba $X(D,N)$ s'anomena la corba de Shimura associada al subgrup $\Gamma(D,N)$.

Observació.

- En el cas $D = 1$, la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ és una àlgebra de quaternions no ramificada i la corba de Shimura corresponent a $\Gamma(1,N)$ és la corba modular $X_0(N)$.
- La tercera propietat es pot complementar amb l'acció del grup de Galois sobre els punts de multiplicació complexa, això ho dóna la llei de reciprocitat de Shimura.

Per altra banda, la interpretació modular de $X(D,N)$ és la següent: un punt en $X(D,N)(\mathbb{C})$ correspon a una classe d'isomorfisme de ternes (A,i,G) on A és una superfície abeliana principalment polaritzada, $i : H \hookrightarrow \mathrm{End}^0(A) = \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ és una immersió tal que $i(\mathcal{O}(D,1)) \subset \mathrm{End}(A)$ i G és un subgrup dels punts de N-torsió $A[N]$ de A que és un $\mathcal{O}(D,N)$-mòdul cíclic.

Fixem la corba de Shimura $X(D,N)$ i un domini fonamental per a $\Gamma(D,N)$. Considerem els invariants següents: $V(D,N)$ el volum hiperbòlic del domini fonamental; $e_i(D,N)$ el nombre de cicles el·líptics d'ordre i; $e_\infty(D,N)$ el nombre de cicles parabòlics i $g(D,N)$ el gènere. Aleshores, tenim la següent descripció d'aquests invariants, cf. [AB04], [Vig80].

Proposició 4. *Considerem la corba de Shimura $X(D,N)$. Aleshores, els cicles el·líptics són d'ordres 2 i 3. A més, el nombre de cicles el·líptics, el volum i el gènere estan donats per:*

$$e_2(D,N) = \begin{cases} \prod_{p|D}\left(1-\left(\frac{-4}{p}\right)\right)\prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-4}{p}\right)\right) & si\ 4 \nmid N, \\ 0 & si\ 4 \mid N. \end{cases}$$

$$e_3(D,N) = \begin{cases} \prod_{p|D}\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right) & si\ 9 \nmid N, \\ 0 & si\ 9 \mid N. \end{cases}$$

$$\frac{V(D,N)}{2\pi} = \frac{N}{6}\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{p|D}(p-1).$$

$$2-2g(D,N) = -\frac{V(D,N)}{2\pi} + \frac{1}{2}e_2(D,N) + \frac{2}{3}e_3(D,N) + e_\infty(D,N).$$

$\square$

Capítol 2

Alguns dominis fonamentals en el cas $D = 6$

Per a construir els dominis fonamentals utilitzarem els resultats que hem vist en 1.1; més concretament, però de manera essencial, el teorema 1.

2.1 Un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$

Comencem observant que el volum hiperbòlic d'un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$ és $2\pi/3$, cf. proposició 4.

Observem que el punt $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}i = i\sqrt{(2-\sqrt{3})} \in \mathcal{H}$ no és fix per cap transformació de $\Gamma(6,1)$ diferent de la identitat. Per tant, prenem

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

que porta el punt $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}i$ a ∞. Aplicarem el teorema 1 al grup $\eta\Gamma(6,1)\eta^{-1}$ per a obtenir un domini fonamental $\mathcal{D}'$ per a aquest grup; el domini fonamental que busquem serà, essencialment, $\mathcal{D} = \eta^{-1}(\mathcal{D}')$. Més precisament,

$$\mathcal{D} = \overline{\eta^{-1}\left(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{\gamma\in\Gamma(6,1)-\{Id\}} \overline{D}_{\eta\gamma\eta^{-1}}\right)} \bigcap \mathcal{H} = \overline{\left(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{\gamma\in\Gamma(6,1)-\{Id\}} \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\gamma\eta^{-1}}\right)} \bigcap \mathcal{H},$$

on les adherències estan preses en $\mathbb{C}_\infty$.

Escollim les transformacions de $\Gamma(6,1)$ donades per

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & \rho_2 &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
\rho_3 &= \rho_2^2, & \rho_4 &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
\rho_5 &= \rho_4^2, & \rho_6 &= \begin{bmatrix} 0 & -2+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

és una comprovació immediata veure que, si escrivim $D(o,r)$ el disc euclidià obert de centre o i radi r,

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_1\eta^{-1}} &= \mathbb{C}_\infty - D(0,1), \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_2\eta^{-1}} &= \overline{D(-3+2\sqrt{3}, \sqrt{2}(2-\sqrt{3}))}, \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_3\eta^{-1}} &= \overline{D(\sqrt{3}, \sqrt{2})}, \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_4\eta^{-1}} &= \overline{D(3-2\sqrt{3}, \sqrt{2}(2-\sqrt{3}))}, \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_5\eta^{-1}} &= \overline{D(-\sqrt{3}, \sqrt{2})}, \\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_6\eta^{-1}} &= \overline{D(0, 2-\sqrt{3})}.
\end{aligned}$$

A més a més,

$$\overline{\left(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{i=1}^{6} \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_i\eta^{-1}}\right)} \bigcap \mathcal{H}$$

és el polígon hiperbòlic de vèrtexs $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$, on

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{-1+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}, & P_2 &= \frac{-1+i}{1+\sqrt{3}}, & P_3 &= \frac{-1+\sqrt{2}i}{3+2\sqrt{3}}, \\
P_4 &= (2-\sqrt{3})i, & P_5 &= \frac{(1+\sqrt{2}i)}{3+2\sqrt{3}}, & P_6 &= \frac{1+i}{1+\sqrt{3}}, \\
P_7 &= \frac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}, & P_8 &= i.
\end{aligned}$$

Els angles interiors en cada vèrtex són, respectivament, $\{\pi/2, 2\pi/3, \pi/2, \pi, \pi/2, 2\pi/3, \pi/2, \pi\}$ i, en conseqüència, el volum del polígon hiperbòlic és $(8-2)\pi - (\pi/2+2\pi/3+\pi/2+\pi+\pi/2+2\pi/3+\pi/2+\pi) = 2\pi/3$. Com que ja sabem que aquest polígon conté un domini fonamental i el seu volum i el d'un domini fonamental coincideixen, aquest polígon és un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$.

Resumim algunes propietats d'aquest domini en el teorema següent.

Teorema 4. *Un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$ és determinat per l'octàgon hiperbòlic que té per vèrtexs els $\{P_i\}_{i=1}^{8}$ anteriors.*

1. *Els angles en els vèrtexs són, respectivament, $\{\pi/2, 2\pi/3, \pi/2, \pi, \pi/2, 2\pi/3, \pi/2, \pi\}$.*

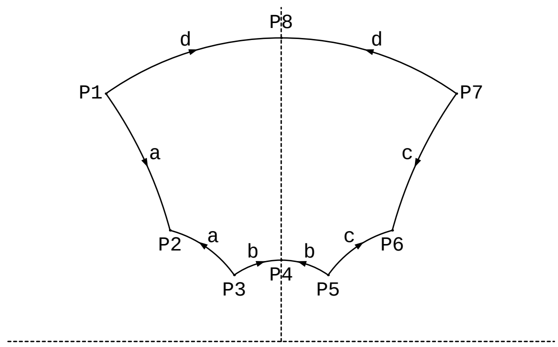


Figura 2.1: $\Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$

2. *Els vèrtexs* $\{P_2, P_4, P_6, P_8\}$ *són el·líptics i les corresponents transformacions el·líptiques de* $\Gamma(6,1)$ *que els fixen són*

$$\gamma_{P_2} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{P_4} = \begin{bmatrix} 0 & -2+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\gamma_{P_6} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{P_8} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. *El seu volum hiperbòlic és* $2\pi/3$ *i el gènere de* $\Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$ *és* 0.

4. $\{P_4, P_8\}$ *són els vèrtexs el·líptics d'ordre* 2 *i cadascun d'ells constitueix un cicle el·líptic d'ordre* 2.

5. $\{P_2, P_6\}$ *són els vèrtexs el·líptics d'ordre* 3 *i cadascun d'ells constitueix un cicle el·líptic d'ordre* 3. *A més,* $\gamma_{P_2}(P_3) = P_1$ *i* $\gamma_{P_6}(P_5) = P_7$.

6. $\{P_1, P_3, P_5, P_7\}$ *constitueixen un cicle accidental.*

7. *Les identificacions dels costats estan donades per:*

$$\begin{array}{l} (P_1P_2, P_3P_2) \text{ mitjançant } \gamma_{P_2}^{-1}, \\ (P_3P_4, P_5P_4) \text{ mitjançant } \gamma_{P_4}, \\ (P_5P_6, P_7P_6) \text{ mitjançant } \gamma_{P_6}, \\ (P_7P_8, P_1P_8) \text{ mitjançant } \gamma_{P_8}. \end{array}$$

8. *Una presentació de* $\Gamma(6,1)$ *és*

$$\langle \gamma_{P_2}, \gamma_{P_4}, \gamma_{P_6}, \gamma_{P_8} : \gamma_{P_4}^2 = \gamma_{P_8}^2 = \gamma_{P_2}^3 = \gamma_{P_6}^3 = \gamma_{P_8}\gamma_{P_6}\gamma_{P_4}\gamma_{P_2}^{-1} = 1\rangle.$$

□

A partir d'aquest domini fonamental que hem calculat determinarem un domini fonamental, també simètric respecte l'eix imaginari, amb tots els vèrtexs el·líptics, o sigui, sense cicles accidentals. Per aconseguir-ho, a partir del polígon anterior, només cal moure els triangles hiperbòlics $P_2P_3P_4$ i $P_4P_5P_6$ per γ_{P_2} i γ_{P_6} respectivament. Així, obtenim un nou domini fonamental, que és el que apareix a [AB04]. Com abans, resumim en el resultat següent les propietats més destacables d'aquest domini fonamental.

Teorema 5. *L'hexagon hiperbòlic de vèrtexs* $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$*, on*

$$v_1 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \qquad v_2 = P_2 = \frac{-1+i}{1+\sqrt{3}}, \quad v_3 = P_4 = (2-\sqrt{3})i,$$
$$v_4 = P_6 = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}}, \qquad v_5 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \qquad v_6 = P_8 = i,$$

determina un domini fonamental per a $\Gamma(6,1)$*.*

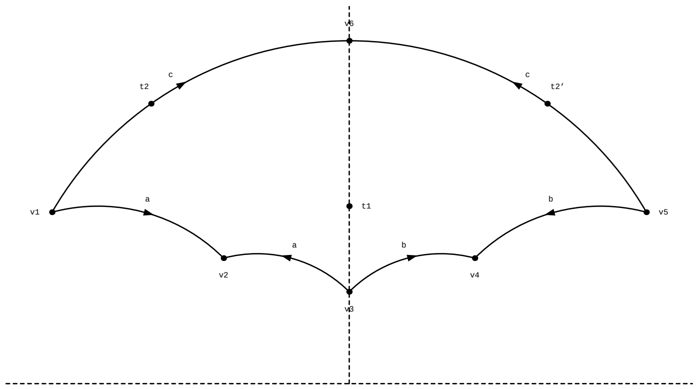


Figura 2.2: $\Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$

- *Els angles en aquests vèrtexs són* $\{\pi/4, 2\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi/4, \pi\}$*, respectivament.*
- *El seu volum hiperbòlic és* $V(6,1) = 2\pi/3$ *i el gènere de* $\Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$ *és* 0.
- *Tots els vèrtexs són el·líptics i les transformacions de* $\Gamma(6,1)$ *que els fixen són:*

$$\gamma_{v_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ -2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{v_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix},$$
$$\gamma_{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & -2+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_{v_4} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix},$$
$$\gamma_{v_5} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{v_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Hi ha 4 vèrtexs el·líptics d'ordre 2,* $\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$*, repartits en dos cicles el·líptics d'ordre 2,* $\{v_6\}$ *i* $\{v_1, v_3, v_5\}$*. A més,* $\gamma_{v_2}(v_3) = v_1$ *i* $\gamma_{v_4}(v_3) = v_5$*.*
- *Hi ha 2 vèrtexs el·líptics d'ordre 3,* $\{v_2, v_4\}$*, repartits en dos cicles el·líptics d'ordre 3,* $\{v_2\}$ *i* $\{v_4\}$*.*
- *Les identificacions de costats són:*

$$\begin{array}{l} (v_2v_3, v_2v_1) \text{ mitjançant } \gamma_{v_2}, \\ (v_3v_4, v_5v_4) \text{ mitjançant } \gamma_{v_4}, \\ (v_5v_6, v_1v_6) \text{ mitjançant } \gamma_{v_6}. \end{array}$$

- *Una presentació de* $\Gamma(6,1)$ *és*

$$\langle \gamma_{v_2}, \gamma_{v_4}, \gamma_{v_6} : \gamma_{v_2}^3 = \gamma_{v_4}^3 = \gamma_{v_6}^2 = (\gamma_{v_2}^{-1}\gamma_{v_6}\gamma_{v_4})^2 = 1 \rangle.$$

- *Hi ha 2 punts de multiplicació complexa especial, associats a l'ordre quadràtic de conductor 1 de* $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$*:*

$$\tau_1 = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2}, \quad \tau_2 = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{6}i}{3}.$$

Notem que τ_2 *és a la frontera del nostre domini i, per tant, té un altre representant en el mateix domini,*

$$\tau_2' = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}i}{3}.$$

$\square$

2.2 Un domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$

Com hem fet per a $\Gamma(6,1)$, construirem un domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$ tenint en compte que d'entrada ja sabem que el volum hiperbòlic d'un domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$ en $\mathcal{H}$ ha de ser 4π, cf. proposició 4.

Comencem observant que el punt $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}i \in \mathcal{H}$ no és fix per cap transformació de $\Gamma(6,5)$ i prenem

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

que porta el punt $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}i$ a ∞. Així, $\eta\Gamma(6,5)\eta^{-1}$ té la propietat que cap element d'aquest grup no fixa ∞.

Per tant, aplicant el teorema 1, un domini fonamental en $\mathbb{C}_\infty$ per a aquest grup està donat per

$$\mathcal{D}' = \overline{\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{\gamma\in\Gamma(6,5)-\{Id\}} \overline{D}_{\eta\gamma\eta^{-1}}},$$

on les adherències es prenen en $\mathbb{C}_\infty$. En conseqüència, $\eta^{-1}(\mathcal{D}')$ és un domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$ en $\mathbb{C}_\infty$ i, per tant, un domini fonamental en $\mathcal{H}$ és donat per

$$\mathcal{D} = \overline{\left(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{\gamma\in\Gamma(6,5)-\{Id\}} \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\gamma\eta^{-1}}\right)\bigcap \mathcal{H}},$$

on totes les adherències es prenen en $\mathbb{C}_\infty$.

Considerem les transformacions de $\Gamma(6,5)$ (notem que la segona coordenada de totes elles és múltiple de 5) donades per

$$\begin{array}{rcl rcl}
\rho_1 &=& (0,-5,2,0), & \rho_2 &=& (0,-5,7,-5),\\
\rho_3 &=& (1,0,-1,1), & \rho_4 &=& (1,10,-10,8),\\
\rho_5 &=& (2,-5,1,1), & \rho_6 &=& (2,-5,6,-4),\\
\rho_7 &=& (2,0,1,-1), & \rho_8 &=& (3,0,-2,4),\\
\rho_9 &=& (3,5,-1,-1), & \rho_{10} &=& (5,-5,7,-5),\\
\rho_{11} &=& (7,0,2,-4), & \rho_{12} &=& (9,-10,10,-8).
\end{array}$$

És una comprovació immediata veure que si escrivim

$$\begin{array}{rcl rcl}
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_1\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{6}{-1+3\sqrt{3}},\frac{\sqrt{10}}{-1+3\sqrt{3}}\right)}, & \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_2\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{-11}{6+7\sqrt{3}},\frac{\sqrt{10}}{6+7\sqrt{3}}\right)},\\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_3\eta^{-1}} &=& \mathbb{C}_\infty - D\left(\frac{3}{2-\sqrt{3}},\frac{\sqrt{10}}{2-\sqrt{3}}\right), & \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_4\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{-3\sqrt{3}}{23+13\sqrt{3}},\frac{\sqrt{5}}{23+13\sqrt{3}}\right)},\\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_5\eta^{-1}} &=& \mathbb{C}_\infty - D\left(\frac{-1}{3(2-\sqrt{3})},\frac{\sqrt{10}}{3(2-\sqrt{3})}\right), & \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_6\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{-6}{11+7\sqrt{3}},\frac{\sqrt{10}}{11+7\sqrt{3}}\right)},\\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_7\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{3}{7+4\sqrt{3}},\frac{\sqrt{10}}{7+4\sqrt{3}}\right)}, & \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_8\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{-7\sqrt{3}}{17+7\sqrt{3}},\frac{\sqrt{5}}{17+7\sqrt{3}}\right)},\\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_9\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{11}{9+8\sqrt{3}},\frac{\sqrt{10}}{9+8\sqrt{3}}\right)}, & \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_{10}\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{-1}{3(7+4\sqrt{3})},\frac{\sqrt{10}}{3(7+4\sqrt{3})}\right)},\\
\eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_{11}\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{3\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}},\frac{\sqrt{5}}{7-3\sqrt{3}}\right)}, & \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_{12}\eta^{-1}} &=& \overline{D\left(\frac{7\sqrt{3}}{13+3\sqrt{3}},\frac{\sqrt{5}}{13+3\sqrt{3}}\right)},
\end{array}$$

aleshores,

$$\overline{\left(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{k=1}^{12} \eta^{-1}\overline{D}_{\eta\rho_k\eta^{-1}}\right)\bigcap \mathcal{H}}$$

és el polígon hiperbòlic que té per vèrtexs els punts

$$\begin{array}{rclrcl}
A_1 &=& (2+\sqrt{3})i, & A_2 &=& \frac{-2\sqrt{3}+i}{4+\sqrt{3}},\\
A_3 &=& \frac{-9+\sqrt{2}i}{8+7\sqrt{3}}, & A_4 &=& \frac{-8+\sqrt{2}i}{9+7\sqrt{3}},\\
A_5 &=& \frac{-\sqrt{3}+i}{4+2\sqrt{3}}, & A_6 &=& \frac{-4+\sqrt{2}i}{15+9\sqrt{3}},\\
A_7 &=& \frac{-3+\sqrt{2}i}{17+10\sqrt{3}}, & A_8 &=& (7-4\sqrt{3})i,\\
A_9 &=& \frac{2\sqrt{3}+i}{5+2\sqrt{3}}, & A_{10} &=& \frac{9+\sqrt{2}i}{5+6\sqrt{3}},\\
A_{11} &=& \frac{8+\sqrt{2}i}{3+5\sqrt{3}}, & A_{12} &=& \frac{\sqrt{3}+i}{2},\\
A_{13} &=& \frac{4+\sqrt{2}i}{-3+3\sqrt{3}}, & A_{14} &=& \frac{3+\sqrt{2}i}{-4+3\sqrt{3}}.
\end{array}$$

Notem que els vèrtexs A_5 i A_{12} estan sobre els costats A_4A_6 i $A_{11}A_{13}$, respectivament; més endavant, quan estudiem les identificacions, veurem que cal introduir-los.

El volum hiperbòlic del polígon anterior és 4π; com que, per construcció, aquest polígon conté un domini fonamental, que ha de tenir el mateix volum, aquest polígon és un domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$. Resumim en el teorema següent les propietats principals d'aquest domini.

Teorema 6. *El polígon hiperbòlic* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}$ *determina un domini fonamental per al grup* $\Gamma(6,5)$.

a) Els angles interiors en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi, \pi/2, \pi/2\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 4π *i el gènere de* $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$ *és* 1.

c) Hi ha 6 *vèrtexs el·líptics,* $\{A_1, A_2, A_5, A_8, A_9, A_{12}\}$*, tots ells d'ordre* 2*, i les transformacions de* $\Gamma(6,5)$ *que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll}
\gamma_{A_1} = (1,5,-1,-2), & \gamma_{A_2} = (-1,5,-5,2),\\
\gamma_{A_5} = (2,-5,6,-4), & \gamma_{A_8} = (4,-10,11,-8),\\
\gamma_{A_9} = (2,-10,7,-4), & \gamma_{A_{12}} = (0,5,-2,0).
\end{array}$$

d) Hi ha 4 *cicles el·líptics, tots ells d'ordre* 2*:* $\{A_1, A_9\}$, $\{A_2, A_8\}$, $\{A_5\}$ *i* $\{A_{12}\}$*. Hi ha dos cicles accidentals:* $\{A_3, A_7, A_{10}, A_{14}\}$ *i* $\{A_4, A_{13}, A_{11}, A_6\}$.

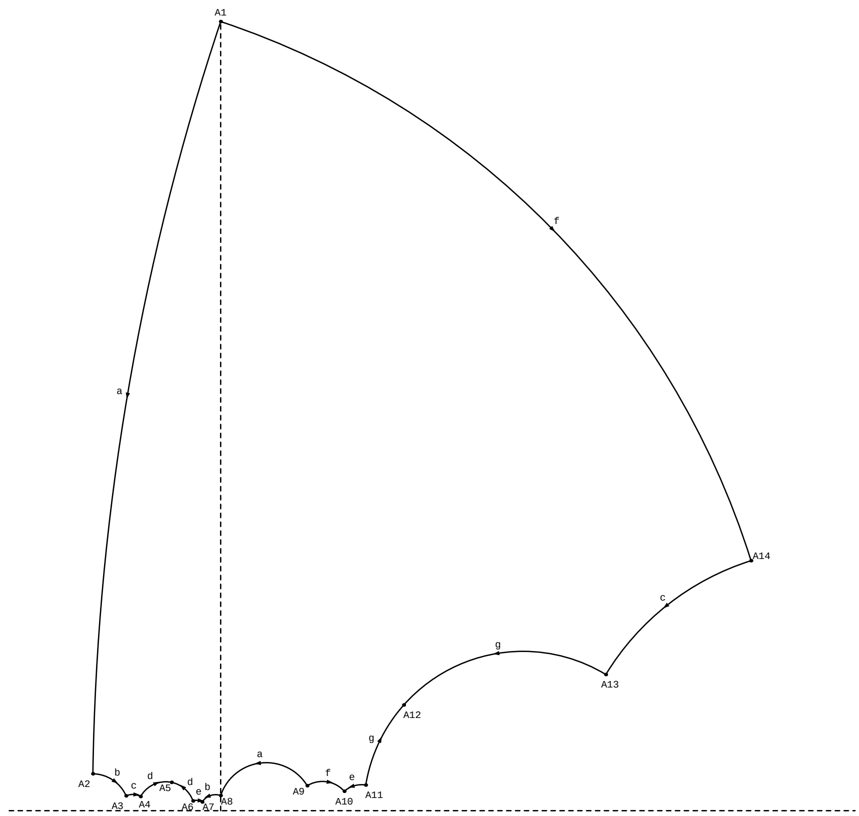


Figura 2.3: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{aligned}
&(A_1A_2, A_9A_8) \textit{ mitjançant } (1,0,-1,1),\\
&(A_2A_3, A_8A_7) \textit{ mitjançant } (0,5,-7,5),\\
&(A_3A_4, A_{14}A_{13}) \textit{ mitjançant } (-3,0,2,-4),\\
&(A_4A_5, A_6A_5) \textit{ mitjançant } \gamma_{A_5},\\
&(A_6A_7, A_{11}A_{10}) \textit{ mitjançant } (1,10,-10,8),\\
&(A_9A_{10}, A_1A_{14}) \textit{ mitjançant } (3,5,-1,-1),\\
&(A_{11}A_{12}, A_{13}A_{12}) \textit{ mitjançant } \gamma_{A_{12}}.
\end{aligned}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{A_5}^2 = \gamma_{A_{12}}^2 = 1,\\
&((3,5,-1,-1)(1,0,-1,1))^2 = 1,\\
&\big((1,0,-1,1)^{-1}(0,5,-7,5)\big)^2 = 1,\\
&(-3,0,2,-4)^{-1}(3,5,-1,-1)(1,10,-10,8)(0,5,-7,5) = 1,\\
&\gamma_{A_5}(1,10,-10,8)^{-1}\gamma_{A_{12}}(-3,0,-2,4) = 1.
\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\Gamma(6,5)$*.*

$\square$

Si movem els quadrilàters hiperbòlics $A_1A_{12}A_{13}A_{14}$ i $A_5A_6A_7A_8$ del domini anterior per $(-3,0,2,-4)^{-1}$ i $(1,10,-10,8)$, respectivament, obtenim un nou domini amb tots els vèrtexs el·líptics i només 10 costats. Més precisament, escrivim

$$\begin{array}{lllllll} B_1 & = & A_1, & & B_2 & = & A_2, \\ B_3 & = & \frac{-16\sqrt{3}+i}{38+15\sqrt{3}}, & & B_4 & = & \frac{-15\sqrt{3}+i}{38+16\sqrt{3}}, \\ B_5 & = & A_5, & & B_6 & = & A_8, \\ B_7 & = & A_9, & & B_8 & = & \frac{16\sqrt{3}+i}{31+8\sqrt{3}}, \\ B_9 & = & \frac{15\sqrt{3}+i}{28+6\sqrt{3}}, & & B_{10} & = & A_{12}; \end{array}$$

i així, el teorema anterior esdevé

Teorema 7. *El polígon hiperbòlic* $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9B_{10}$ *determina un domini fonamental per al grup* $\Gamma(6,5)$*.*

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/4, 3\pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/4, 3\pi/4\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 4π *i el gènere de* $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$ *és* 1*.*

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2 *i les transformacions de* $\Gamma(6,5)$ *que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{B_1} = (1,5,-1,-2), & \gamma_{B_2} = (-1,5,-5,2), \\ \gamma_{B_3} = (15,-45,53,-30), & \gamma_{B_4} = (-16,45,-54,32), \\ \gamma_{B_5} = (2,-5,6,-4), & \gamma_{B_6} = (4,-10,11,-8), \\ \gamma_{B_7} = (2,-10,7,-4), & \gamma_{B_8} = (8,-70,39,-16), \\ \gamma_{B_9} = (6,-65,34,-12), & \gamma_{B_{10}} = (0,5,-2,0). \end{array}$$

d) Hi ha 4 cicles el·líptics, tots ells d'ordre 2: $\{B_1,B_7,B_3\}$*,* $\{B_2,B_6,B_8\}$*,* $\{B_4,B_{10}\}$ *i* $\{B_5,B_9\}$*.*

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{array}{l} (B_1B_2, B_7B_6) \text{ mitjançant } (1,0,-1,1), \\ (B_2B_3, B_8B_7) \text{ mitjançant } (2,5,-9,9), \\ (B_3B_4, B_1B_{10}) \text{ mitjançant } (-3,0,2,-4), \\ (B_4B_5, B_{10}B_9) \text{ mitjançant } (2,5,-8,8), \\ (B_5B_6, B_9B_8) \text{ mitjançant } (1,10,-10,8). \end{array}$$

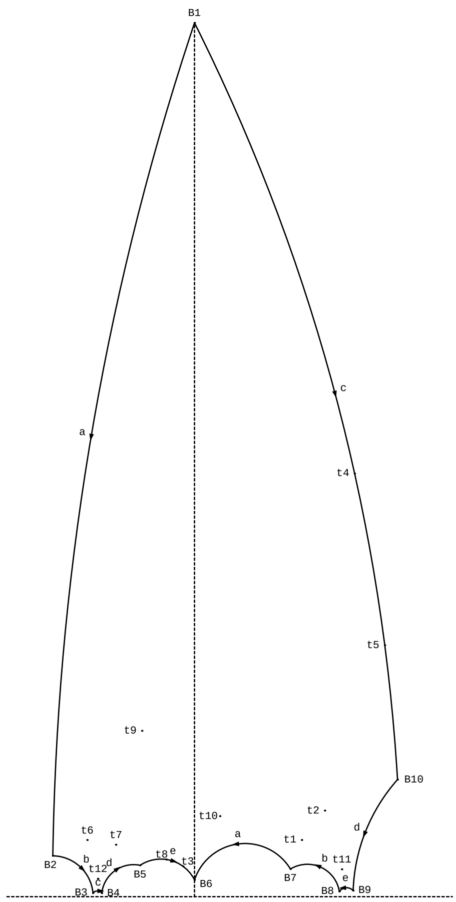


Figura 2.4: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned}
&\big((-3,0,2,-4)(2,5,-9,9)^{-1}(1,0,-1,1)\big)^2 = 1,\\
&\big((2,5,-9,9)^{-1}(1,10,-10,8)(1,0,-1,1)\big)^2 = 1,\\
&\big((2,5,-8,8)^{-1}(-3,0,2,-4)\big)^2 = 1,\\
&\big((2,5,-8,8)^{-1}(1,10,-10,8)\big)^2 = 1.
\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\Gamma(6,5)$.

h) Hi ha 12 *punts de multiplicació complexa especials, associats als ordres quadràtics de conductor* 1 *de* $\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$ *i* $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$. *Per a l'ordre de*

$\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$ *s'obtenen* 8 *punts:*

$$\begin{array}{llll} \tau_1 = \frac{5+\sqrt{7}i}{4(1+\sqrt{3})}, & \tau_2 = \frac{4+\sqrt{7}i}{2+3\sqrt{3}}, & \tau_3 = \frac{-1+\sqrt{7}i}{10+6\sqrt{3}}, & \tau_4 = \frac{1+\sqrt{7}i}{2(-1+\sqrt{3})}, \\ \tau_5 = \frac{2+\sqrt{7}i}{-1+2\sqrt{3}}, & \tau_6 = \frac{-5+\sqrt{7}i}{4(1+\sqrt{3})}, & \tau_7 = \frac{-4+\sqrt{7}i}{5+4\sqrt{3}}, & \tau_8 = \frac{-2+\sqrt{7}i}{8+5\sqrt{3}}; \end{array}$$

i per a l'ordre de $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$ *s'obtenen els* 4 *punts:*

$$\tau_9 = \frac{-1+\sqrt{10}i}{1+2\sqrt{3}}, \quad \tau_{10} = \frac{1+\sqrt{10}i}{4+3\sqrt{3}}, \quad \tau_{11} = \frac{17+\sqrt{10}i}{8+11\sqrt{3}}, \quad \tau_{12} = \frac{-17+\sqrt{10}i}{17+14\sqrt{3}}.$$

Notem que τ_3, τ_4, τ_5 *i* τ_8 *estan a la frontera del nostre domini i, per tant, tenen uns altres representants en el mateix domini,*

$$\tau_3' = \frac{47+\sqrt{7}i}{22+30\sqrt{3}}, \quad \tau_4' = \frac{-47+\sqrt{7}i}{46+38\sqrt{3}}, \quad \tau_5' = \frac{-46+\sqrt{7}i}{47+38\sqrt{3}}, \quad \tau_8' = \frac{46+\sqrt{7}i}{20+29\sqrt{3}},$$

que no hem representat.

$\square$

A partir d'ara, fixem aquest domini fonamental per a $\Gamma(6,5)$.

Capítol 3

Plegaments i simetries de $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$

3.1 Involucions Atkin-Lehner de $\Gamma(6,5)$

Per a estudiar amb més detall $\Gamma(6,5)$ ens fixarem en els plegaments de $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$, és a dir, els dominis fonamentals dels grups fuchsians que obtenim quan adjuntem involucions del grup d'Atkin-Lehner a $\Gamma(6,5)$, cf. [Ogg83]. En altres paraules, adjuntarem elements de la forma $w_k = \frac{1}{\sqrt{k}}x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ amb $x \in \mathcal{O}(6,5)$ i $\mathrm{nr}\, x = k$, per a $k|30$, que normalitzin $\Gamma(6,5)$ o, equivalentment, $\tilde{\Gamma}(6,5)$.

És una comprovació immediata veure que per als elements següents se satisfan aquestes propietats que requeríem:

$$\begin{aligned} w_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2,5,-1,-2), \\ w_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-5,0,-2,1), \\ w_5 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1,1); \end{aligned}$$

a partir dels quals construïm la resta d'involucions:

$$\begin{aligned} w_6 &= w_3^{-1}w_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-5,4,-2), \\ w_{10} &= w_2w_5 = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(3,15,-4,-6), \\ w_{15} &= w_3w_5 = \tfrac{1}{\sqrt{15}}(-7,5,-4,-1), \\ w_{30} &= w_6w_5 = \tfrac{1}{\sqrt{30}}(1,-10,7,-2). \end{aligned}$$

Com que aquests elements normalitzen $\Gamma(6,5)$, les involucions que determinen actuen sobre el nostre domini i, per tant, per a construir un domini fonamental per al grup $\langle\Gamma(6,5), w_k\rangle$, $k|30$, n'hi ha prou d'estudiar l'acció de cadascun d'aquests elements sobre el nostre domini. Això és el que farem a continuació.

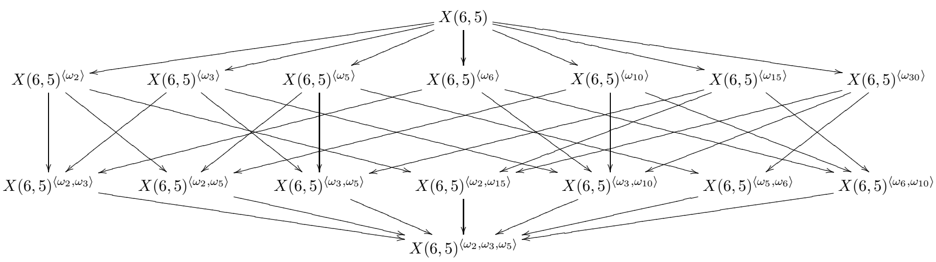
Observació. Les transformacions w_2, w_3, w_6 també defineixen involucions d'Atkin-Lehner per a $\Gamma(6,1)$. El corresponent estudi es pot trobar a [BT07b].

Fixem també els punts següents, que apareixeran més endavant:

$$
\begin{array}{rclrcl}
B_{11} & = & \frac{\sqrt{2}i}{1+\sqrt{3}}, & B_{12} & = & \frac{-1+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}, \\
B_{13} & = & \frac{3+\sqrt{30}i}{4\sqrt{3}-3}, & B_{14} & = & \frac{-9+\sqrt{30}i}{9+8\sqrt{3}}, \\
B_{15} & = & A_3, & B_{16} & = & A_4, \\
B_{17} & = & \frac{-17+\sqrt{10}i}{17+14\sqrt{3}}, & B_{18} & = & \frac{17+\sqrt{10}i}{8+11\sqrt{3}}, \\
B_{19} & = & \tau_9 = \frac{-1+\sqrt{10}i}{1+2\sqrt{3}}, & B_{20} & = & \frac{1+\sqrt{10}i}{4+3\sqrt{3}}, \\
B_{21} & = & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{10}i}{7+2\sqrt{3}}, & B_{22} & = & \frac{\sqrt{3}-\sqrt{10}i}{-11-6\sqrt{3}}, \\
B_{23} & = & A_{10}, & B_{24} & = & A_{11}.
\end{array}
$$

Aquests elements no només donen involucions de $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$, que és el que acabem de veure, sinó que es pot veure que cada element w_k dóna un automorfisme racional ω_k de $X(6,5)$, és a dir, un automorfime definit sobre $\mathbb{Q}$ i que actua en $X(6,5)(K)$ per a qualsevol cos de nombres K. Una introducció més extensa es pot trobar a [Ogg83]. Per a qualsevol conjunt W d'aquests automorfismes escriurem $X(6,5)^{\langle W\rangle}$ el quocient de la corba $X(6,5)$ pel subgrup generat per W.

Una última propietat que ens convindrà tenir present és que els recobriments donats per aquestes involucions són compatibles amb les projeccions naturals a nivell de quocients de $\mathcal{H}$. Així, tenim el diagrama



on totes les fletxes són morfismes definits sobre $\mathbb{Q}$ i, anàlogament, tindríem el diagrama a nivell de quocients de $\mathcal{H}$.

3.2 Simetries de $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$

De la mateixa manera que hem fet en el punt anterior, ens interessarà estudiar les simetries dels dominis que hem obtingut. Per a això, buscarem elements $s_k = \frac{1}{\sqrt{k}} x$ amb $x \in \mathcal{O}(6,5)$ de norma $-k$, per a $k|30$, que normalitzin $\Gamma(6,5)$. Aquests elements definiran, considerant-los en $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$, transformacions anticonformes de $\mathcal{H}$ que anomenarem simetries.

Tota la dificultat està en determinar un element s_1 ja que llavors, component amb w_k, obtenim tota la resta de simetries. És una comprovació immediata veure que podem prendre

$$s_1 = (-1, 5, -1, -3)$$

i aleshores,

$$\begin{aligned}
s_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 5, -2, -2) \in w_2 s_1 \Gamma(6,5), \\
s_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(7, -50, 19, 19) \in w_3 s_1 \Gamma(6,5), \\
s_5 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, -2, 2) \in w_5 s_1 \Gamma(6,5), \\
s_6 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}(-1, 0, -1, 2) \in w_2 w_3 s_1 \Gamma(6,5), \\
s_{10} &= \tfrac{1}{\sqrt{10}}(-4, 5, -3, -2) \in w_2 w_5 s_1 \Gamma(6,5), \\
s_{15} &= \tfrac{1}{\sqrt{15}}(-4, 10, -13, 8) \in w_3 w_5 s_1 \Gamma(6,5), \\
s_{30} &= \tfrac{1}{\sqrt{30}}(-3, 5, -6, 6) \in w_2 w_3 w_5 s_1 \Gamma(6,5).
\end{aligned}$$

Tots ells donen simetries de $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$ i cadascuna d'elles normalitza els subgrups $\langle \Gamma(6,5), w_k \rangle$, de manera que també donen simetries de tots els quocients per involucions d'Atkin-Lehner.

Observació. Convé destacar que s_1, s_2, s_3, s_6 també donen simetries de $\Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$.

Notem també que algunes d'aquestes transformacions són inversions; indiquem a continuació quines:

s_5	inversió respecte la circumferència ortogonal a l'eix real per B_{11}, B_{12};
s_6	inversió respecte la circumferència ortogonal a l'eix real per B_{13}, B_{14};
s_{15}	inversió respecte la circumferència ortogonal a l'eix real per B_2, B_5;
s_{30}	inversió respecte la circumferència ortogonal a l'eix real per B_5, B_{10}.

3.3 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle$

$w_2\Gamma(6,5)$ actua sobre el domini fonamental de $\Gamma(6,5)$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_7B_8B_9B_{10}$ mitjançant $w_2(-3, -10, 2, 3)$.
- El polígon hiperbòlic $B_2B_3B_4B_5$ es transforma en $B_6B_7B_{10}B_5$ mitjançant $w_2(5, 0, -2, 5)$.

Per tant, tenint en compte això, obtenim fàcilment el resultat següent.

Teorema 8. *L'hexàgon hiperbòlic* $B_1B_2B_5B_6B_7B_{10}$ *determin un domini fonamental per al grup* $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$.

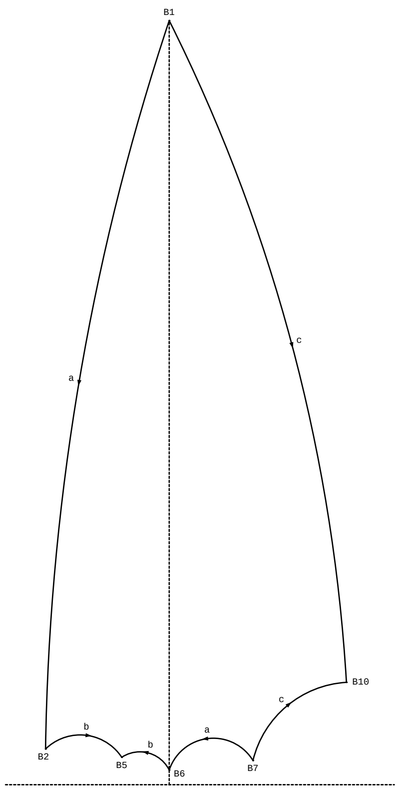


Figura 3.1: $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/4, \pi/2\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π *i el gènere de* $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$ *és* 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 4 *i les transformacions de* $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{B_1} = w_2(1,5,-1,-2), & \gamma_{B_2} = w_2(-3,5,1,-6), \\ \gamma_{B_5} = w_2(5,0,-2,5), & \gamma_{B_6} = w_2(11,15,-6,3), \\ \gamma_{B_7} = w_2(9,20,-5,-3), & \gamma_{B_{10}} = w_2(3,5,-1,-1). \end{array}$$

d) Hi ha 4 cicles el·líptics, tots ells d'ordre 4: $\{B_1, B_7\}$, $\{B_2, B_6\}$, $\{B_5\}$ *i* $\{B_{10}\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{aligned}
&(B_1B_2, B_7B_6) \textit{ mitjançant } (1, 0, -1, 1),\\
&(B_2B_5, B_6B_5) \textit{ mitjançant } w_2(5, 0, -2, 5),\\
&(B_7B_{10}, B_1B_{10}) \textit{ mitjançant } w_2(3, 5, -1, -1).
\end{aligned}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned}
&(w_2(3, 5, -1, -1)(1, 0, -1, 1))^4 = 1,\\
&\left((w_2(5, 0, -2, 5))^{-1}(1, 0, -1, 1)\right)^4 = 1,\\
&(w_2(5, 0, -2, 5))^4 = 1,\\
&(w_2(3, 5, -1, -1))^4 = 1.
\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6, 5), w_2 \rangle$.

h) s_5, s_6, s_{30} *són simetries de* $\langle \Gamma(6, 5), w_2 \rangle \backslash \mathcal{H}$ *que a més són inversions.*

□

3.4 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6, 5), w_3 \rangle$

$w_3\Gamma(6, 5)$ actua sobre el domini fonamental de $\Gamma(6, 5)$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_2B_3B_4B_5$ mitjançant $w_3(8, -5, 3, -3)$.
- El polígon hiperbòlic $B_5B_6B_7B_{10}$ es transforma en $B_{10}B_7B_8B_9$ mitjançant $w_3(5, -15, 18, -13)$.

Per tant, tenint en compte això, obtenim fàcilment el resultat següent.

Teorema 9. *L'hexàgon hiperbòlic* $B_1B_2B_5B_6B_7B_{10}$ *determina un domini fonamental per al grup* $\langle \Gamma(6, 5), w_3 \rangle$.

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/4, \pi/2\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π *i el gènere de* $\langle \Gamma(6, 5), w_3 \rangle \backslash \mathcal{H}$ *és* 1.

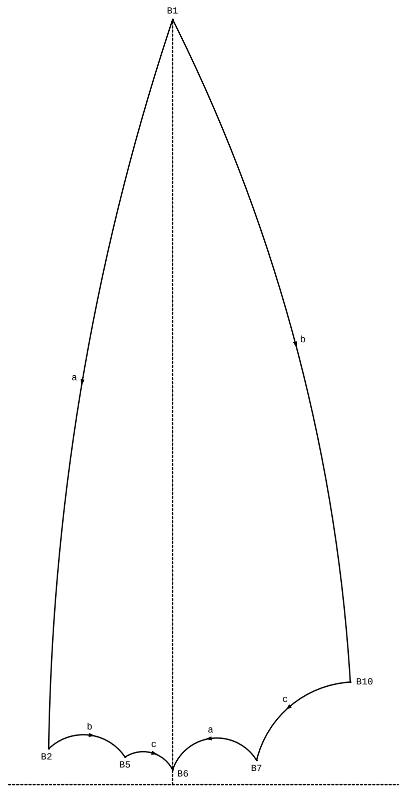


Figura 3.2: $\langle \Gamma(6,5), w_3 \rangle \backslash \mathcal{H}$

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2 *i les transformacions de* $\langle \Gamma(6,5), w_3 \rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{aligned} \gamma_{B_1} &= (1,5,-1,-2), & \gamma_{B_2} &= (-1,5,-5,2),\\ \gamma_{B_5} &= (2,-5,6,-4), & \gamma_{B_6} &= (4,-10,11,-8),\\ \gamma_{B_7} &= (2,-10,7,-4), & \gamma_{B_{10}} &= (0,5,-2,0). \end{aligned}$$

d) Hi ha 2 *cicles el·líptics, tots ells d'ordre* 2*:* $\{B_1, B_7, B_6, B_2\}$ *i* $\{B_5, B_{10}\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{aligned} &(B_1B_2, B_7B_6) \textit{ mitjançant } (1,0,-1,1),\\ &(B_2B_5, B_1B_{10}) \textit{ mitjançant } w_3(0,5,-7,5),\\ &(B_5B_6, B_{10}B_7) \textit{ mitjançant } w_3(5,-15,18,-13). \end{aligned}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\big(w_3(0,5,-7,5)(1,0,-1,1)^{-1}(w_3(5,-15,18,-13))^{-1}(1,0,-1,1)\big)^2 = 1,$$
$$\big((w_3(0,5,-7,5))^{-1}w_3(5,-15,18,-13)\big)^2 = 1.$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_3 \rangle$.

h) s_5, s_6, s_{30} *són simetries de* $\langle \Gamma(6,5), w_3 \rangle \backslash \mathcal{H}$ *que a més són inversions.*

$\square$

3.5 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle$

$w_5 \Gamma(6,5)$ actua sobre el domini fonamental de $\Gamma(6,5)$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_{10}B_5B_6B_7$ mitjançant w_5.
- El polígon hiperbòlic $B_2B_3B_4B_5$ es transforma en $B_9B_{10}B_7B_8$ mitjançant $w_5(-3,0,2,-4)$.

Per tant, tenint en compte això, obtenim fàcilment el resultat següent.

Teorema 10. *L'hexàgon hiperbòlic* $B_1B_2B_3B_4B_5B_{10}$ *determina un domini fonamental per al grup* $\langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle$.

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/4\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π *i el gènere de* $\langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$ *és* 1.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2 *i les transformacions de* $\langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{B_1} = (1,5,-1,-2), & \gamma_{B_2} = (-1,5,-5,2), \\ \gamma_{B_3} = (15,-45,53,-30), & \gamma_{B_4} = (-16,45,-54,32), \\ \gamma_{B_5} = (2,-5,6,-4), & \gamma_{B_{10}} = (0,5,-2,0). \end{array}$$

d) Hi ha 2 *cicles el·líptics, tots ells d'ordre* 2*:* $\{B_1, B_{10}, B_4, B_3\}$ *i* $\{B_2, B_5\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{array}{l} (B_1B_2, B_{10}B_5) \text{ mitjançant } w_5, \\ (B_2B_3, B_5B_4) \text{ mitjançant } w_5(1,-5,5,-2), \\ (B_3B_4, B_1B_{10}) \text{ mitjançant } (-3,0,2,-4). \end{array}$$

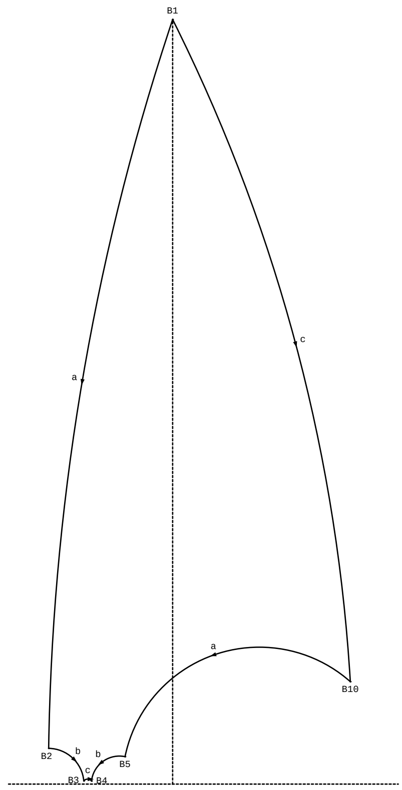


Figura 3.3: $\langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned}
&\big((-3,0,2,-4)(w_5(1,-5,5,-2))^{-1}(-3,0,2,-4)^{-1}w_5\big)^2 = 1,\\
&\big((w_5(1,-5,5,-2))^{-1}w_5\big)^2 = 1.
\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle$.

h) s_5, s_6, s_{15} són simetries de $\langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle \backslash \mathcal{H}$ que a més són inversions.

$\square$

Utilitzant els càlculs realitzats i tenint en compte que la resta d'involucions són composició de les anteriors, és fàcil construir la resta de quocients. Això és el que farem tot seguit.

3.6 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_6 \rangle$

$w_6\Gamma(6,5)$ actua sobre el domini fonamental de $\Gamma(6,5)$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_3B_4B_5B_{10}$ es transforma en $B_6B_7B_8B_9B_{10}B_5$ mitjançant w_6.

Teorema 11. *El decàgon hiperbòlic $B_1B_{12}B_2B_{15}B_3B_4B_{16}B_5B_{11}B_{10}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle \Gamma(6,5), w_6 \rangle$.*

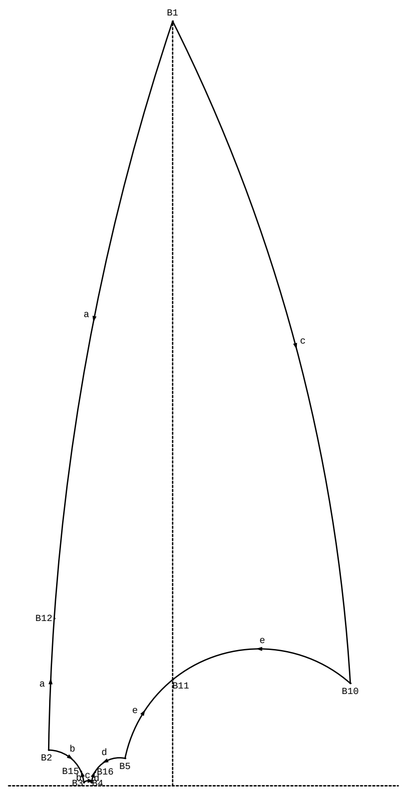


Figura 3.4: $\langle \Gamma(6,5), w_6 \rangle \backslash \mathcal{H}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi, \pi/2, \pi, \pi/4, \pi/4, \pi, \pi/2, \pi, \pi/4\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π i el gènere de $\langle \Gamma(6,5), w_6 \rangle \backslash \mathcal{H}$ és 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2 *i les transformacions de* $\langle\Gamma(6,5),w_6\rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll}
\gamma_{B_1}=(1,5,-1,-2), & \gamma_{B_{12}}=w_6(-1,0,1,-1),\\
\gamma_{B_2}=(-1,5,-5,2), & \gamma_{B_{15}}=w_6(2,5,-9,9),\\
\gamma_{B_3}=(15,-45,53,-30), & \gamma_{B_4}=(-16,45,-54,32),\\
\gamma_{B_{16}}=w_6(2,5,-8,8), & \gamma_{B_5}=(2,-5,6,-4),\\
\gamma_{B_{11}}=w_6, & \gamma_{B_{10}}=(0,5,-2,0).
\end{array}$$

d) Hi ha 6 *cicles el·líptics, tots ells d'ordre* 2*:* $\{B_1,B_2,B_3\}$*,* $\{B_{12}\}$*,* $\{B_{15}\}$*,* $\{B_4,B_5,B_{10}\}$*,* $\{B_{16}\}$ *i* $\{B_{11}\}$*.*

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{array}{l}
(B_1B_{12},B_2B_{12}) \text{ mitjançant } w_6(1,0,-1,1),\\
(B_2B_{15},B_3B_{15}) \text{ mitjançant } w_6(2,5,-9,9),\\
(B_3B_4,B_1B_{10}) \text{ mitjançant } (-3,0,2,-4),\\
(B_4B_{16},B_5B_{16}) \text{ mitjançant } w_6(2,5,-8,8),\\
(B_5B_{11},B_{10}B_{11}) \text{ mitjançant } w_6.
\end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l}
\gamma_{B_{12}}^2=\gamma_{B_{15}}^2=\gamma_{B_{16}}^2=\gamma_{B_{11}}^2=1,\\
((-3,0,2,-4)\gamma_{B_{15}}\gamma_{B_{12}})^2=1,\\
\left((-3,0,2,-4)^{-1}\gamma_{B_{11}}\gamma_{B_{16}}\right)^2=1.
\end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5),w_6\rangle$*.*

h) s_5*,* s_6*,* s_{15} *són simetries de* $\langle\Gamma(6,5),w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$ *que a més són inversions.*

□

3.7 Un domini fonamental per a $\langle\Gamma(6,5),w_{10}\rangle$

$w_{10}\Gamma(6,5)$ actua sobre el domini fonamental de $\Gamma(6,5)$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_4B_5B_2B_3$ mitjançant $w_{10}(-6,5,-4,-1)$,
- El polígon hiperbòlic $B_5B_6B_7B_{10}$ es transforma en $B_8B_9B_{10}B_7$ mitjançant $w_{10}(-12,-10,-2,7)$.

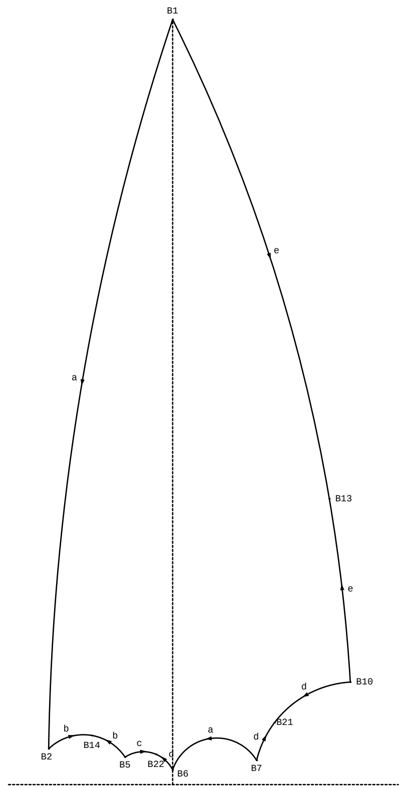


Figura 3.5: $\langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$

Teorema 12. *El decàgon hiperbòlic $B_1B_2B_{14}B_5B_{22}B_6B_7B_{21}B_{10}B_{13}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle$.*

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi/4, \pi, \pi/2, \pi, \pi/4, \pi/4, \pi, \pi/2, \pi\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π i el gènere de $\langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$ és 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2 i les transformacions de $\langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle$ que els fixen són:

$$\begin{array}{ll}
\gamma_{B_1} = (1,5,-1,-2), & \gamma_{B_2} = (-1,5,-5,2), \\
\gamma_{B_{14}} = w_{10}(-6,5,-4,-1), & \gamma_{B_5} = (2,-5,6,-4), \\
\gamma_{B_{22}} = w_{10}(14,0,6,-3), & \gamma_{B_6} = (4,-10,11,-8), \\
\gamma_{B_7} = (2,-10,7,-4), & \gamma_{B_{21}} = w_{10}(12,10,2,-7), \\
\gamma_{B_{10}} = (0,5,-2,0), & \gamma_{B_{13}} = w_{10}(-4,-5,0,3).
\end{array}$$

d) Hi ha 6 cicles el·líptics, tots ells d'ordre 2: $\{B_1, B_7, B_{10}\}$, $\{B_2, B_5, B_6\}$, $\{B_{14}\}$, $\{B_{22}\}$, $\{B_{21}\}$ *i* $\{B_{13}\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{array}{l} (B_1B_2, B_7B_6) \textit{ mitjançant } (1,0,-1,1), \\ (B_2B_{14}, B_5B_{14}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{14}}, \\ (B_5B_{22}, B_6B_{22}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{22}}, \\ (B_7B_{21}, B_{10}B_{21}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{21}}, \\ (B_{10}B_{13}, B_1B_{13}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{13}}. \end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l} \gamma_{B_{14}}^2 = \gamma_{B_{22}}^2 = \gamma_{B_{21}}^2 = \gamma_{B_{13}}^2 = 1, \\ (\gamma_{B_{13}}\gamma_{B_{21}}(1,0,-1,1))^2 = 1, \\ (\gamma_{B_{14}}\gamma_{B_{22}}(1,0,-1,1))^2 = 1. \end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle$.

h) s_5, s_6, s_{15} *i* s_{30} *són simetries de* $\langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$ *que a més són inversions.*

□

3.8 Un domini fonamental per a $\langle\Gamma(6,5), w_{15}\rangle$

$w_{15}\Gamma(6,5)$ actua sobre el domini fonamental de $\Gamma(6,5)$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_3B_4B_5B_{10}$ es transforma en $B_9B_{10}B_5B_6B_7B_8$ mitjançant $w_{15}(2,-10,12,-7)$.

Teorema 13. *El decàgon hiperbòlic* $B_1B_2B_5B_6B_7B_{10}$ *determina un domini fonamental per al grup* $\langle\Gamma(6,5), w_{15}\rangle$.

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/4, \pi/2\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és 2π *i el gènere de* $\langle\Gamma(6,5), w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$ *és* 1.

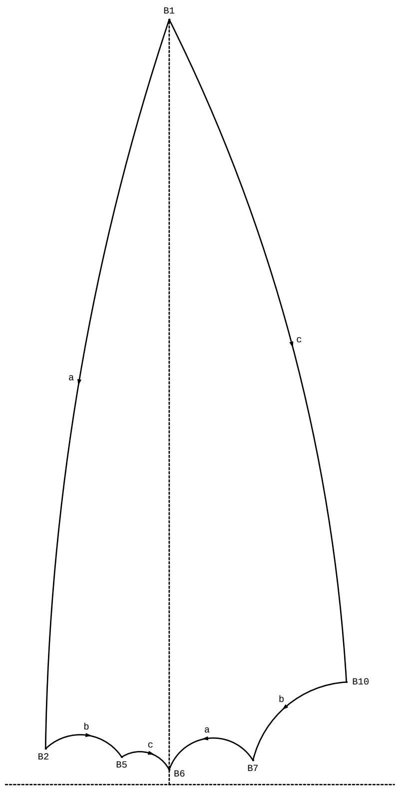


Figura 3.6: $\langle \Gamma(6,5), w_{15} \rangle \backslash \mathcal{H}$

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2 *i les transformacions de* $\langle \Gamma(6,5), w_{15} \rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{aligned} \gamma_{B_1} &= (1,5,-1,-2), & \gamma_{B_2} &= (-1,5,-5,2), \\ \gamma_{B_5} &= (2,-5,6,-4), & \gamma_{B_6} &= (4,-10,11,-8), \\ \gamma_{B_7} &= (2,-10,7,-4), & \gamma_{B_{10}} &= (0,5,-2,0). \end{aligned}$$

d) Hi ha 2 *cicles el·líptics, tots d'ordre* 2*:* $\{B_1, B_5, B_7\}$ *i* $\{B_2, B_6, B_{10}\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{aligned} &(B_1B_2, B_7B_6) \textit{ mitjançant } (1,0,-1,1), \\ &(B_2B_5, B_{10}B_7) \textit{ mitjançant } w_{15}(2,-10,12,-7), \\ &(B_5B_6, B_1B_{10}) \textit{ mitjançant } w_{15}(2,-5,6,-4). \end{aligned}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned} &\left((1,0,-1,1)^{-1} w_{15}(2,-10,12,-7)(w_{15}(2,-5,6,-4))^{-1}\right)^2 = 1, \\ &((w_{15}(2,-10,12,-7))w_{15}(2,-5,6,-4)(1,0,-1,1))^2 = 1. \end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5), w_{15}\rangle$.

h) s_5, s_6, s_{15} i s_{30} són simetries de $\langle\Gamma(6,5), w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$ que a més són inversions.

□

3.9 Un domini fonamental per a $\langle\Gamma(6,5), w_{30}\rangle$

$w_{30}\Gamma(6,5)$ actua sobre el domini fonamental de $\Gamma(6,5)$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_5B_{10}B_1B_2$ mitjançant w_{30},
- El polígon hiperbòlic $B_2B_3B_4B_5$ es transforma en $B_4B_5B_2B_3$ mitjançant $w_{30}(-3,0,2,-4)$,
- El polígon hiperbòlic $B_5B_6B_7B_{10}$ es transforma en $B_7B_{10}B_5B_6$ mitjançant $w_{30}(2,0,1,-1)$,
- El polígon hiperbòlic $B_7B_8B_9B_{10}$ es transforma en $B_9B_{10}B_7B_8$ mitjançant $w_{30}(-12,0,-7,9)$.

Teorema 14. *El polígon hiperbòlic $B_{19}B_2B_{15}B_{17}B_{16}B_5B_{20}B_7B_{23}B_{18}B_{24}B_{10}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle\Gamma(6,5), w_{30}\rangle$.*

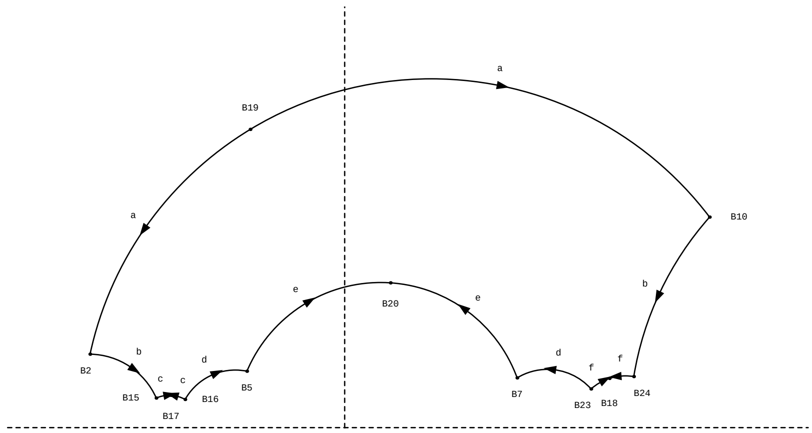


Figura 3.7: $\langle\Gamma(6,5), w_{30}\rangle\backslash\mathcal{H}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi, \alpha, \pi/2, \pi, \pi/2, \alpha, \pi, \pi - \alpha, \pi/2, \pi, \pi/2, \pi - \alpha\},$$

on $\alpha \in (0, \pi)$ *és tal que* $\cos\alpha = -1/\sqrt{26}$.

b) El seu volum hiperbòlic és 2π *i el gènere de* $\langle \Gamma(6,5), w_{30}\rangle \backslash \mathcal{H}$ *és* 0.

c) Hi ha 8 vèrtexs el·líptics d'ordre 2, $B_{19}, B_2, B_{17}, B_5, B_{20}, B_7, B_{18}$ *i* B_{10}*, i les transformacions de* $\langle \Gamma(6,5), w_{30}\rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{B_{19}} = w_{30}, & \gamma_{B_2} = (-1, 5, -5, 2), \\ \gamma_{B_{17}} = w_{30}(-3, 0, 2, -4), & \gamma_{B_5} = (2, -5, 6, -4), \\ \gamma_{B_{20}} = w_{30}(2, 0, 1, -1), & \gamma_{B_7} = (2, -10, 7, -4), \\ \gamma_{B_{18}} = w_{30}(-12, 0, -7, 9), & \gamma_{B_{10}} = (0, 5, -2, 0). \end{array}$$

d) Hi ha 6 *cicles el·líptics, tots d'ordre* 2, $\{B_{19}\}$, $\{B_2, B_{10}\}$, $\{B_{17}\}$, $\{B_5, B_7\}$, $\{B_{20}\}$ *i* $\{B_{18}\}$*. Hi ha un cicle accidental format per la resta de vèrtexs,* $\{B_{15}, B_{16}, B_{23}, B_{24}\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{array}{l} (B_{19}B_2, B_{19}B_{10}) \text{ mitjançant } \gamma_{B_{19}}, \\ (B_2B_{15}, B_{10}B_{24}) \text{ mitjançant } w_{30}(1, -5, 5, -2), \\ (B_{15}B_{17}, B_{16}B_{17}) \text{ mitjançant } \gamma_{B_{17}}, \\ (B_{16}B_5, B_{23}B_7) \text{ mitjançant } w_{30}(-4, 5, -6, 3), \\ (B_5B_{20}, B_7B_{20}) \text{ mitjançant } \gamma_{B_{20}}, \\ (B_{23}B_{18}, B_{24}B_{18}) \text{ mitjançant } \gamma_{B_{18}}. \end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l} \gamma_{B_{19}}^2 = \gamma_{B_{17}}^2 = \gamma_{B_{20}}^2 = \gamma_{B_{18}}^2 = 1, \\ \left(\gamma_{B_{19}}^{-1} w_{30}(1, -5, 5, -2)\right)^2 = 1, \\ \left(\gamma_{B_{20}}^{-1} w_{30}(-4, 5, -6, 3)\right)^2 = 1, \\ (w_{30}(1, -5, 5, -2))^{-1} \gamma_{B_{18}} w_{30}(-4, 5, -6, 3) \gamma_{B_{17}} = 1. \end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_{30}\rangle$.

h) s_5, s_6, s_{15} *i* s_{30} *són simetries de* $\langle \Gamma(6,5), w_{30}\rangle \backslash \mathcal{H}$ *que a més són inversions.*

□

Un cop estudiats tots aquests quocients, com que w_k, $k = 2, 3, 5$, també normalitza cadascun dels grups $\langle \Gamma(6,5), w_{k'}\rangle$ amb $k' \neq k$, podem estudiar els dobles plegaments.

3.10 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3 \rangle$

$\langle w_2, w_3, \Gamma(6,5)\rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle \Gamma(6,5), w_2\rangle$ o de $\langle \Gamma(6,5), w_3\rangle$, ja que els dos polígons són iguals, tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_6B_7B_{10}B_5$ mitjançant $w_3^{-1}w_2$.

Teorema 15. *L'hexàgon hiperbòlic $B_1B_{12}B_2B_5B_{11}B_{10}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3\rangle$.*

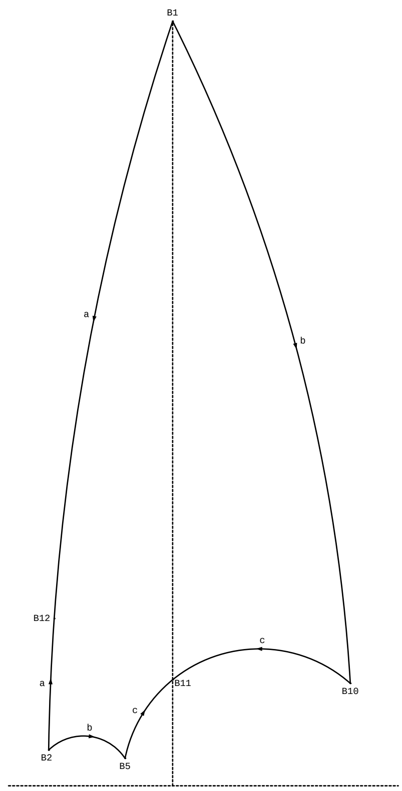


Figura 3.8: $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3\rangle \backslash \mathcal{H}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi, \pi/4, \pi/4, \pi, \pi/4\}.$$

b) El seu volum hiperbòlic és π i el gènere de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3\rangle \backslash \mathcal{H}$ és 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics: $\{B_{11}, B_{12}\}$ d'ordre 2 i $\{B_1, B_2, B_5, B_{10}\}$ d'ordre 4. Les transformacions de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3 \rangle$ que els fixen són:

$$\begin{array}{ll}
\gamma_{B_1} = w_2(1,5,-1,-2), & \gamma_{B_{12}} = w_3^{-1} w_2(-1,0,1,-1), \\
\gamma_{B_2} = w_2(-3,5,1,-6), & \gamma_{B_5} = w_2(5,0,-2,5), \\
\gamma_{B_{11}} = w_3^{-1} w_2, & \gamma_{B_{10}} = w_2(3,5,-1,-1).
\end{array}$$

d) Hi ha 4 cicles el·líptics: $\{B_1, B_2\}$, $\{B_5, B_{10}\}$ d'ordre 4 i $\{B_{12}\}$, $\{B_{11}\}$ d'ordre 2.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{array}{l}
(B_1B_{12}, B_2B_{12}) \textit{ mitjançant } w_3^{-1} w_2(-1,0,1,-1), \\
(B_2B_5, B_1B_{10}) \textit{ mitjançant } w_3(0,5,-7,5), \\
(B_5B_{11}, B_{10}B_{11}) \textit{ mitjançant } w_3^{-1} w_2.
\end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l}
\big(w_3(0,5,-7,5) w_3^{-1} w_2(-1,0,1,-1)\big)^4 = 1, \\
\big((w_3^{-1} w_2(-1,0,1,-1))^{-1} w_3(0,5,-7,5)\big)^4 = 1, \\
\gamma_{B_{11}}^2 = \gamma_{B_{12}}^2 = 1.
\end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3 \rangle$.

h) s_5 i s_6 són simetries de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3 \rangle \backslash \mathcal{H}$ que a més són inversions.

□

3.11 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_5 \rangle$

$\langle w_2, w_5, \Gamma(6,5) \rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_{10}B_5B_6B_7$ mitjançant w_5.

Teorema 16. *L'hexàgon hiperbòlic $B_1B_2B_{14}B_5B_{10}B_{13}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_5 \rangle$.*

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament,

$$\{\pi/4, \pi/4, \pi, \pi/4, \pi/4, \pi\}.$$

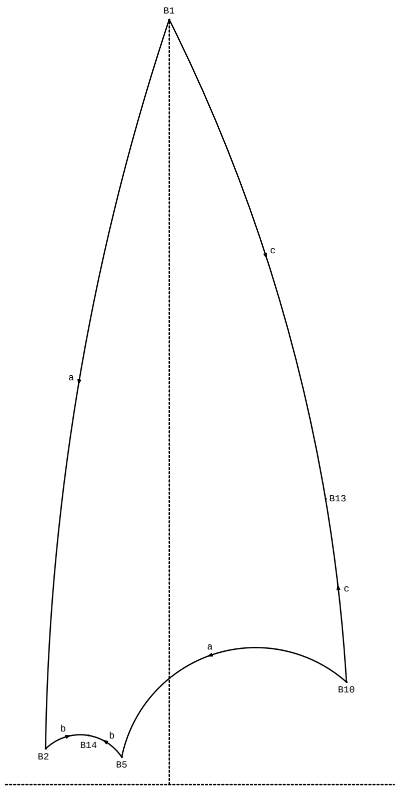


Figura 3.9: $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$

b) El seu volum hiperbòlic és π *i el gènere de* $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$ *és* 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics: $\{B_{13}, B_{14}\}$ *d'ordre* 2 *i* $\{B_1, B_2, B_5, B_{10}\}$ *d'ordre* 4. *Les transformacions de* $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll} \gamma_{B_1} = w_2(1,5,-1,-2), & \gamma_{B_2} = w_2(-3,5,1,-6), \\ \gamma_{B_{14}} = w_2w_5(-6,5,-4,-1), & \gamma_{B_5} = w_2(5,0,-2,5), \\ \gamma_{B_{10}} = w_2(3,5,-1,-1), & \gamma_{B_{13}} = w_2w_5(-4,-5,0,3). \end{array}$$

d) Hi ha 4 *cicles el·líptics:* $\{B_1, B_{10}\}$, $\{B_2, B_5\}$ *d'ordre* 4 *i* $\{B_{14}\}$, $\{B_{13}\}$ *d'ordre* 2.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$(B_1B_2, B_{10}B_5)$ *mitjançant* w_5,
(B_2B_{14}, B_5B_{14}) *mitjançant* $w_2w_5(-6,5,-4,-1)$,
$(B_{10}B_{13}, B_1B_{13})$ *mitjançant* $w_2w_5(-4,-5,0,3)$.

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned}
&(w_2 w_5(-4,-5,0,3)w_5)^4 = 1,\\
&\left(w_5^{-1} w_2 w_5(-6,5,-4,-1)\right)^4 = 1,\\
&\gamma_{B_{13}}^2 = \gamma_{B_{14}}^2 = 1.
\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle$.

h) s_5 i s_6 són simetries de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle \backslash \mathcal{H}$ que a més són inversions.

□

3.12 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle$

$\langle w_3, w_5, \Gamma(6,5)\rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle \Gamma(6,5), w_3\rangle$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_{10}B_5B_6B_7$ mitjançant w_5.

Teorema 17. *El quadrilàter hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle$.*

a) Els angles en els vèrtexs són tots iguals a $\pi/4$.

b) El seu volum hiperbòlic és π i el gènere de $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle \backslash \mathcal{H}$ és 1.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2. Les transformacions de $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle$ que els fixen són:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{B_1} = (1,5,-1,-2), \quad \gamma_{B_2} = (-1,5,-5,2),\\
&\gamma_{B_5} = (2,-5,6,-4), \quad \gamma_{B_{10}} = (0,5,-2,0).
\end{aligned}$$

d) Hi ha 1 sol cicle el·líptic, d'ordre 2, format pels quatre vèrtexs.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{aligned}
&(B_1B_2, B_{10}B_5) \text{ mitjançant } w_5,\\
&(B_2B_5, B_1B_{10}) \text{ mitjançant } w_3(0,5,-7,5).
\end{aligned}$$

f) L'única relació donada pel cicle ordinari és:

$$\left(w_3(0,5,-7,5)w_5^{-1}(w_3(0,5,-7,5))^{-1}w_5\right)^2 = 1,$$

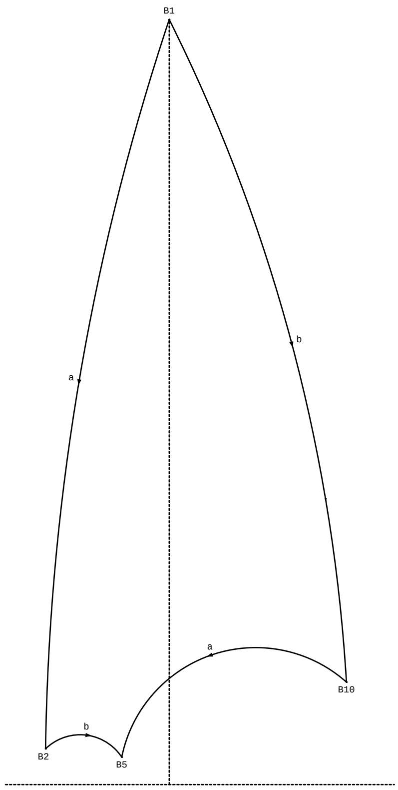


Figura 3.10: $\langle\Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle$.

h) s_5 i s_6 són simetries de $\langle\Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$ que a més són inversions.

□

3.13 Un domini fonamental per a $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_{15}\rangle$

$\langle w_2, w_{15}, \Gamma(6,5)\rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_5B_{10}B_1B_2$ mitjançant $w_2w_{15}(2,-5,6,-4)$,

- El polígon hiperbòlic $B_5B_6B_7B_{10}$ es transforma en $B_7B_{10}B_5B_6$ mitjançant $w_2w_{15}(7,-10,12,-9)$.

Teorema 18. *L'octàgon hiperbòlic $B_{19}B_{14}B_5B_{22}B_{20}B_{21}B_{10}B_{13}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle\Gamma(6,5),w_2,w_{15}\rangle$.*

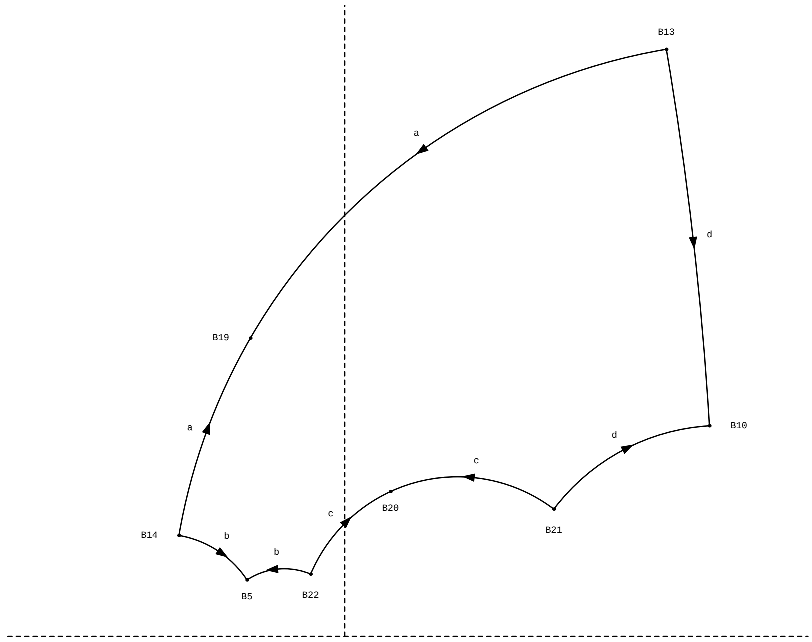


Figura 3.11: $\langle\Gamma(6,5),w_2,w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament, $\{\pi,\pi/2,\pi/2,\pi/2,\pi,\pi/2,\pi/2,\pi/2\}$.

b) El seu volum hiperbòlic és π i el gènere de $\langle\Gamma(6,5),w_2,w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$ és 0.

c) Hi ha 4 vèrtexs el·líptics: $\{B_5,B_{10}\}$ d'ordre 4 i $\{B_{19},B_{20}\}$ d'ordre 2. Les transformacions de $\langle\Gamma(6,5),w_2,w_{15}\rangle$ que els fixen són:

$$\gamma_{B_{19}}=w_2w_{15}(2,-5,6,-4),\qquad \gamma_{B_5}=w_2(5,0,-2,5),$$
$$\gamma_{B_{20}}=w_2w_{15}(7,-10,12,-9),\quad \gamma_{B_{10}}=w_2(3,5,-1,-1).$$

d) Hi ha 2 cicles el·líptics d'ordre 2 i dos d'ordre 4 formats per cadascun dels quatre vèrtexs i un cicle accidental format per la resta de vèrtexs.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{aligned}&(B_{19}B_{14}, B_{19}B_{13}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{19}},\\&(B_{14}B_5, B_{22}B_5) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_5},\\&(B_{22}B_{20}, B_{21}B_{20}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{20}},\\&(B_{21}B_{10}, B_{13}B_{10}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{10}}.\end{aligned}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned}&\gamma_{B_{19}}^2 = \gamma_{B_{20}}^2 = \gamma_{B_5}^4 = \gamma_{B_{10}}^4 = 1,\\&\gamma_{B_{10}}\gamma_{B_{20}}\gamma_{B_5}\gamma_{B_{19}} = 1.\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_{15}\rangle$.

h) s_5, s_6 *i* s_{15} *són simetries de* $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$ *que a més són inversions.*

□

3.14 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_{10}\rangle$

$\langle w_3, w_{10}, \Gamma(6,5)\rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle \Gamma(6,5), w_3\rangle$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_5B_{10}B_1B_2$ mitjançant $w_3w_{10}(-14, 0, -6, 3)$,
- El polígon hiperbòlic $B_5B_6B_7B_{10}$ es transforma en $B_7B_{10}B_5B_6$ mitjançant $w_3w_{10}(-37, -15, -11, 14)$.

Teorema 19. *L'octàgon hiperbòlic* $B_{19}B_{14}B_5B_{22}B_{20}B_{21}B_{10}B_{13}$ *determina un domini fonamental per al grup* $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_{10}\rangle$.

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament, $\{\pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2\}$.

b) El seu volum hiperbòlic és π *i el gènere de* $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$ *és* 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2. *Les transformacions de* $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_{10}\rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{aligned}&\gamma_{B_{19}} = w_3w_{10}(-14, 0, -6, 3), && \gamma_{B_{14}} = w_{10}(-6, 5, -4, -1),\\&\gamma_{B_5} = (2, -5, 6, -4), && \gamma_{B_{22}} = w_{10}(14, 0, 6, -3),\\&\gamma_{B_{20}} = w_3w_{10}(-37, -15, -11, 14), && \gamma_{B_{21}} = w_{10}(12, 10, 2, -7),\\&\gamma_{B_{10}} = (0, 5, -2, 0), && \gamma_{B_{13}} = w_{10}(-4, -5, 0, 3).\end{aligned}$$

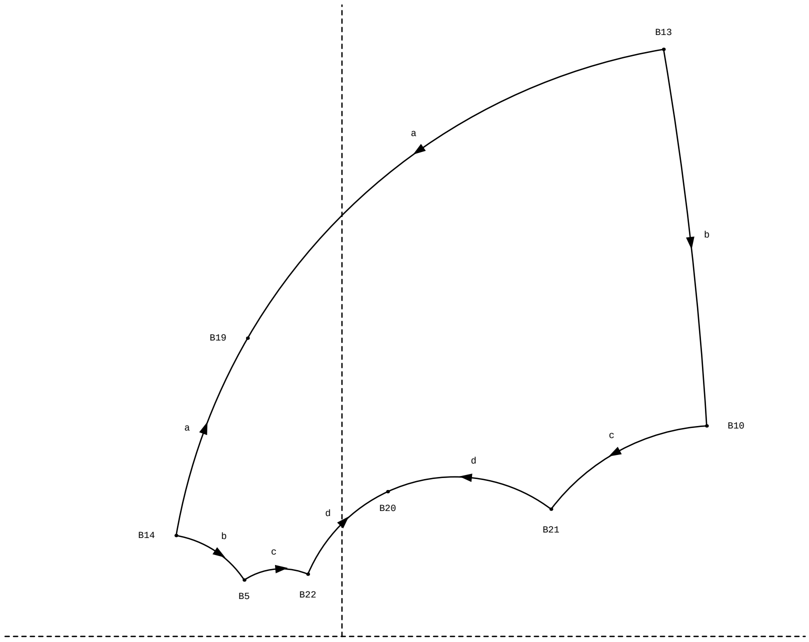


Figura 3.12: $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_{10} \rangle \backslash \mathcal{H}$

d) Hi ha 5 cicles el·líptics d'ordre 2, $\{B_{19}\}$, $\{B_{14}, B_{13}\}$, $\{B_{22}, B_{21}\}$, $\{B_{20}\}$ *i* $\{B_5, B_{10}\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{aligned}
&(B_{19}B_{14}, B_{19}B_{13}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{19}},\\
&(B_{14}B_5, B_{13}B_{10}) \textit{ mitjançant } w_3(0,5,-7,5),\\
&(B_5B_{22}, B_{10}B_{21}) \textit{ mitjançant } w_3(5,-15,18,-13),\\
&(B_{22}B_{20}, B_{21}B_{20}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{20}}.
\end{aligned}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{B_{19}}^2 = \gamma_{B_{20}}^2 = 1,\\
&((w_3(5,-15,18,-13))^{-1} w_3(0,5,-7,5))^2 = 1,\\
&(\gamma_{B_{19}}^{-1} w_3(0,5,-7,5))^2 = 1,\\
&((w_3(5,-15,18,-13))^{-1} \gamma_{B_{20}})^2 = 1.
\end{aligned}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_{10} \rangle$.

h) s_5, s_6 *i* s_{30} *són simetries de* $\langle \Gamma(6,5), w_3, w_{10} \rangle \backslash \mathcal{H}$ *que a més són inversions.*

$\square$

3.15 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_5, w_6 \rangle$

$\langle w_5, w_6, \Gamma(6,5) \rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle \Gamma(6,5), w_5 \rangle$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_5B_{10}B_1B_2$ mitjançant $w_5w_6(1,0,-1,1)$,
- El polígon hiperbòlic $B_2B_3B_4B_5$ es transforma en $B_4B_5B_2B_3$ mitjançant $w_5w_6(-1,-10,15,-13)$.

Teorema 20. *L'octàgon hiperbòlic $B_{19}B_{12}B_2B_{15}B_{17}B_{16}B_5B_{11}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle \Gamma(6,5), w_5, w_6 \rangle$.*

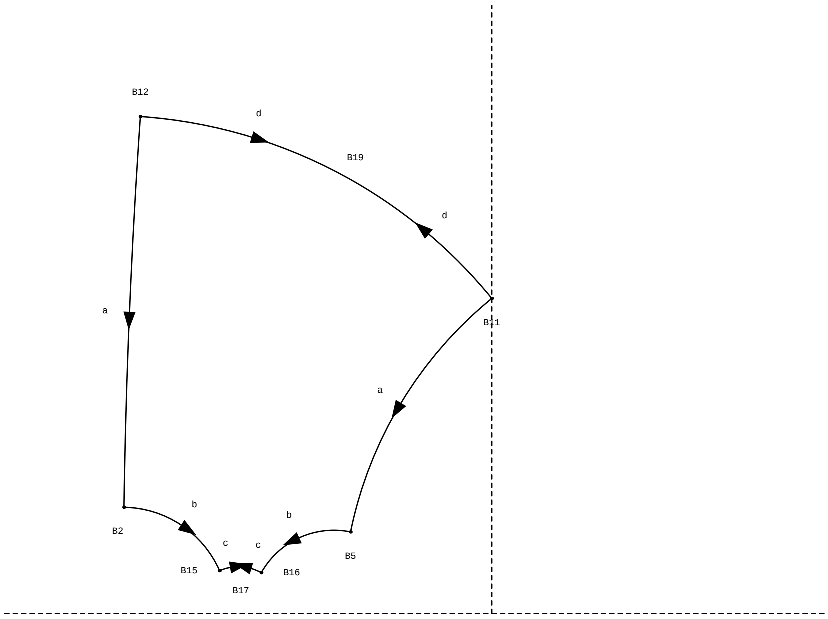


Figura 3.13: $\langle \Gamma(6,5), w_5, w_6 \rangle \backslash \mathcal{H}$

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament, $\{\pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2\}$.

b) El seu volum hiperbòlic és π i el gènere de $\langle \Gamma(6,5), w_5, w_6 \rangle \backslash \mathcal{H}$ és 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2. Les transformacions de $\langle \Gamma(6,5), w_5, w_6 \rangle$

que els fixen són:

$$\begin{array}{ll} \gamma_{B_{19}} = w_5.w_6.(1,0,-1,1), & \gamma_{B_{12}} = w_6(-1,0,1,-1), \\ \gamma_{B_2} = (-1,5,-5,2), & \gamma_{B_{15}} = w_6(2,5,-9,9), \\ \gamma_{B_{17}} = w_5 w_6(-1,-10,15,-13), & \gamma_{B_{16}} = w_6(2,5,-8,8), \\ \gamma_{B_5} = (2,-5,6,-4), & \gamma_{B_{11}} = w_6. \end{array}$$

d) Hi ha 5 *cicles el·líptics d'ordre* 2, $\{B_{19}\}$, $\{B_{12}, B_{11}\}$, $\{B_2, B_5\}$, $\{B_{15}, B_{16}\}$ *i* $\{B_{17}\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{array}{l} (B_{19}B_{12}, B_{19}B_{11}) \text{ mitjançant } \gamma_{B_{19}}, \\ (B_{12}B_2, B_{11}B_5) \text{ mitjançant } w_5, \\ (B_2B_{15}, B_5B_{16}) \text{ mitjançant } w_5(1,-5,5,-2), \\ (B_{15}B_{17}, B_{16}B_{17}) \text{ mitjançant } \gamma_{B_{17}}. \end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l} \gamma_{B_{19}}^2 = \gamma_{B_{17}}^2 = 1, \\ (w_5^{-1}\gamma_{B_{19}})^2 = 1, \\ ((w_5(1,-5,5,-2))^{-1}w_5)^2 = 1, \\ (\gamma_{B_{17}}^{-1}w_5(1,-5,5,-2))^2 = 1. \end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5), w_5, w_6\rangle$.

h) s_6 *i* s_{15} *són simetries de* $\langle\Gamma(6,5), w_5, w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$ *que a més són inversions.*

□

3.16 Un domini fonamental per a $\langle\Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle$

$\langle w_6, w_{10}, \Gamma(6,5)\rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_2B_5B_{10}$ es transforma en $B_4B_5B_2B_3$ mitjançant $w_{10}(-6,5,-4,-1)$.

Teorema 21. *L'octàgon hiperbòlic* $B_1B_{12}B_2B_{14}B_5B_{11}B_{10}B_{13}$ *determina un domini fonamental per al grup* $\langle\Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle$.

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament, $\{\pi/4, \pi, \pi/4, \pi, \pi/4, \pi, \pi/4, \pi\}$

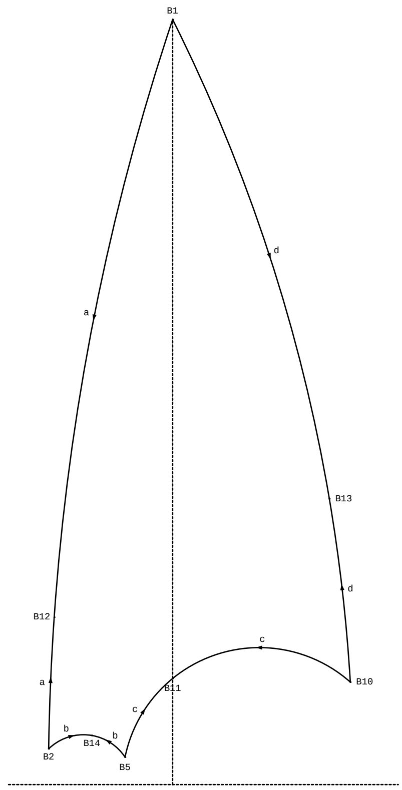


Figura 3.14: $\langle\Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$

b) El seu volum hiperbòlic és π *i el gènere de* $\langle\Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$ *és* 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2. *Les transformacions de* $\langle\Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle$ *que els fixen són:*

$$\begin{array}{ll}\gamma_{B_1} = (1,5,-1,-2), & \gamma_{B_{12}} = w_6(-1,0,1,-1),\\ \gamma_{B_2} = (-1,5,-5,2), & \gamma_{B_{14}} = w_{10}(-6,5,-4,-1),\\ \gamma_{B_5} = (2,-5,6,-4), & \gamma_{B_{11}} = w_6,\\ \gamma_{B_{10}} = (0,5,-2,0), & \gamma_{B_{13}} = w_{10}(-4,-5,0,3).\end{array}$$

d) Hi ha 5 *cicles el·líptics d'ordre* 2, $\{B_1, B_2, B_5, B_{10}\}$, $\{B_{12}\}$, $\{B_{14}\}$, $\{B_{11}\}$ *i* $\{B_{13}\}$.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$$\begin{array}{l}(B_1B_{12}, B_2B_{12}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{12}},\\ (B_2B_{14}, B_5B_{14}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{14}},\\ (B_5B_{11}, B_{10}B_{11}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{11}},\\ (B_{10}B_{13}, B_1B_{13}) \textit{ mitjançant } \gamma_{B_{13}}.\end{array}$$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\gamma_{B_{12}}^2 = \gamma_{B_{14}}^2 = \gamma_{B_{11}}^2 = \gamma_{B_{13}}^2 = 1,$$
$$(\gamma_{B_{13}}\gamma_{B_{11}}\gamma_{B_{14}}\gamma_{B_{12}})^2 = 1.$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle \Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle$.

h) s_5, s_6 i s_{15} són simetries de $\langle \Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle \backslash \mathcal{H}$ que a més són inversions.

□

Finalment estudiarem el domini del grup obtingut adjuntant les 3 involucions: w_2, w_3 i w_5.

3.17 Un domini fonamental per a $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle$

$\langle w_2, w_3, w_5, \Gamma(6,5)\rangle$ actua sobre el domini fonamental de $\langle w_2, w_3, \Gamma(6,5)\rangle$ tal com indiquem a continuació:

- El polígon hiperbòlic $B_1B_{12}B_{11}B_{10}$ es transforma en $B_5B_{11}B_{12}B_2$ mitjançant $w_3^{-1}w_2w_5$.

Teorema 22. *El quadrilàter hiperbòlic $B_1B_{12}B_{19}B_{11}B_{10}B_{13}$ determina un domini fonamental per al grup $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle$.*

a) Els angles en els vèrtexs són, respectivament, $\{\pi/4, \pi/2, \pi, \pi/2, \pi/4, \pi\}$.

b) El seu volum hiperbòlic és $\pi/2$ i el gènere de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle \backslash \mathcal{H}$ és 0.

c) Tots els vèrtexs són el·líptics: $\{B_1, B_{10}\}$ d'ordre 4 i $\{B_{12}, B_{19}, B_{11}, B_{13}\}$ d'ordre 2. Les transformacions de $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle$ que els fixen són:

$$\begin{array}{ll} \gamma_{B_1} = w_2(1,5,-1,-2), & \gamma_{B_{12}} = w_3^{-1}w_2(-1,0,1,-1), \\ \gamma_{B_{19}} = w_3^{-1}w_2w_5, & \gamma_{B_{11}} = w_3^{-1}w_2, \\ \gamma_{B_{10}} = w_2(3,5,-1,-1), & \gamma_{B_{13}} = w_2w_5(-4,-5,0,3). \end{array}$$

d) Hi ha 4 cicles el·líptics: $\{B_1, B_{10}\}$ d'ordre 4 i $\{B_{12}, B_{11}\}$, $\{B_{19}\}$, $\{B_{13}\}$ d'ordre 2.

e) Les identificacions de costats són donades per:

$(B_1B_{12}, B_{10}B_{11})$ *mitjançant* w_5,
$(B_{12}B_{19}, B_{11}B_{19})$ *mitjançant* $w_3^{-1}w_2w_5$,
$(B_{10}B_{13}, B_1B_{13})$ *mitjançant* $w_2w_5(-4,-5,0,3)$.

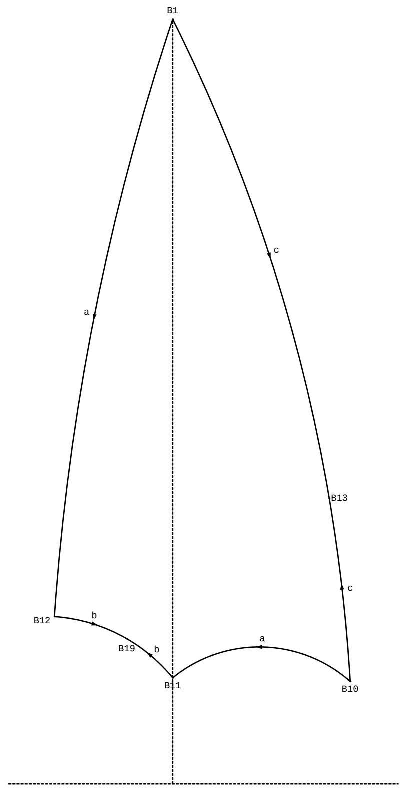


Figura 3.15: $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$

f) Les relacions donades pels cicles ordinaris són:

$$\begin{array}{l}(w_2 w_5(-4,-5,0,3)w_5)^4 = 1,\\ \left(w_3^{-1} w_2 w_5 w_5\right)^2 = 1,\\ \gamma_{B_{19}}^2 = \gamma_{B_{13}}^2 = 1.\end{array}$$

g) Les transformacions de e) amb les relacions de f) donen una presentació de $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle$.

h) s_6 *és una simetria de* $\langle\Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$ *que a més és una inversió.*

□

3.18 Relacions entre els dominis

Per a qualsevol inclusió $\Gamma \subset \Gamma'$ de grups fuchsians obtenim de forma natural una aplicació $\Gamma\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \Gamma'\backslash\mathcal{H}$. A continuació, estudiarem aquesta aplicació sobre els dominis que acabem de construir. Aquesta informació ens serà molt útil en el darrer capítol, més concretament en 5.4.

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$B_1 = B_7$	$2B_1$
$B_2 = B_6$	$2B_2$
B_5	$2B_5$
B_{10}	$2B_{10}$

Taula 3.1: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_3\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$B_1 = B_7 = B_6 = B_2$	$B_1 + B_2$
$B_5 = B_{10}$	$B_5 + B_{10}$

Taula 3.2: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_3\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$B_1 = B_{10} = B_4 = B_3$	$B_1 + B_4$
$B_2 = B_5$	$B_2 + B_5$

Taula 3.3: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$B_1 = B_2 = B_3$	$B_1 + B_2$
B_{12}	$2B_{12}$
B_{15}	$2B_{15}$
$B_4 = B_5 = B_{10}$	$B_4 + B_5$
B_{16}	$2B_{16}$
B_{11}	$2B_{11}$

Taula 3.4: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$B_1 = B_7 = B_{10}$	$B_1 + B_{10}$
$B_2 = B_5 = B_6$	$B_2 + B_5$
B_{13}	$2B_{13}$
B_{14}	B_{14}
B_{21}	$2B_{21}$
B_{22}	$2B_{22}$

Taula 3.5: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$B_1 = B_5 = B_7$	$B_1 + B_5$
$B_2 = B_6 = B_{10}$	$B_2 + B_{10}$

Taula 3.6: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_{30}\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X
$B_2 = B_{10}$	$B_2 + B_{10}$
$B_5 = B_7$	$B_5 + B_7$
B_{17}	$2B_{17}$
B_{19}	$2B_{19}$
B_{20}	$2B_{20}$
B_{18}	$2B_{18}$

Taula 3.7: $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_{30}\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_2, w_3\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X en		
	$\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5), w_3\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$
$B_1 = B_2$	$B_1 + B_2$	$2B_1$	$2B_1$
B_{12}	$2B_{12}$	$2B_{12}$	$B_{12} + B_{15}$
$B_5 = B_{10}$	$B_5 + B_{10}$	$2B_5$	$2B_5$
B_{11}	$2B_{11}$	$2B_{11}$	$B_{11} + B_{16}$

Taula 3.8: $\langle\Gamma(6,5), w_k\rangle\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_2, w_3\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5),w_2,w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X en		
	$\langle\Gamma(6,5),w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5),w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5),w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$
$B_1 = B_{10}$	$B_1 + B_{10}$	$2B_1$	$2B_{10}$
$B_2 = B_5$	$B_2 + B_5$	$2B_2$	$2B_5$
B_{14}	$2B_{14}$	$2B_{14}$	$B_{14} + B_{22}$
B_{13}	$2B_{13}$	$2B_{13}$	$B_{13} + B_{21}$

Taula 3.9: $\langle\Gamma(6,5),w_k\rangle\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5),w_2,w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5),w_3,w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X en		
	$\langle\Gamma(6,5),w_3\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5),w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5),w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$
$B_1 = B_2 = B_5 = B_{10}$	$B_1 + B_5$	$B_1 + B_2$	$B_1 + B_2$

Taula 3.10: $\langle\Gamma(6,5),w_k\rangle\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5),w_3,w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5),w_2,w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X en		
	$\langle\Gamma(6,5),w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5),w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5),w_{30}\rangle\backslash\mathcal{H}$
B_5	$B_5 + B_7$	$2B_5$	$2B_5$
B_{10}	$B_6 + B_{10}$	$2B_{10}$	$2B_{10}$
B_{19}	$2B_{19}$	$2B_{19}$	$B_{19} + B_{18}$
B_{20}	$2B_{20}$	$2B_{20}$	$B_{17} + B_{20}$

Taula 3.11: $\langle\Gamma(6,5),w_k\rangle\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5),w_2,w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5),w_3,w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X en		
	$\langle\Gamma(6,5),w_3\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5),w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5),w_{30}\rangle\backslash\mathcal{H}$
B_{19}	$2B_{19}$	$2B_{19}$	$B_{17} + B_{19}$
$B_{14} = B_{13}$	$2B_{13}$	$B_{14} + B_{13}$	$2B_{14}$
$B_{22} = B_{21}$	$2B_{21}$	$B_{22} + B_{21}$	$2B_{21}$
B_{20}	$2B_{20}$	$2B_{20}$	$B_{20} + B_{18}$
$B_5 = B_{10}$	$B_1 + B_5$	$B_5 + B_{10}$	$B_5 + B_{10}$

Taula 3.12: $\langle\Gamma(6,5),w_k\rangle\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5),w_3,w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_5, w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X en		
	$\langle\Gamma(6,5), w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5), w_{30}\rangle\backslash\mathcal{H}$
B_{19}	$2B_{19}$	$2B_{19}$	$B_{19} + B_{20}$
$B_{11} = B_{12}$	$2B_{11}$	$B_{11} + B_{12}$	$2B_{11}$
$B_2 = B_5$	$B_1 + B_2$	$B_2 + B_5$	$B_2 + B_5$
$B_{15} = B_{16}$	$2B_{15}$	$B_{15} + B_{16}$	$2B_{15}$
B_{17}	$2B_{17}$	$2B_{17}$	$B_{17} + B_{18}$

Taula 3.13: $\langle\Gamma(6,5), w_k\rangle\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_5, w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$

$X \in \langle\Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$	antiimatges de X en		
	$\langle\Gamma(6,5), w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5), w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$	$\langle\Gamma(6,5), w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$
$B_1 = B_2 = B_5 = B_{10}$	$B_1 + B_5$	$B_1 + B_2$	$B_1 + B_2$
B_{12}	$B_{12} + B_{16}$	$2B_{12}$	$2B_{12}$
B_{14}	$2B_{14}$	$B_{14} + B_{21}$	$2B_{14}$
B_{11}	$B_{11} + B_{15}$	$2B_{11}$	$2B_{11}$
B_{13}	$2B_{13}$	$B_{13} + B_{22}$	$2B_{13}$

Taula 3.14: $\langle\Gamma(6,5), w_k\rangle\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$

antiimatges de X en	$X \in \langle\Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$			
	$B_1 = B_{10}$	$B_{11} = B_{12}$	B_{19}	B_{13}
$\langle\Gamma(6,5), w_2, w_3\rangle\backslash\mathcal{H}$	$B_1 + B_{10}$	$B_{11} + B_{12}$	$2B_{19}$	$2B_{13}$
$\langle\Gamma(6,5), w_2, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$	$B_1 + B_2$	$2B_{11}$	$2B_{19}$	$B_{13} + B_{14}$
$\langle\Gamma(6,5), w_3, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$	$2B_1$	$2B_{11}$	$2B_{19}$	$2B_{13}$
$\langle\Gamma(6,5), w_2, w_{15}\rangle\backslash\mathcal{H}$	$B_5 + B_{10}$	$2B_{11}$	$B_{19} + B_{20}$	$2B_{13}$
$\langle\Gamma(6,5), w_3, w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$	$2B_{10}$	$2B_{11}$	$B_{19} + B_{20}$	$B_{13} + B_{21}$
$\langle\Gamma(6,5), w_5, w_6\rangle\backslash\mathcal{H}$	$2B_5$	$B_{11} + B_{16}$	$B_{19} + B_{17}$	$2B_{14}$
$\langle\Gamma(6,5), w_6, w_{10}\rangle\backslash\mathcal{H}$	$2B_5$	$B_{11} + B_{12}$	$2B_{19}$	$B_{13} + B_{14}$

Taula 3.15: $\langle\Gamma(6,5), w_k, w_{k'}\rangle\backslash\mathcal{H} \twoheadrightarrow \langle\Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5\rangle\backslash\mathcal{H}$

Capítol 4

Polinomis modulars

Començarem introduint de forma breu la teoria de polinomis modulars en el cas de les corbes modulars. A continuació, veurem com podem generalitzar aquests polinomis al cas de corbes de Shimura i quines propietats es preserven.

4.1 Polinomis modulars en el cas clàssic

Fixem l'àlgebra de quaternions no ramificada sobre $\mathbb{Q}$, $H = M_2(\mathbb{Q})$ i l'ordre d'Eichler de nivell N en aquesta àlgebra de quaternions $\mathcal{O}(1,N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$. Aleshores, ja hem vist que els grups $\Gamma(1,N)$ són els grups de congruència clàssics $\Gamma_0(N)$ i la corba de Shimura $X(1,N)$ no és més que $X_0(N)$.

Escrivim $\mathcal{O} = \mathcal{O}(1,1) = \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{O}_N = \{\alpha \in \mathcal{O} : \det \alpha = N\}$ el conjunt d'elements de determinant N i $\mathcal{O}'_N = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathrm{mcd}(a,b,c,d) = 1\}$ el subconjunt de matrius primitives. Notem que si N és lliure de quadrats, que serà el cas que ens interessarà més endavant, $\mathcal{O}_N = \mathcal{O}'_N$. Notem també que $\mathcal{O}'_1 = \tilde{\Gamma}_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Considerem l'acció natural per l'esquerra de $\tilde{\Gamma}_0(1)$ en $\mathcal{O}'_N$, tal que si $\gamma \in \tilde{\Gamma}_0(1)$, a $\alpha \in \mathcal{O}'_N$ li fa correspondre $\gamma\alpha$.

Proposició 5. *El grup $\tilde{\Gamma}_0(1)$ actua per l'esquerra en $\mathcal{O}'_N$ i el conjunts format per les matrius $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ amb $a \geq 1$, $a|N$, $d = N/a$, $\mathrm{mcd}(a,b,d) = 1$ i $0 \leq b < d$ és un sistema de representants de les òrbites $\tilde{\Gamma}_0(1)\alpha$, $\alpha \in \mathcal{O}'_N$.* $\square$

De forma anàloga, podem definir una acció per la dreta.

Proposició 6. *El grup* $\tilde{\Gamma}_0(1)$ *actua per la dreta en* $\mathcal{O}'_N$ *i el conjunt format per les matrius* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ *amb* $a \geq 1$*,* $a \mid N$*,* $d = N/a$*,* $\mathrm{mcd}(a, b, d) = 1$ *i* $0 \leq b < a$ *és un sistema de representants de les òrbites* $\alpha\tilde{\Gamma}_0(1)$*,* $\alpha \in \mathcal{O}'_N$*.* $\square$

Tenim una certa compatibilitat entre les dues accions:

Proposició 7. *Per a tot* $\alpha \in \mathcal{O}'_N$*,* $\tilde{\Gamma}_0(1)\alpha\tilde{\Gamma}_0(1) = \mathcal{O}'_N$*.*

En altres paraules, la proposició anterior ens està dient que el grup $\tilde{\Gamma}_0(1)$ actua transitivament per la dreta en el conjunt d'òrbites $\tilde{\Gamma}_0(1)\alpha$, $\alpha \in \mathcal{O}'_N$, i també actua transitivament per l'esquerra en el conjunts d'òrbites $\alpha\tilde{\Gamma}_0(1)$, $\alpha \in \mathcal{O}'_N$.

Corol·lari 2. *Tenim una bijecció* $\tilde{\Gamma}_0(1)\backslash\mathcal{O}'_N \cong \tilde{\Gamma}_0(N)\backslash\tilde{\Gamma}_0(1)$*.*

Demostració. Sigui $\alpha \in \mathcal{O}'_N$. Considerem l'aplicació de $\tilde{\Gamma}_0(1) \to \tilde{\Gamma}_0(1)\backslash\mathcal{O}'_N$, $\gamma \mapsto \alpha\gamma$, que sabem que és exhaustiva. És fàcil veure que l'estabilitzador de α és $\tilde{\Gamma}_0(1) \cap \alpha^{-1}\tilde{\Gamma}_0(1)\alpha$. En particular, si prenem α la classe de $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ obtenim el resultat. Notem que aquesta elecció de α és equivalent a prendre α la classe de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$, element que dóna lloc a la involució d'Atkin-Lehner per a la corba modular de nivell N. $\square$

Observació. Notem que $\tilde{\Gamma}_0(N)\backslash\tilde{\Gamma}_0(1) \cong \Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(1)$.

L'altre ingredient que ens falta per a poder definir el polinomi modular és la funció J de Klein. Recordem que la funció J de Klein admet la següent descripció: escrivim $E_k(z) = \sum_{\substack{(m,n)\neq(0,0) \\ m,n\in\mathbb{Z}}} (mz+n)^{-k}$ i aleshores

$$J(z) = 12^3 g_2(z)/\Delta(z),$$

on $g_2(z) = 60E_4(z)$, $g_3(z) = 140E_6(z)$ i $\Delta(z) = g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2$. Aquesta funció té una q-expansió en l'infinit, $q = e^{2\pi i z}$, tal que $J(q) \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}[[q]]$ i satisfà que és un generador del cos de totes les funcions modulars de nivell 1, $\mathbb{C}(J)$. En aquest cas, és a dir, quan Γ doni lloc a una corba de gènere 0, direm que un generador del cos de funcions automorfes (o modulars) respecte Γ és un mòdul principal, *Hauptmodul*, per a $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ o simplement per a Γ.

Sigui $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ un sistema de representants de les classes $\tilde{\Gamma}_0(1)\backslash\mathcal{O}'_N$. Pel que hem vist, l'acció de $\tilde{\Gamma}_0(1)$ permuta les funcions $J \circ \alpha_i$. Notem que per a tot $\gamma \in \tilde{\Gamma}_0(1)$, pel fet que J és una forma modular respecte $\Gamma_0(1)$, $J = J \circ \gamma$ i per tant $J \circ \alpha_i$ només depèn de la classe i no del representant.

Definició. Per a tot $N \geq 1$ escrivim $\Psi_N(X, J) = \prod_{i=1}^{r}(X - J \circ \alpha_i)$ i l'anomenem el N-èsim polinomi modular.

Resumim les propietats principals del polinomi modular:

1. Per a tot $N \geq 1$, $\Psi_N(X, J)$ és un polinomi en les indeterminades X i J que té coeficients enters.

2. Per a tot $N \geq 1$, $\Psi_N(X, J)$ és irreductible sobre $\mathbb{C}(J)$; és a dir, $\Psi_N(X, J) \in \mathbb{C}(J)[X]$ és irreductible.

3. Per a tot $N > 1$, $\Psi_N(X, J)$ és simètric.

Observem, en particular, que podem interpretar Ψ_N com el polinomi irreductible de $J(Nz)$ sobre $\mathbb{C}(J)$.

Com que $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tilde{\Gamma}_0(1) \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cap \tilde{\Gamma}_0(1) = \tilde{\Gamma}_0(N) = \tilde{\Gamma}(1, N)$, resulta que les dues funcions J i $J(N\cdot)$ generen el cos de funcions modulars respecte $\Gamma_0(N)$, que escrivim $\mathbb{C}(J, J(N\cdot)) = \mathbb{C}(\Gamma_0(N))$.

Ara bé, per a determinar el polinomi irreductible de $J(N\cdot)$ és més còmode utilitzar la bijecció, no canònica, $\tilde{\Gamma}_0(1)\backslash\mathcal{O}'_N \cong \Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(1)$ i aleshores $\Psi_N(X, J) = \prod_{\alpha \in \Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(1)}(X - J(N\alpha\cdot))$.

Observació. Si prenem $w_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}'_N$, que dóna la transformació d'Atkin-Lehner de $X_0(N)$, com que $w_N \overset{\tilde{\Gamma}_0(N)}{\sim} N$,

$$\Psi_N(X, J) = \prod_{\alpha \in \Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(1)} (X - J(w_N\alpha)).$$

4.2 Polinomis modulars en el cas general

Sigui Γ un grup fuchsià i suposem que la compactificació de $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ té gènere 0. Escrivim $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}_\infty$ un mòdul principal per a Γ.

Diem que un grup fuchsià Γ' és commensurable amb Γ si $\Gamma \cap \Gamma'$ és un subgrup d'índex finit tant en Γ com en Γ'. Escrivim $Comm(\Gamma) = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : g^{-1}\Gamma g$ és commensurable amb $\Gamma\}$ i l'anomenem el commensurador de Γ.

Sigui $g \in Comm(\Gamma)$ i escrivim $m = [\Gamma : \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g] = [g^{-1}\Gamma g : \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g]$ (la igualtat s'obté considerant els volums dels dominis fonamentals). Notem que la funció $f(gz)$ és un mòdul principal per al grup $g^{-1}\Gamma g$. En conseqüència, f i $f(g\cdot)$ generen el cos de funcions automorfes respecte $\Gamma \cap$

$g^{-1}\Gamma g$, que escriurem com $\mathbb{C}(\Gamma \cap g^{-1}\Gamma g) = \mathbb{C}(f, f(g\cdot))$, i les dues funcions satisfan un polinomi, $\Psi(f(z), f(gz))$, de grau m en cadascuna de les dues indeterminades. Anomenem aquesta equació el polinomi modular associat al mòdul principal f i la transformació g.

En el cas en què el grup fuchsià s'obté com el grup d'unitats d'un ordre d'Eichler en una àlgebra de quaternions, podem resseguir a grans trets la construcció que hem donat en el cas clàssic i retrobar algunes de les seves propietats, almenys en algun cas particular.

4.2.1 El cas $X(6,1)$

Seguint les notacions de 1.2.2, fixem l'ordre maximal $\mathcal{O}(6,1)$ dins l'àlgebra de quaternions de discriminant reduït 6, $\mathbb{H} = \left(\frac{3,-1}{\mathbb{Q}}\right)$, i $\Phi : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Fixem k coprimer amb 6, escrivim $\mathcal{O}_k = \{x \in \mathcal{O} : \mathrm{nr}(x) = k\}$ i tenim que $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(6,1) = \Phi(\mathcal{O}_1)$ i $\Gamma = \Gamma(6,1)$ la imatge d'aquest grup en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Notem que $\tilde{\Gamma}$ actua mitjançant multiplicació per l'esquerra en $\mathcal{O}_k$, d'on obtenim l'espai homogeni $\tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{O}_k$.

Fixem $g \in \mathcal{O}_k$, aleshores, és una simple comprovació veure que l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\Gamma} \cap g^{-1}\tilde{\Gamma} g)\backslash\tilde{\Gamma} & \hookrightarrow & \tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{O}_k \\ [\gamma] & \mapsto & [g\gamma] \end{array}$$

és injectiva.

Observació. Notem que $(\tilde{\Gamma} \cap g^{-1}\tilde{\Gamma} g)\backslash\tilde{\Gamma} \cong (\Gamma \cap g^{-1}\Gamma g)\backslash\Gamma$.

Ens fixarem en un cas particular.

En primer lloc, observem que és natural prendre un element del normalitzador d'un subgrup determinat, per exemple $g = \sqrt{5}w_5 = (2, 0, -1, 1) \in \mathcal{O}_5$, per tal d'assegurar la commensurabilitat. En aquest cas concret obtenim que $\Gamma \cap g^{-1}\Gamma g = \Gamma(6,5)$.

Considerem el sistema de representants de $\Gamma(6,5)\backslash\Gamma$ format per les matrius:

$$\begin{array}{ll} id, & \gamma_{v_6} = (0, 2, -1, 0), \\ \gamma_{v_2} = (1, -2, 2, -1), & \gamma_{v_2}^2 = (0, -2, 2, -1), \\ \gamma_{v_4} = (0, 3, -2, 1), & \gamma_{v_6}\gamma_{v_2}^2 = (1, -1, 0, 1). \end{array}$$

Aleshores els següents elements donen classes diferents de $\tilde{\Gamma}(6,1)\backslash\mathcal{O}_5$:

$$\{g, g\gamma_{v_6}, g\gamma_{v_2}, g\gamma_{v_2}^2, g\gamma_{v_4}, g\gamma_{v_6}\gamma_{v_2}^2\}.$$

Per a treballar-hi ens serà més còmode utilitzar el sistema de representants equivalent format per:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = (2,-5,2,0) \sim g, & \alpha_2 = (2,-3,2,0) \sim g\gamma_{v_6}, \\ \alpha_3 = (2,2,-1,0) \sim g\gamma_{v_2}, & \alpha_4 = (2,-2,1,0) \sim g\gamma_{v_2}^2, \\ \alpha_5 = (2,5,-2,0) \sim g\gamma_{v_4}, & \alpha_6 = (2,3,-2,0) \sim g\gamma_{v_6}\gamma_{v_2}^2. \end{array}$$

Notem que aquest sistema de representants satisfà que $\alpha_1\alpha_5 = \alpha_2\alpha_6 = \alpha_3\alpha_4 = 5id$ i que, a més, α_1 i α_5 fixen v_5, α_2 i α_6 fixen v_1, α_3 i α_4 fixen v_6.

En aquest cas, podem provar fàcilment que l'aplicació $(\tilde{\Gamma} \cap g^{-1}\tilde{\Gamma}g)\backslash\tilde{\Gamma} \hookrightarrow \tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{O}_5$, $\gamma \mapsto \alpha_1\gamma$ és una bijecció, tal com succeïa en el cas clàssic. Per això comencem trobant una caracterització per tal que $\alpha = (a,b,c,d) \in \mathcal{O}_5$ pertanyi a $\Gamma\alpha_i$ i això és:

$\alpha \in \Gamma\alpha_1$	$b = 0 \pmod 5$, $a - b = c + 3d \pmod 5$
$\alpha \in \Gamma\alpha_2$	$b = c + 3d \pmod 5$, $a - b = 4d \pmod 5$
$\alpha \in \Gamma\alpha_3$	$b = 3c + 2d \pmod 5$, $a - b = 4c + d \pmod 5$
$\alpha \in \Gamma\alpha_4$	$b = 3c \pmod 5$, $a - b = d \pmod 5$
$\alpha \in \Gamma\alpha_5$	$b = 4d \pmod 5$, $a - b = 4c + 3d \pmod 5$
$\alpha \in \Gamma\alpha_6$	$b = c + 2d \pmod 5$, $a - b = 3c + 4d \pmod 5$

Vist això, és suficient trobar les solucions de $\mathrm{nr}(a,b,c,d) = 0 \pmod 5$ i veure que totes elles estan en alguna d'aquestes categories, que es comprova de manera immediata.

Així provem el resultat següent, que és l'anàleg, en aquest cas concret, del resultat que ja hem enunciat en el cas clàssic:

Proposició 8. $\tilde{\Gamma}g\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}\alpha_i\tilde{\Gamma} = \mathcal{O}_5$. □

Escrivim

$$\tilde{\Psi}(X,f) = \prod_i (X - f \circ \alpha_i) = \prod_{\gamma \in \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g \backslash \Gamma} (X - f \circ g \circ \gamma)$$

i observem que els coeficients del polinomi anterior en X són polinomis simètrics en $\{f \circ g \circ \gamma\}_{\gamma \in \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g \backslash \Gamma}$ d'on resulta que són funcions invariants respecte Γ. Així, els coeficients són funcions racionals en f no necessàriament polinòmiques, com succeeix en el cas clàssic. Per tant, $\tilde{\Psi}(X,f) \in \mathbb{C}(f)[X]$. Escrivim $\Psi(X,f) = \alpha(f)\tilde{\Psi}(X,f)$ de manera que $\alpha(f) \in \mathbb{C}(f)$ és tal que $\Psi(X,f) \in \mathbb{C}[X,f]$ i $\mathrm{cont}(\Psi) = 1$. Direm que $\Psi(X,f)$ és el polinomi modular associat a f.

Proposició 9. $\Psi(X,f)$ *(o equivalentment* $\tilde{\Psi}(X,f)$*) és irreductible sobre* $\mathbb{C}(f)[X]$.

Demostració. El grup Γ actua com a grup d'automorfismes del cos $K := \mathbb{C}(f, f\circ\alpha_1, \ldots, f\circ\alpha_6)$, amb l'acció per la dreta sobre cada una de les funcions. Aquesta acció és transitiva entre les funcions $f \circ \alpha_1, \ldots, f \circ \alpha_6$ i, per tant, $\tilde{\Psi}(X, f) = Irr(f \circ \alpha_1, K^\Gamma)$ és irreductible sobre K^Γ. Com que f és fix per Γ, aquest polinomi és irreductible sobre $\mathbb{C}(f) \subset K^\Gamma$. □

Com en el cas clàssic, aquest polinomi també és simètric:

Proposició 10. *Si* $\deg \Psi_X > 1$*,* $\Psi(X, f) = \Psi(f, X)$*.*

Demostració. Per la irreductibilitat, $\Psi(X, f)$ és el polinomi irreductible de $f \circ \alpha_1$, que està caracteritzat per

$$\Psi(f(\alpha_1 z), f(z)) = 0$$

per a tot z. Hem escollit $\alpha_1 = \sqrt{5}(1, -3, 2, -1)w_5$ i, per tant,

$$f(\alpha_1 z) = f((1, -3, 2, -1)w_5 z) = f(w_5 z),$$

d'on s'obté, substituint z per $w_5 z$ en el polinomi i tenint en compte que w_5 és una involució, que

$$0 = \Psi(f(w_5^2 z), f(w_5 z)) = \Psi(f(z), f(w_5 z)).$$

Per tant, resulta que $\Psi(X, f)|\Psi(f, X)$, és a dir, existeix $g(X, f) \in \mathbb{C}(f)[X]$ tal que $\Psi(f, X) = g(X, f)\Psi(X, f)$, però pel fet que $\Psi(X, f)$ és irreductible com a polinomi en les dues variables i utilitzant el lema de Gauss, resulta que $g(X, f) \in \mathbb{C}[X, f]$. Aleshores, $\Psi(X, f) = g(X, f)g(f, X)\Psi(X, f)$, d'on $g(X, f) = \pm 1$. Si $g(X, f) = -1$ tindríem que $\Psi(f, X) = -\Psi(X, f)$ i, en particular, $\Psi(f, f) = 0$. Així, f seria una arrel de $\Psi(X, f)$ però això és impossible, per la irreductibilitat de Ψ, si el grau de $\Psi(X, f)$ no és 1. □

Per tal de calcular els polinomis modulars en aquest cas ens cal conèixer un mòdul principal f, això és el que veurem en el següent capítol, on també calcularem explícitament el corresponent polinomi modular.

Capítol 5

Funcions automorfes respecte $\Gamma(6, 5)$

En aquest capítol veurem com podem determinar, en certa manera, les funcions per a uniformitzar algunes corbes de Shimura. El mètode que utilitzarem serà essencialment el de [BT07b], que es basa en l'ús d'equacions diferencials schwarzianes. Farem servir els polinomis modulars per a determinar alguns paràmetres que en principi queden indeterminats (problema dels A-paràmetres) en l'equació diferencial corresponent a $\Gamma(6, 1)$. Per a acabar, utilitzant els resultats previs, construirem funcions automorfes que donen els models canònics per a $X(6, 5)$ i els seus quocients i determinarem les equacions d'aquestes corbes.

5.1 Equacions schwarzianes i funcions automorfes

El mètode que descriurem es pot trobar amb més detall a [BT07b] i [BT07a]. Pel que fa als resultats sobre les equacions schwarzianes, tots ells es poden trobar demostrats a [Neh75].

Per a construir una funció automorfa necessitarem partir d'un domini fonamental. Escrivim $\mathcal{D}$ un domini fonamental per a Γ (el grup fuchsià obtingut a partir del grup d'unitats d'un ordre d'una àlgebra de quaternions, o algun dels grups obtingut adjuntant involucions d'Atkin-Lehner).

Comencem definint la noció de mig domini fonamental; abans, però, hem de definir la noció de mig domini. Un mig domini de $\mathcal{D}$ és un subdomini de $\mathcal{D}$ que dóna el quocient de $\mathcal{D}$ per una simetria d'aquest. Diem que un tal mig domini és fonamental si tots els seus vèrtexs són diferents.

La idea consisteix en construir una funció que estableixi una equivalència conforme entre el mig domini fonamental i $\mathcal{H}\cup\mathbb{R}\cup\infty$ (que sabem que existeix pel teorema de l'aplicació conforme de Riemann), aleshores, pel principi de reflexió de Schwarz per a superfícies de Riemann, podem extendre la funció a tot el domini fonamental donant una equivalència conforme entre $\mathcal{D}$ i $\mathbb{C}_\infty$. En particular, l'existència de mig domini fonamental obliga que el gènere de la corresponent superfície de Riemann sigui 0.

En conseqüència, per a determinar una funció automorfa per a Γ basta determinar una funció com la que hem descrit en un mig domini fonamental. Com ja hem dit, el teorema de l'aplicació conforme de Riemann ens garanteix l'existència d'aquesta funció però no ens dóna una manera de construir-la. Ara bé, per a polígons hiperbòlics podem utilitzar la teoria de Christoffel-Schwarz, que dóna una versió més efectiva del teorema anterior en aquest context.

Sigui $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}_\infty$ un mòdul principal per a Γ.

Definició. Definim la derivada schwarziana com

$$\{z, f\} = \frac{-2z'z''' + 3(z'')^2}{(z')^2} = \frac{2\dddot{f}\dot{f} - 3\ddot{f}^2}{\dot{f}^4},$$

on $'$ denota la derivada respecte $f = f(z)$ i $\dot{}$ la derivada respecte z.

Aquest operador no és una derivada en el sentit clàssic, però té la propietat clau següent:

- Per a qualsevol transformació $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ i qualsevol funció $g(z)$,

$$\{\gamma z, g\} = \{z, g \circ \gamma\}.$$

  En particular, per a $g = f(z)$, resulta que $\{\gamma z, f\} = \{z, f\}$ per a tot $\gamma \in \Gamma$.

Per tant, si g és una funció automorfa respecte Γ, $\{z, g\}$ és automorfa respecte Γ. Aquest fet justifica que per a una funció suficientment regular $g : \mathcal{H} \to \mathbb{C}_\infty$, la funció $\{z, g\}$ s'anomeni la derivada automorfa de g, cf. [BT07b].

Més generalment, se satisfà la següent regla de la cadena:

Lema 4. *Si g i h són funcions suficientment regulars i la seva composició està definida, se satisfà que*

$$\{z, h \circ g\} = \{g(z), h\} + \frac{\{z, g\}}{h'(g(z))^2}.$$

El teorema següent és el resultat clau que havíem anticipat:

Teorema 23. *Mantenint les notacions anteriors, suposem que $\mathcal{D}$ admet un mig domini fonamental i que f és un generador del cos de funcions Γ-automorfes. Suposem, a més a més, que f, en els vèrtexs del mig domini fonamental, pren valors en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Aleshores, existeix una funció racional $R(f)$ tal que $\{z, f\} + R(f) = 0$. Si $\alpha_i \pi$ són els angles interns en els vèrtexs del mig domini fonamental, $R(f) = \sum \frac{1-\alpha_i^2}{(f-a_i)^2} + \sum \frac{B_i}{f-a_i}$, on B_i són constants i la suma recorre els vèrtexs del mig domini fonamental on la funció f pren valors finits a_i. A més, si els valors en tots els vèrtexs són finits, tenim les següents condicions sobre les constants B_i:*

1. $\sum B_i = 0$,
2. $\sum a_i B_i + \sum (1 - \alpha_i)^2 = 0$,
3. $\sum a_i^2 B_i + \sum a_i (1 - \alpha_i^2) = 0$.

Per altra banda, si la funció f pren el valor infinit en un vèrtex amb angle intern α, aleshores:

1. $\sum B_i = 0$,
2. $\sum a_i B_i + \sum (1 - \alpha_i^2) - (1 - \alpha^2) = 0$.

□

Suposem que el mig domini fonamental té $n \geq 3$ vèrtexs. Observem que utilitzant transformacions homogràfiques podem fixar els valors a_i en 3 vèrtexs (un cop fixats aquests tres valors la funció queda unívocament determinada) i que les condicions sobre els B_i ens deixen amb $n-3$ indeterminades. En definitiva, queden $2(n-3)$ paràmetres que ens són desconeguts; en particular, si el mig domini fonamental és un triangle hiperbòlic no hi ha paràmetres indeterminats. En ocasions és possible determinar alguns a_i, però no hi ha cap mètode senzill i general per a determinar els B_i (problema dels A-paràmetres). En la secció següent veurem com podem utilitzar l'existència dels polinomis modulars, i, per tant, l'aritmeticitat del grup Γ, per a determinar els paràmetres B_i en un cas concret.

Comentem finalment un resultat que ens serà d'utilitat més endavant, la demostració del qual és un càlcul senzill.

Proposició 11. *Siguin X, Y funcions suficientment regulars de z tals que existeix un polinomi P que satisfà $P(X, Y) = 0$. Aleshores, es té la igualtat*

$$\{z, X\} = \frac{P_X^2}{P_Y^2} \{z, Y\} + \Theta(X, Y),$$

on els subíndexs a P denoten derivades parcials i $\Theta(X,Y) = (6P_X^2P_Y^3P_{XXY} + 3P_{XX}^2P_Y^4 - 2P_XP_Y^3(3P_{XX}P_{XY} + P_{XXX}P_Y) - 6P_X^3P_Y(P_{XYY}P_Y - P_{XY}P_{YY}) - P_X^4(3P_{YY}^2 - 2P_YP_{YYY}))/(P_X^2P_Y^2)$. $\square$

Ja hem comentat que en el cas en què el mig domini fonamental és un triangle els resultats anteriors determinen completament tots els paràmetres; però no només això, la relació amb les sèries hipergeomètriques permet interpretar d'una manera molt senzilla les inverses de les funcions que es construeixen en aquest cas. Per a més detalls, vegeu [BT07b] i [BT07a].

5.1.1 El cas $X(6,1)$

Considerem el domini fonamental $\mathcal{D}$ de la figura 2.2, prenguem com a mig domini fonamental el polígon $v_2v_3v_4v_6$ i notem que els segments v_3v_6 i v_2v_4 donen eixos de simetria del polígon. El punt de multiplicació complexa τ_1 és el punt d'intersecció dels dos eixos.

Considerem la funció del polígon $\tau_1v_4v_6$ en l'exterior del disc unitat obert en el primer quadrant tal que $\tau_1, v_4, v_6 \mapsto i, 1, \infty$. Pel principi de reflexió d'Schwarz es construeix una funció f en $v_2v_3v_4v_6$ que pren els valors $-1, 0, 1, \infty$ en aquests vèrtexs i i en τ_1. Així, encara que el mig domini fonamental és un quadrilàter, podem determinar el valor en tots els vèrtexs. A més, els angles en els vèrtexs són $\pi/3, \pi/2, \pi/3, \pi/2$. Per tant, l'equació schwarziana per a $X(6,1)$ té la forma:

$$\{z, f\} + R(f) = 0,$$

on

$$R(f) = \frac{1 - 1/9}{(f+1)^2} + \frac{(1 - 1/4)}{f^2} + \frac{1 - 1/9}{(f-1)^2} + \frac{B_2}{f+1} + \frac{B_3}{f} + \frac{B_4}{f-1}$$

i, a més, $B_2 + B_3 + B_4 = -B_2 + B_4 + \frac{16}{9} = 0$, que substituint i simplificant en l'expressió anterior dóna:

$$R(f) = \frac{27 - 8(8 + 9B_4)f + 74f^2 + 8(8 + 9B_4)f^3 + 27f^4}{36f^2(f^2 - 1)^2}.$$

El paràmetre B_4 està completament determinat pel fet que la funció doni una equivalència conforme entre el mig domini fonamental i $\mathcal{H}$, però hem de buscar alguna condició més per a poder determinar-lo. Un mètode consisteix en utilitzar els diferents quocients d'aquesta corba per involucions d'Atkin-Lehner, cf. [BT07b]. Similarment, podríem utilitzar la proposició 11 juntament amb el fet que $\langle\Gamma(6,1), w_2\rangle$ té un mig domini triangular per a calcular la derivada schwarziana de f a partir de la de f^2. Nosaltres volem evitar utilitzar l'existència de dominis fonamentals triangulars, per això determinarem el paràmetre utilitzant l'aritmeticitat del grup d'una altra manera, fent servir l'existència d'un polinomi modular.

5.2 Polinomi modular per a $\Gamma(6,1)$ de nivell 5

Donarem un guió dels passos que hem seguit per a determinar el polinomi modular i el paràmetre B_4 en l'equació schwarziana. Els fonaments teòrics que justifiquen aquest mètode es poden trobar, per exemple, a [SD77]. Utilitzarem les notacions que hem introduït en 4.2.1.

Escrivim f el mòdul principal que hem introduït en la secció anterior, i que sabem que satisfà l'equació diferencial

$$\{z, f\} + R(f) = 0$$

amb $R(f) = \frac{27-bf+74f^2+bf^3+27f^4}{36f^2(f^2-1)^2}$, on $b = 8(8+9B_4)$. Per altra banda, recordem que el polinomi modular $\Psi(X,Y)$ és un polinomi simètric de grau $(g^{-1}\Gamma g \cap \Gamma)\backslash\Gamma = \Gamma(6,5)\backslash\Gamma = 6$ que satisfà que $\Psi(f,Y)$ és el polinomi irreductible de qualsevol de les funcions $f(\alpha_i z)$.

Comencem escrivint el desenvolupament de f en un dels punts el·líptics v respecte les funcions $q_v(z) = \left(k_v \frac{z-v}{z-\bar{v}}\right)^{e_v}$, on k_v és una constant (està únicament determinada pel fet que la funció f tingui les propietats que li requerim) i e_v és l'ordre del grup d'isotropia de Γ en v.

Per exemple, considerem $v = v_6$, i tenint en compte que la transformació $\alpha_3 = (2,-2,1,0)$ fixa aquest vèrtex, plantejarem el problema com buscar el polinomi irreductible de $f(\alpha_3 z)$, $P(f,Y)$, sobre $\mathbb{C}(f)$. Per a abreujar i simplificar al màxim els resultats que obtindrem, prenem $q = 2^4 q_v$.

1. Escrivim $f(q) = \frac{2^4}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$ i observem que $q(\alpha_3 z) = aq(z)$, on $a = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^2$. Per tant, de forma immediata obtenim un desenvolupament en q de $f(\alpha_3 z) = \frac{a^{-1}}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n b_n q^n$.
2. Determinem els coeficients del desenvolupament de f en funció de b imposant que f sigui solució de l'equació diferencial $\{z, f\} + R(f) = 0$. Per a això utilitzem la regla de la cadena,
$$\{z, f \circ q\} = \{q, f\} + \frac{\{z, q\}}{f'(q)^2},$$
i tenint en compte que la derivada schwarziana d'una funció q és $\{z, q\} = (-1 + \frac{1}{e_v^2})q^{-2}$, resulta que
$$\{z, f\} = \{q, f\} - \frac{3}{4q^2 f'(q)^2}.$$
Per tant, volem resoldre
$$\{q, f\} - \frac{3}{4q^2 f'(q)^2} + R(f) = 0.$$

Es poden calcular sense gaire dificultat els coeficients d'ordre menor que 30; escrivim els 5 primers i ometem els altres per qüestions d'espai:

$$\begin{aligned} f(q) = \frac{16}{q} \quad & + \frac{b}{54} + \frac{(4608-b^2)q}{311040} + \frac{b(-6183+b^2)q^2}{352719360} \\ & + \frac{(12317184+144729b^2-19b^4)q^3}{6094990540800} \\ & + \frac{b(-64378152-331227b^2+37b^4)q^4}{9654465016627200} \\ & + o(q^4). \end{aligned}$$

3. Substituïm els desenvolupaments de $f(q)$ i $f(q(\alpha_3))$ en un polinomi simètric de grau 6 en cada indeterminada i coeficients indeterminats. Així obtenim una sèrie en q que té per coeficients equacions lineals homogènies en les variables del polinomi. En total, el polinomi té 28 indeterminades i amb els coeficients de f que coneixem el sistema és sobredeterminat; volem que tingui solució no trivial. Per tant, hem d'imposar que el rang de la matriu no sigui màxim i escollint menors és fàcil veure que l'única possibilitat és que $b = 0$, que correspon a $B_4 = -8/9$.

   Així retrobem la funció $t(z)$ de [BT07b] i normalitzant, fet que correspon a modificar el coeficient b_n de $f(q)$, com $b_n \frac{(4(n+2))!}{4!16}$, obtenim el desenvolupament de $t_6(P_6, q_{P_6}; z)$.

   Paral·lelament, obtenim el polinomi modular que lliga les dues funcions, que es troba resolent el sistema un cop hem substituït b per 0. Traient denominadors, el polinomi que resulta és:

$$\begin{aligned} \Psi(X,Y) = \; & +119574225X^2 && -210039480X^4 && +92236816X^6 \\ & +66961566XY && -582922980X^3Y && +550309200X^5Y \\ & +119574225Y^2 && -785133000X^2Y^2 && +1102896150X^4Y^2 \\ & -210039480X^6Y^2 && -582922980XY^3 && +1712753300X^3Y^3 \\ & -582922980X^5Y^3 && -210039480Y^4 && +1102896150X^2Y^4 \\ & -785133000X^4Y^4 && +119574225X^6Y^4 && +550309200XY^5 \\ & -582922980X^3Y^5 && +66961566X^5Y^5 && +92236816Y^6 \\ & -210039480X^2Y^6 && +119574225X^4Y^6. \end{aligned}$$

5.3 Funcions automorfes respecte $\Gamma(6,5)$ i alguns grups obtinguts adjuntant involucions d'Atkin-Lehner

En el punt anterior hem vist que $\mathbb{C}(\Gamma(6,5)) = \mathbb{C}(f(z), f(gz))$ i que aquestes dues funcions estan lligades pel polinomi modular Ψ. A més, hem vist que el mòdul principal f per a Γ satisfà l'equació

$$\{z,f\}+\frac{27+74f^2+27f^4}{36f^2(f^2-1)^2}=0.$$

Ara bé, sabem que $X(6,5)$ és llisa i per tant és un model que està molt lluny del que acabem de trobar, que té moltes singularitats. En aquesta secció veurem com, utilitzant la informació que hem determinat en el punt anterior, podem trobar models més simplificats de la corba $\Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H}$, com també dels seus quocients. El mètode que utilitzarem es basarà en el fet que $X(6,5)$, que té gènere 1, té almenys un quocient d'Atkin-Lehner de gènere 0 i, per tant, amb mòdul principal. Això ens permetrà escriure el cos de funcions de $\mathbb{C}(\Gamma(6,5))$ com una extensió quadràtica d'un cos $\mathbb{C}(X)$, que serà una simplificació molt notable respecte el model donat pel polinomi modular.

5.3.1 Un mòdul principal per a $\langle\Gamma(6,5),w_2\rangle$

Sabem que w_2 és un automorfisme de $\Gamma(6,1)\backslash\mathcal{H}$ i, per tant, $f(w_2z)$ és també un mòdul principal per a $\Gamma(6,1)$. En conseqüència, $f(w_2z)=\gamma(f(z))$ on $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Observem, a més, que $w_2(v_2)=v_4$, $w_2(v_6)=v_6$ i $w_2(v_3)=v_3$ d'on s'obté que $f(w_2z)=-f(z)$. Per tant, $\mathbb{C}(\langle\Gamma(6,1),w_2\rangle)=\mathbb{C}(f^2)$.

Notem també que $\langle\Gamma(6,1),w_2\rangle\cap g^{-1}\langle\Gamma(6,1),w_2\rangle g=\langle\Gamma(6,5),w_2\rangle$ i, per tant,

$$\mathbb{C}(\langle\Gamma(6,5),w_2\rangle)=\mathbb{C}(f^2(z),f^2(gz)).$$

A més, és molt fàcil determinar, a partir del polinomi Ψ que dóna la relació entre $f(z)$ i $f(gz)$, el polinomi Ψ_2 que dóna la relació entre $f^2(z)$ i $f^2(gz)$. Es té que:

$$
\begin{array}{rll}
\Psi_2(X,Y) = & +14297995284350625X^2 & -50230616080806000X^3 \\
& +66174874738005600X^4 & -38746745738991360X^5 \\
& +8507630225817856X^6 & +24112139247528894XY \\
& -159927084878282640X^2Y & +202133718219987900X^3Y \\
& -16794662303034000X^4Y & -111517907779824000X^5Y \\
& -38746745738991360X^6Y & +14297995284350625Y^2 \\
& -159927084878282640XY^2 & +323203116069779400X^2Y^2 \\
& +244564648679322000X^3Y^2 & -456619322898680250X^4Y^2 \\
& -16794662303034000X^5Y^2 & +66174874738005600X^6Y^2 \\
& -50230616080806000Y^3 & +202133718219987900XY^3 \\
& +244564648679322000X^2Y^3 & -991067737989471500X^3Y^3 \\
& +244564648679322000X^4Y^3 & +202133718219987900X^5Y^3 \\
& -50230616080806000X^6Y^3 & +66174874738005600Y^4 \\
& -16794662303034000XY^4 & -456619322898680250X^2Y^4 \\
& +244564648679322000X^3Y^4 & +323203116069779400X^4Y^4 \\
& -159927084878282640X^5Y^4 & +14297995284350625X^6Y^4 \\
& -38746745738991360Y^5 & -111517907779824000XY^5 \\
& -16794662303034000X^2Y^5 & +202133718219987900X^3Y^5 \\
& -159927084878282640X^4Y^5 & +24112139247528894X^5Y^5 \\
& +8507630225817856Y^6 & -38746745738991360XY^6 \\
& +66174874738005600X^2Y^6 & -50230616080806000X^3Y^6 \\
& +14297995284350625X^4Y^6. &
\end{array}
$$

Considerem el mig domini fonamental per a $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$ donat pel polígon hiperbòlic $B_5B_6B_7B_{10}$ que apareix a la figura 5.1. Per a evitar carregar la notació, per a un punt $P \in \mathcal{H}$ escriurem $P^* = s_{30}P$.

Considerem el mòdul principal T_2 per a $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$ que envia la frontera del mig domini a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ amb els tres valors següents fixats $T_2(B_{11}) = \infty$, $T_2(B_{21}) = 1$ i $T_2(B_{12}^*) = 0$. És fàcil veure, utilitzant el principi de reflexió de Schwarz i les simetries del mig domini, que $T_2(B_{22}) = -1$ i $T_2(B_{19}^*) = i$; més precisament, $B_{22}B_{21}$ s'aplica en la semicircumferència unitat del semiplà superior i $B_{12}^*B_{11}$ en el semieix imaginari. Aleshores, si escrivim $a = T_2(B_{10})$ i $c = T_2(v_3)$ resulta que $-a = T_2(B_5)$, $a^{-1} = T_2(B_7)$, $-a^{-1} = T_2(B_6)$ i $T_2(v_6) = -T_2(v_3) = -c$.

Ens interessaria determinar els valors de a i c, així com, l'equació schwarziana que cumpleix T_2. Vegem com podem calcular aquests valors relacionant aquesta funció amb $f^2(z)$ i $f^2(gz)$. Notem que g dóna un automorfisme de $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$ i, per tant, $T_2(w_5z)$ és una funció racional de $T_2(z)$, que utilitzant els valors en els vèrtexs es comprova que és $T_2(gz) = \frac{1}{T_2(z)}$. Com que T_2 és un mòdul principal per a $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$, tota funció automorfa respecte $\langle\Gamma(6,5), w_2\rangle$ queda determinada, llevat d'escalar, pel seu divisor.

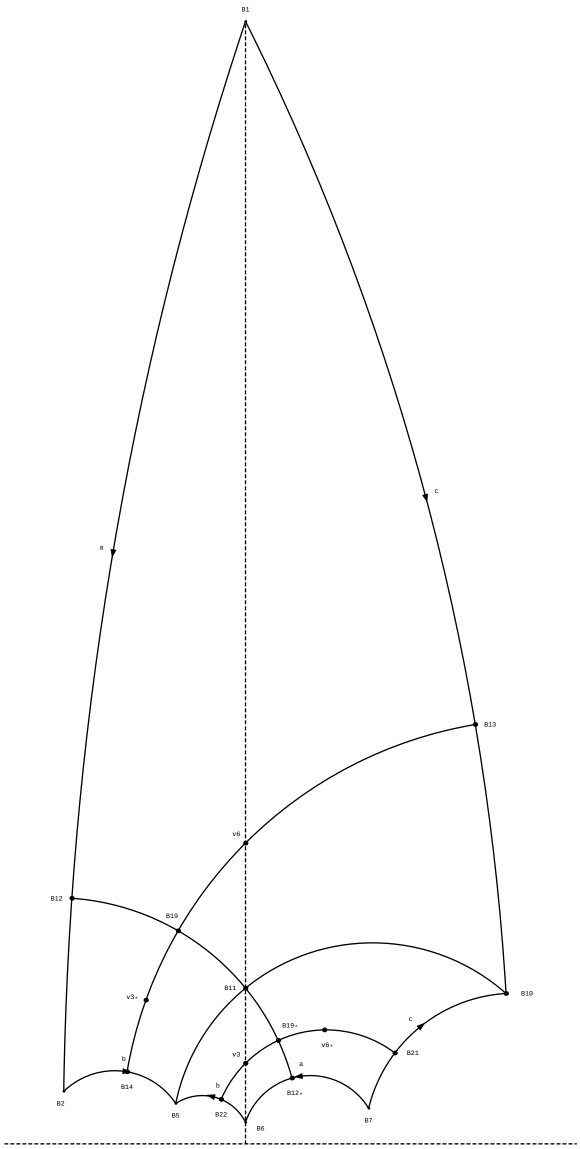


Figura 5.1: $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle$

Coneixem una tal funció automorfa, f^2, i aquest, juntament amb el polinomi modular, serà el punt clau que ens permetrà determinar els valors desconeguts i l'equació schwarziana.

Comencem calculant el divisor de f^2 com a funció de $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle \backslash \mathcal{H}$, que es determina fàcilment tenint en compte que és un mòdul principal per a $\langle\Gamma(6,1),w_2\rangle$ juntament amb la ramificació del morfisme $\langle\Gamma(6,5),w_2\rangle\backslash\mathcal{H}\to\langle\Gamma(6,1),w_2\rangle\backslash\mathcal{H}$:

$$\operatorname{div}(f^2)=4v_3+B_{10}+B_1-4v_6-B_2-B_5.$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned} f^2 &= d\left(\tfrac{T_2-T_2(v_3)}{T_2-T_2(v_6)}\right)^4\tfrac{T_2-T_2(B_{10})}{T_2-T_2(B_5)}\tfrac{T_2-T_2(B_1)}{T_2-T_2(B_2)}\\ &= d\left(\tfrac{T_2-c}{T_2+c}\right)^4\tfrac{T_2-a}{T_2+a}\tfrac{T_2-a^{-1}}{T_2+a^{-1}}\\ &= d\left(\tfrac{T_2-c}{T_2+c}\right)^4\tfrac{T_2-a}{T_2+a}\tfrac{aT_2-1}{aT_2+1}.\end{aligned}$$

Notem que sabem que $f(B_{11})=i$ i $T_2(B_{11})=0$, d'on resulta que $d=-1$. Per tant,

$$f^2=-\left(\frac{T_2-c}{T_2+c}\right)^4\frac{T_2-a}{T_2+a}\frac{aT_2-1}{aT_2+1},$$

i també

$$f^2(g\cdot)=-\left(\frac{cT_2-1}{cT_2+1}\right)^4\frac{T_2-a}{T_2+a}\frac{aT_2-1}{aT_2+1}.$$

Per tal de determinar els valors a i c que desconeixem utilitzarem el polinomi modular. Sabem que $\Psi_2(f^2,f^2(g\cdot))=0$ i això es tradueix en una identitat en $\mathbb{C}(T_2)$, que es pot atacar directament. Tot i això, encara es pot trobar una altra condició sobre els coeficients a i c, com descrivim breument a continuació. Notem que

$$\left(\frac{f^2(z)}{f^2(gz)}\right)|_{z=B_{10}}=\left(\frac{\frac{a-c}{a+c}}{\frac{ca-1}{ca+1}}\right)^4$$

i utilitzant que $f^2(z)$ té un zero en B_{10} i que aquest punt és fix per $\alpha_1\sim g$, tenim que $\frac{f^2(z)}{f^2(gz)}|_{z=B_{10}}=\frac{q(z)^2}{q(qz)^2}=\left(\frac{3-4i}{5}\right)^4$. Aleshores, utilitzant que c és un element de norma 1 i argument en l'interval $(\pi/2,\pi)$, es prova que es cumpleix una de les dues igualtats següents: $a^2=2i(-ca+a/c)+1$ o $a^2=i/3(-ca+a/c)+1$ (de fet es té la segona). Utilitzant tot això un simple càlcul prova que

$$a=\frac{1}{5\sqrt{5}}(8\sqrt{2}+\sqrt{3}),\ c=\frac{1}{5\sqrt{5}}(-7\sqrt{2}+3\sqrt{3}i).$$

Vist això, podem determinar els valors de T_2 en punts on coneixem els valors de f, per exemple, en v_2 i v_4. Per fer-ho només cal resoldre la igualtat $1=-\left(\frac{T_2-c}{T_2+c}\right)^4\frac{T_2-a}{T_2+a}\frac{aT_2-1}{aT_2+1}$ que té únicament dues solucions, una en el semiplà superior i una altra en l'inferior, fet que ens permet identificar quin valor correspon a cadascun dels vèrtexs. Així veiem que $T_2(v_4)=\frac{2\sqrt{6}+i}{5}=-T_2(v_2)$.

A continuació calcularem l'equació schwarziana que satisfà aquest mòdul principal per a $\langle\Gamma(6,5),w_2\rangle$. Recordem que hem construït el mòdul principal a partir del mig domini fonamental $B_5B_6B_7B_{10}$ i també que els angles interiors en tots els vèrtexs són iguals a $\pi/4$. Per a comprimir les expressions continuarem utilitzant les notacions a i c per als valors que acabem de determinar. Escrivim

$$\{z,T_2\}+R_1(T_2)+R_2(T_2)=0$$

on

$$R_1(T_2)=\sum\frac{1-\alpha_i^2}{(T_2-a_i)^2}=\frac{15}{16}\left(\frac{1}{T_2-a}+\frac{1}{T_2+a}+\frac{1}{T_2-a^{-1}}+\frac{1}{T_2+a^{-1}}\right)$$
$$=\frac{15(15625T_2^6-16375T_2^4-12553T_2^2+16375)}{4(125T_2^4-262T_2^2+125)^2}$$

i

$$R_2(T_2)=\sum\frac{B_i}{T_2-a_i}=\frac{B_{10}}{T_2-a}+\frac{B_5}{T_2+a}+\frac{B_7}{T_2-a^{-1}}+\frac{B_6}{T_2+a^{-1}}.$$

Coneixem tots els paràmetres excepte els valors B_i, per als quals tenim tres equacions.

Per altra banda, tenint en compte que f^2 és el mòdul principal construït a partir del mig domini fonamental triangular $v_3v_4v_6$ de $\langle\Gamma(6,1),w_2\rangle$, o bé a partir de la derivada schwarziana de f utilitzant la proposició 11 (i per tant, sense utilitzar que el mig domini fonamental és triangular), es calcula que satisfà l'equació schwarziana

$$\{z,f^2\}=-\frac{135(f^2)^2-142f^2+135}{144(f^2)^2(f^2-1)^2}.$$

Sabem també que $f^2=-\left(\frac{T_2-c}{T_2+c}\right)^4\frac{T_2-a}{T_2+a}\frac{aT_2-1}{aT_2+1}$ i per tant es té l'equació polinòmica $P(T_2,f^2)=f^2(T_2+c)^4(T_2+a)(aT_2+1)+(T_2-c)^4(T_2-a)(aT_2-1)=0$. Així, podem utilitzar la proposició 11 per a trobar una expressió per a $\{z,T_2\}$ en funció de T_2 i f^2, substituim f^2 per la seva expressió en funció de T_2 i obtenim

$$\{z,T_2\}=-\frac{576(125T_2^4-222T_2^2+125)}{(125T_2^4-262T_2^2+125)^2},$$

que és $R_2(T_2)=\frac{339-1875T_2^2}{500-1048T_2^2+500T_2^4}$.

Resumim a continuació alguns dels resultats que hem provat en aquesta secció.

Proposició 12. *Considerem el domini fonamental per a* $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle$ *que hem construït en el teorema 8. Aleshores, existeix un mòdul principal* T_2 *per a aquest grup que envia el mig domini fonamental* $B_5B_6B_7B_{10}$ *al semiplà superior i satisfà* $T_2(B_{11}) = \infty$, $T_2(B_{22}) = -1$, $T_2(B_{12}^*) = 0$, $T_2(B_{21}) = 1$, $T_2(B_{10}) = a$, $T_2(B_5) = -a$, $T_2(B_6) = -a^{-1}$, $T_2(B_7) = a^{-1}$, $T_2(v_2) = -\frac{2\sqrt{6}+i}{5}$, $T_2(v_4) = \frac{2\sqrt{6}+i}{5}$, $T_2(v_3) = c$ *i* $T_2(v_6) = -c$, *on* $a = \frac{1}{5\sqrt{5}}(8\sqrt{2}+\sqrt{3})$ *i* $c = \frac{1}{5\sqrt{5}}(-7\sqrt{2}+3\sqrt{3}i)$. *Aquest mòdul principal satisfà l'equació schwarziana* $\{z, T_2\} + R(T_2) = 0$, *on* $R(T_2) = \frac{576(125T_2^4-222T_2^2+125)}{(125T_2^4-262T_2^2+125)^2}$. □

Un cop trobat un mòdul principal per a la corba $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle \backslash \mathcal{H}$ és fàcil trobar-ne per als quocients d'Atkin-Lehner d'aquesta corba.

5.3.2 Mòduls principals per als quocients de $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle \backslash \mathcal{H}$

La obtenció dels mòduls principals per als quocients de $\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle \backslash \mathcal{H}$ serà una conseqüència fàcil un cop coneguem l'acció de les involucions d'Atkin-Lehner en T_2. En la secció anterior ja hem vist que $T_2(w_5 z) = \frac{1}{T_2(z)}$. De la mateixa manera, per a calcular $T_2(w_3 z) = T_2(w_6 z)$, utilitzem que w_6 envia el polígon $B_1B_2B_5B_{10}$ a $B_6B_7B_{10}B_5$ i, per tant, a partir dels valors de la funció T_2 en aquests vèrtexs, $T_2(w_6 z) = -T_2(z)$. Finalment, $T_2(w_{15} z) = T_2(w_{30} z) = T_2(w_6 w_5 z) = -T_2(w_5 z) = -\frac{1}{T_2(z)}$.

Considerem l'extensió de cossos $\mathbb{C}(\langle \Gamma(6,5), w_2 \rangle) | \mathbb{C}(\langle \Gamma(6,5), w_2, w_k \rangle)$ per a $k = 3, 5, 15$, que és de grau 2, i notem que l'acció del grup de Galois de l'extensió ve donada per la transformació w_k. En conseqüència, el cos $\mathbb{C}(\langle \Gamma(6,5), w_2, w_k \rangle)$ està generat per la traça i la norma de T_2. Resumim aquesta informació en la taula següent:

k	$Irr(T_2, \mathbb{C}(\langle \Gamma(6,5), w_2, w_k \rangle)$	$\mathbb{C}(\langle \Gamma(6,5), w_2, w_k \rangle)$
3	$X^2 - T_2^2$	$\mathbb{C}(T_2^2)$
5	$X^2 - \frac{T_2^2+1}{T_2} X + 1$	$\mathbb{C}(\frac{T_2^2+1}{T_2})$
6	$X^2 - \frac{T_2^2-1}{T_2} X - 1$	$\mathbb{C}(\frac{T_2^2-1}{T_2})$

Finalment, podem obtenir un mòdul principal per a $\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5 \rangle$, tenint en compte que $T_2^2(w_5 z) = \frac{1}{T_2^2(z)}$. Així,

$$\mathbb{C}(\langle \Gamma(6,5), w_2, w_3, w_5 \rangle) = \mathbb{C}(\frac{T_2^4+1}{T_2^2}).$$

5.4 Models canònics

En aquesta secció determinarem el model canònic (hiperel·líptic) de la corba $X(6,5)$ i, per a això, el de tots els seus quocients (equació i funcions). Per a cadascuna de les corbes amb mòdul principal (corbes de gènere 0 amb punts sobre $\mathbb{Q}$, és a dir, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$) determinarem l'equació schwarziana que satisfà aquest.

Per a calcular els models canònics de les diferents corbes ens basarem en els models canònics dels quocients que són $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. En aquest cas existeix un mòdul principal que dóna el model canònic, direm que aquest mòdul principal està definit sobre $\mathbb{Q}$. En aquest cas la construcció es basa en el coneixement dels valors del mòdul principal que dóna el model canònic en alguns punts de multiplicació complexa.

Com ja hem comentat, cf. [Shi67], sabem que existeixen models canònics racionals $j_I : \mathcal{H} \to X(6,5)^{\langle W_I \rangle}$, on $W_I = \{\omega_i : i \in I\}$, que factoritzen a través de $\langle \Gamma(6,5), W_I \rangle \backslash \mathcal{H}$ que són compatibles amb les projeccions en el costat esquerre i els recobriments en el costat dret.

Escriurem $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle W_I \rangle})$ el cos de les funcions racionals definides sobre $\mathbb{Q}$, per exemple, si $X(6,5)^{\langle W_I \rangle} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$, aleshores, $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle W_I \rangle}) = \mathbb{Q}(j_I)$, on j_I és la funció que dóna el model canònic vista com a funció amb valors en $\mathbb{C}_\infty$.

Comencem detectant algunes corbes amb punts racionals.

Lema 5. *La corba $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3 \rangle}$ (resp. $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_5 \rangle}$, $X(6,5)^{\langle \omega_3, \omega_5 \rangle}$, $X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_{10} \rangle}$, $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$) té punts racionals. Un punt racional és $j_{2,3}(B_{19})$ (resp. $j_{2,5}(B_{19})$, $j_{3,5}(B_{19})$, $j_{6,10}(B_{19})$, $j_{2,3,5}(B_{19})$).*

Demostració. Només cal notar que el punt B_{19} és l'únic punt de multiplicació complexa (especial) per $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$ que hi ha en el domini. Com que el grup de Galois actua en els punts de multiplicació complexa per un determinat ordre, el punt B_{19} dóna un punt racional en totes aquestes corbes. □

Corol·lari 3. *Les corbes $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3 \rangle}$, $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_5 \rangle}$, $X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_{10} \rangle}$ i $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$ són isomorfes a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ i la corba $X(6,5)^{\langle \omega_3, \omega_5 \rangle}$ és una corba el·líptica sobre $\mathbb{Q}$.* □

A continuació determinarem els cossos de definició d'alguns dels punts que han aparegut, utilitzant la definició del model canònic de la corba.

Notació. Donat un cos de nombres K i un mòdul $\mathfrak{m}$ en K, escrivim $HCF(K)$ el cos de classes de Hilbert de K i $RCF(K, \mathfrak{m})$ el cos de classes de raigs de conductor $\mathfrak{m}$.

Lema 6. *1. $j(B_1), j(B_2), j(B_5), j(B_{10})$ són racionals sobre $\mathbb{Q}(i)$;*

2. $j(B_{11}), j(B_{12})$ *són racionals sobre* $HCF(\mathbb{Q}(\sqrt{-6})) = \mathbb{Q}(\sqrt{-6}, \sqrt{2})$*;*

3. $j(B_{13}), j(B_{14}), j(B_{21}), j(B_{22})$ *són racionals sobre* $HCF(\mathbb{Q}(\sqrt{-10})) = \mathbb{Q}(\sqrt{-10}, \sqrt{5})$*;*

4. $j(B_{19})$ *és racional sobre* $HCF(\mathbb{Q}(\sqrt{-30})) = \mathbb{Q}(\sqrt{-30}, \sqrt{2}, \sqrt{5})$*;*

5. $j(v_3), j(v_6)$ *són racionals sobre* $RCF(\mathbb{Q}(i), 5) = \mathbb{Q}(i, \xi_5)$*, on* ξ_5 *denota una arrel primitiva cinquena de la unitat;*

6. $j(v_2), j(v_4)$ *són racionals sobre* $RCF(\mathbb{Q}(\sqrt{-3}), 5) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \xi_5)$*, on* ξ_5 *denota una arrel primitiva cinquena de la unitat.*

Demostració. Els punts B_1, B_2, B_5, B_{10} són punts el·líptics d'ordre 2 i per tant estan definits sobre $\mathbb{Q}(i)$.

Per altra banda, $\{B_{11}, B_{12}\}$ (resp. $\{B_{13}, B_{14}, B_{21}, B_{22}\}$, $\{B_{19}\}$) són punts de multiplicació complexa per l'anell d'enters de $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{-10})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$) i, per tant, estan definits sobre el $HCF(\mathbb{Q}(\sqrt{-6}))$ (resp. $HCF(\mathbb{Q}(\sqrt{-10}))$, $HCF(\mathbb{Q}(\sqrt{-30}))$). El grau d'aquest cos de classes de Hilbert és 2 (resp. 2, 4) i això permet identificar aquests cossos de classes de Hilbert; per exemple, per a veure la identitat en el cas de $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$, considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{2}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \arrow[dr] & \mathbb{Q}(\sqrt{-6}) \arrow[d] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

i notem que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}$ només ramifica en 2, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})|\mathbb{Q}$ només ramifica en 3 (i ∞) d'on resulta que $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{2})|\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ és no ramificada.

Per als dos darrers punts es té que $\{v_3, v_6\}$ (resp. $\{v_2, v_4\}$) són punts de multiplicació complexa per a l'ordre de conductor 5 en $\mathbb{Q}(i)$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$). Així podem veure que el cos de classes d'anell corresponent a aquest ordre està contingut en el cos de classes de raigs de conductor 5, que té grau 4 sobre $\mathbb{Q}(i)$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$), d'on segueix el resultat. $\square$

A continuació calcularem mòduls principals sobre $\mathbb{Q}$ per als $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ anteriors. Començarem per $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_3, \omega_5 \rangle}$.

5.4.1 $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}$

Sabem que $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ i que un mòdul principal complex és $U_{2,3,5} = \frac{T_2^4+1}{T_2^2}$. Aquesta funció envia el polígon $B_1B_{13}B_{19}B_{12}$ al semiplà superior i coneixem els valors que pren en uns quants punts del domini, que s'obtenen a partir dels valors de T_2 que coneixem:

$$
\begin{array}{l}
U_{2,3,5}(B_{11}) = U_{2,3,5}(B_{12}) = \infty \\
U_{2,3,5}(B_{13}) = 2 \\
U_{2,3,5}(B_{19}) = -2 \\
U_{2,3,5}(B_1) = U_{2,3,5}(B_{10}) = \frac{a^4+1}{a^2} = \frac{262}{125} \\
U_{2,3,5}(v_6) = \frac{c^4+1}{c^2} = \frac{142}{125} U_{2,3,5}(v_2) = U_{2,3,5}(v_4) = \frac{46}{25}
\end{array}
$$

Com ja hem notat en el lema previ, el punt B_{19} dóna un punt racional de la corba $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}$. A més, com que el punt $B_1 = B_{10}$ és l'únic punt el·líptic de la corba $X(6,5)$ en el domini, i, per tant, l'únic punt de multiplicació complexa per l'ordre maximal de $\mathbb{Q}(i)$, aquest punt també ha de ser necessàriament racional. Podríem trobar algun altre punt racional pels mateixos arguments, però utilitzarem un altre raonament que ens serà útil més endavant. Recordem que el morfisme $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle} \to X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}$ està definit sobre $\mathbb{Q}$ i, per tant, el divisor de ramificació és un divisor que està definit sobre $\mathbb{Q}$. El divisor de ramificació és $j_{2,3,5}(B_{13}) + j_{2,3,5}(B_{19})$ i hem vist que $j_{2,3,5}(B_{19})$ és racional, així $j_{2,3,5}(B_{13})$, ha de ser també necessàriament racional.

D'aquesta manera, hem localitzat tres punts racionals de la corba $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}$ i en els corresponents punts del domini la funció $U_{2,3,5}$ pren valors racionals. En conseqüència, aquesta funció és un mòdul principal sobre $\mathbb{Q}$, o, en altres paraules, ens dóna el model canònic d'aquesta corba. Així, $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3,5})$.

Com abans, tenint en compte que coneixem la derivada schwarziana de T_2 i que es té la relació polinòmica $U_{2,3,5}T_2^2 - (T_2^4+1) = 0$, és fàcil veure, utilitzant la proposició 11, que la derivada schwarziana de $U_{2,3,5}$ és

$$\{z, U_{2,3,5}\} = -\frac{3(15625U_{2,3,5}^4 - 41500U_{2,3,5}^3 + 213520U_{2,3,5}^2 - 882000U_{2,3,5} + 994224)}{4(262 - 125U_{2,3,5})^2(-2+U_{2,3,5})^2(2+U_{2,3,5})^2}.$$

5.4.2 $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}$

Considerem l'extensió quadràtica

$$\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}) | \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3,5})$$

i sabem que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle})$ té un mòdul principal sobre $\mathbb{Q}$, escrivim-lo $U_{2,3}$.

Tenint en compte el divisor de ramificació del morfisme

$$X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle} \to X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle},$$

es veu que l'extensió de cossos anterior és ramificada exactament en $U_{2,3,5} - U_{2,3,5}(B_{13}) = U_{2,3,5} - 2$ i $U_{2,3,5} - U_{2,3,5}(B_{19}) = U_{2,3,5} + 2$. Com que el divisor de ramificació està format per punts racionals, podem prendre $U_{2,3}$ tal que $U_{2,3}^2 = k\frac{U_{2,3,5}+2}{U_{2,3,5}-2}$ amb k enter lliure de quadrats.

Per tal de determinar el valor de k utilitzarem el valor de la funció en els punts de multiplicació complexa. Observem que $U_{2,3}(B_1) = \pm 2^3\sqrt{\frac{2k}{3}}$ està en el cos de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(i)$, que és $\mathbb{Q}(i)$, d'on resulta que $k \in \{\pm 6\}$. Per altra banda, com que $U_{2,3}(v_4) = \pm 2\sqrt{-6k} \in RCF(\mathbb{Q}(\sqrt{-3}),5)$ que és una extensió cíclica de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ i que té com a únic subcos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{5})$, obtenim que $k = -6$.

Així, podem prendre $U_{2,3}$ tal que $U_{2,3}^2 = -6\frac{U_{2,3,5}+2}{U_{2,3,5}-2}$, per exemple, $U_{2,3} = \sqrt{-6}\frac{T_2^2+1}{T_2^2-1}$.

Utilitzant el mateix procediment que en el punt anterior per a determinar l'equació schwarziana que satisfà $U_{2,3,5}$ a partir de la de T_2, podem determinar molt fàcilment l'equació schwarziana que satisfà $U_{2,3}$ a partir de la de $U_{2,3,5}$:

$$\{z, U_{2,3}\} = \frac{30(23U_{2,3}^4 - 1824U_{2,3}^2 + 25728)}{(U_{2,3}^2+6)^2(U_{2,3}^2+256)^2}.$$

5.4.3 $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}$

Considerem l'extensió quadràtica

$$\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle})|\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3,5})$$

i sabem que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle})$ té un mòdul principal sobre $\mathbb{Q}$ que escrivim $U_{2,5}$.

Com abans, tenint en compte la ramificació del morfisme

$$X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle} \to X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle},$$

es veu que l'extensió de cossos anterior ramifica en $U_{2,3,5} - U_{2,3,5}(B_{19}) = U_{2,3,5} + 2$ i ∞ i també que el divisor de ramificació està format per punts racionals. Així, podem prendre $U_{2,5}$ tal que $U_{2,5}^2 = k(U_{2,3,5}+2)$.

Per a determinar k, utilitzem el valor en alguns punts de multiplicació complexa: del valor en B_1, $U_{2,5}(B_1) = \pm\frac{2^4}{5}\sqrt{\frac{2k}{5}} \in \mathbb{Q}(i)$ resulta que $k = \pm 10$ i del valor en v_4, $U_{2,5}(v_4) = 4\sqrt{\frac{2k}{5}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{5})$, concloem que $k = -10$.

Així, podem prendre $U_{2,5}$ tal que $U_{2,5}^2 = -10(U_{2,3,5}+2)$, per exemple, $U_{2,5} = \sqrt{-10}\frac{T_2^2+1}{T_2}$.

Podem determinar l'equació schwarziana de $U_{2,5}$ a partir de la de $U_{2,3,5}$:

$$\{z, U_{2,5}\} = \frac{24(4325U_{2,5}^4 + 349312U_{2,5}^2 + 7055360)}{(25U_{2,5}^2+1024)^2(U_{2,5}^2+40)^2}.$$

5.4.4 $X(6,5)^{\langle \omega_6, \omega_{10} \rangle}$

Considerem l'extensió quadràtica

$$\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle \omega_6,\omega_{10}\rangle})|\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle \omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3,5})$$

i sabem que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle \omega_6,\omega_{10}\rangle})$ té un mòdul principal sobre $\mathbb{Q}$, que escrivim $U_{6,10}$.

Tenint en compte la ramificació del morfisme

$$X(6,5)^{\langle \omega_6,\omega_{10}\rangle} \to X(6,5)^{\langle \omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle},$$

es veu que l'extensió de cossos anterior ramifica en $U_{2,3,5} - U_{2,3,5}(B_{19}) = U_{2,3,5}+2$ i $U_{2,3,5} - U_{2,3,5}(B_1) = U_{2,3,5} - 262/125$, i també que el divisor de ramificació està format per punts racionals. Així, podem prendre $U_{6,10}$ tal que $U_{6,10}^2 = k\frac{U_{2,3,5}+2}{U_{2,3,5}-262/125}$. Per a determinar k, com abans, utilitzem el valor en v_6 i v_4 i obtenim que $k=-3$.

Així, podem prendre $U_{6,10}$ tal que $U_{6,10}^2 = -3\frac{U_{2,3,5}+2}{U_{2,3,5}-262/125}$.

Podem determinar l'equació schwarziana de $U_{6,10}$ a partir de la de $U_{2,3,5}$:

$$\{z, U_{6,10}\} = -\frac{3(U_{6,10}^6 + 189U_{6,10}^4 + 27219U_{6,10}^2 - 116625)}{4(U_{6,10}^2+3)^2(U_{6,10}^2-125)^2}.$$

5.4.5 $X(6,5)^{\langle \omega_2, \omega_{15} \rangle}$

Per tal de resoldre aquest cas, en el qual en principi no sabem que existeixi un mòdul principal sobre $\mathbb{Q}$, utilitzarem les tres corbes que hem determinat fins al moment. Notem que tenim el reticle

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3}) \arrow[dr, no head] & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_{15}\rangle}) \arrow[d, no head] & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}) \arrow[dl, no head] \\
& \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3,5}) &
\end{tikzcd}$$

que correspon a una extensió $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i, per tant, com que $U_{2,3}$ i $U_{2,5}$ són arrels d'elements de $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle})$, podem escriure $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_{15}\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}U_{2,3}, U_{2,3,5}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}/U_{2,3})$ ja que $(U_{2,5}/U_{2,3})^2 = \frac{5}{3}(U_{2,3,5}-2)$. Així, tenim que $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_{15}\rangle} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ i tenim el mòdul principal $U_{2,15} = \frac{U_{2,5}}{U_{2,3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{T_2^2-1}{T_2}$.

Podem determinar l'equació schwarziana de $U_{2,15}$ a partir de la de $U_{2,3,5}$:

$$\{z, U_{2,15}\} = \frac{12(5775U_{2,15}^4 - 28344U_{2,15}^2 - 8720)}{(5U_{2,15}-2)^2(5U_{2,15}+2)^2(3U_{2,15}^2+20)^2}.$$

5.4.6 $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{10}\rangle}$

Considerem el reticle

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_{10}\rangle}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{10}\rangle}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_6,\omega_{10}\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{6,10}) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3,5}) &
\end{tikzcd}$$

i podem escriure $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{10}\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}U_{6,10}, U_{2,3,5}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}/U_{6,10})$ ja que $(U_{2,5}/U_{6,10})^2 = \frac{10}{3}(U_{2,3,5} - \frac{262}{125})$. Així, tenim que $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{10}\rangle} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ i tenim el mòdul principal $U_{3,10} = \frac{U_{2,5}}{U_{6,10}}$.

Podem determinar l'equació schwarziana de $U_{3,10}$ a partir de la de $U_{2,3,5}$:

$$\{z, U_{3,10}\} = \frac{24(3890625U_{3,10}^6 - 24240000U_{3,10}^4 + 10291200U_{3,10}^2 - 2097152)}{U_{3,10}^2(75U_{3,10}^2+1024)^2(25U_{3,10}^2+8)^2}.$$

5.4.7 $X(6,5)^{\langle\omega_5,\omega_6\rangle}$

Considerem el reticle

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_6\rangle}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_5,\omega_6\rangle}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_6,\omega_{10}\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{6,10}) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3,5}) &
\end{tikzcd}$$

i podem escriure $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_5,\omega_6\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3}U_{6,10}, U_{2,3,5}) = \mathbb{Q}(U_{2,3}/U_{6,10})$ ja que $(U_{2,3}/U_{6,10})^2 = 2\frac{U_{2,3,5}-\frac{262}{125}}{U_{2,3,5}-2}$. Així, tenim que $X(6,5)^{\langle\omega_5,\omega_6\rangle} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ i tenim el mòdul principal $U_{5,6} = \frac{U_{2,3}}{U_{6,10}}$.

Podem determinar l'equació schwarziana de $U_{5,6}$ a partir de la de $U_{2,3,5}$:

$$\{z, U_{5,6}\} = -\frac{6(17625U_{5,6}^6 - 63328U_{5,6}^4 + 39808U_{5,6}^2 + 32768)}{U_{5,6}^2(125U_{5,6}^2 - 256)^2(U_{5,6}^2 - 2)^2}.$$

Fins ara hem vist que tots els dobles quocients que tenen gènere 0 tenen punts i, per tant, són $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. Calculem ara el model per a $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}$ que sabem que és una corba el·líptica.

5.4.8 $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}$

Comencem considerant el reticle

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{10}\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{3,10}) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3,5}) &
\end{tikzcd}$$

i, com abans, podem escriure $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3}U_{3,10}, U_{2,3,5})$ i és una comprovació veure que

$$\left(\frac{5}{2}U_{2,3}U_{3,10}(U_{2,3,5}-2)\right)^2 = -(U_{2,3,5}-2)(U_{2,3,5}+2)(125U_{2,3,5}-262).$$

Així, podem prendre $y = \frac{5}{2}U_{2,3}U_{3,10}(U_{2,3,5}-2)$, $x = U_{2,3,5}$. Aleshores, es té que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(x,y)$ i $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}$ és isomorf a la corba el·líptica que té per equació

$$y^2 = -(x-2)(x+2)(125x-262).$$

L'obtenció de la resta de models és mecànica, en veurem tres exemples i els altres casos els llistarem en una taula.

5.4.9 $X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}$

Sabem que aquesta és una corba de gènere 0, però en principi desconeixem si té punts racionals. Veurem que no en té i, per tant, és una cònica sense punts sobre $\mathbb{Q}$. En particular, no té mòdul principal sobre $\mathbb{Q}$. Per a veure tot això, només cal notar que

$$\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}) = \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}).\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_{15}\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}, U_{2,15}).$$

Aleshores, és fàcil veure que aquestes dues funcions satisfan l'equació

$$U_{2,5}^2 + 6U_{2,15}^2 + 40 = 0,$$

d'on s'obté el model canònic per a aquesta corba, una cònica sense punts reals.

5.4.10 $X(6,5)^{\langle\omega_{30}\rangle}$

Sabem que aquesta és una corba de gènere 0 i en principi desconeixem si té punts racionals. Veurem que en té i per tant és $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. Per a veure tot això, només cal notar que

$$\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_{30}\rangle}) = \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_{15}\rangle}).\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{10}\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,15}, U_{3,10}).$$

Aleshores, és fàcil veure que aquestes dues funcions satisfan l'equació

$$U_{3,10}^2 - 2U_{2,15}^2 + \frac{8}{25} = 0.$$

El punt $(U_{3,10}, U_{2,15}) = (0, \frac{2}{5})$ és un punt racional d'aquesta corba i, en conseqüència,

$$\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_{30}\rangle}) = \mathbb{Q}\left(\frac{U_{3,10}}{U_{2,15} - 2/5}\right),$$

i.e. $U_{30} = \frac{U_{3,10}}{U_{2,15}-2/5}$ és un mòdul principal sobre $\mathbb{Q}$.

Com en els punts anteriors, podem determinar l'equació schwarziana de U_{30} a partir de la de $U_{2,15}$ i resulta que

$$\{z, U_{30}\} = -\frac{12(16U_{30}^8 + 55U_{30}^6 - 408U_{30}^4 + 220U_{30}^2 + 256)}{U_{30}^2(16U_{30}^4 - 61U_{30}^2 + 64)^2}.$$

5.4.11 $X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}$

Aquesta corba és una corba de gènere 1. En principi no sabem si té punts racionals o no. Veurem que no en té i en donarem el model hiperel·líptic.

Podem escriure $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}) = \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}).\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{10}\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,3}, U_{3,10})$ i es pot veure que es té l'equació funcional

$$(U_{2,3}^2 + 6)(U_{2,3}^2 + 256) = -2\left(\frac{50}{\frac{1}{2}U_{3,10}^2 + \frac{4}{25}}U_{3,10}\right)^2.$$

Prenem $y = \frac{50}{\frac{1}{2}U_{3,10}^2+\frac{4}{25}}U_{3,10}$, $x = U_{2,3}$ i tenim que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}) = \mathbb{Q}(x,y)$ satisfent l'equació $(x^2+6)(x^2+256) = -2y^2$, que ens dóna un model hiperel·líptic per a la corba anterior, que és obvi a partir de l'equació que no té punts racionals (aquesta corba té un punt racional infinit que correspon a l'única singularitat d'aquesta equació, però quan diem que no té punts racionals ens estem referint al corresponent model no singular).

Notem que la funció $(U_{2,3}^2+6)(U_{2,3}^2+256)$ té zeros en els punts B_1, B_5, B_{11} i B_{12} que són els punts on ramifica el morfisme $X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle} \to X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}$. Aquest fet es repeteix en tots els casos, i això ens pot ajudar a determinar, a priori, part de l'equació a l'hora de realitzar els càlculs.

Tot i que només hem construït uns quants dels models canònics de tot el reticle ja en tenim suficient per a determinar el model canònic per a $X(6,5)$, les tècniques són les mateixes que hem utilitzat fins ara, però, per completesa, en presentem el resultat.

5.4.12 $X(6,5)$

Sabem que $X(6,5)$ és una corba de gènere 1 sense punts reals, en donarem l'equació hiperel·líptica.

Escrivim $\mathbb{Q}(X(6,5)) = \mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_{30}\rangle})\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{30},U_{2,5})$. Aleshores, es té l'equació funcional,

$$-\left(\frac{5}{2}(U_{30}^2-2)U_{2,5}\right)^2 = (4U_{30})^4 - 61(4U_{30})^2 + 1024.$$

Així, podem escriure $y = \frac{5}{2}(U_{30}^2-2)U_{2,5}$, $x = 4U_{30}$ i tenim $\mathbb{Q}(X(6,5)) = \mathbb{Q}(x,y)$ on aquestes funcions satisfan l'equació

$$y^2 = -x^4 + 61x^2 - 1024.$$

Aquesta és exactament l'equació que troben, utilitzant altres tècniques, a [GR06].

5.4.13 Resum

Recollirem de forma esquemàtica els resultats que hem obtingut en aquest capítol.

Teorema 24. *Les corbes* $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3,\omega_5\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_3\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_5\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_6,\omega_{10}\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_2,\omega_{15}\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_{10}\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_5,\omega_6\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_6\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_{30}\rangle}$ *són isomorfes a* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. *El model per a cadascuna d'aquestes corbes està donat per* $j_I : \langle\Gamma(6,5), W_I\rangle\backslash\mathcal{H} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}_\infty$ *tal que* $z \mapsto U_I(z)$.

Descrivim a continuació aquestes funcions així com algunes de les seves propietats principals:

1. *Les relacions bàsiques entre les funcions:*

$$\begin{array}{ll} U_{2,3}^2 = -6\frac{U_{2,3,5}+2}{U_{2,3,5}-2}, & U_{2,5}^2 = -10(U_{2,3,5}+2), \\ U_{6,10}^2 = -3\frac{U_{2,3,5}+2}{U_{2,3,5}-\frac{262}{125}}, & U_{2,15} = \frac{U_{2,5}}{U_{2,3}}, \\ U_{3,10} = \frac{U_{2,5}}{U_{6,10}}, & U_{6,5} = \frac{U_{2,3}}{U_{6,10}}, \\ U_{30} = \frac{U_{3,10}}{U_{2,15}-\frac{2}{5}}, & U_6 = \frac{U_{2,3}-8}{U_{6,5}-\frac{8}{5}}. \end{array}$$

2. *Els valors d'aquestes funcions en alguns dels punts especials dels dominis corresponents:*

B	$U_{2,3,5}(B)$	$U_{2,3}(B)$	$U_{2,5}(B)$	$U_{6,10}(B)$
B_{11}	∞	$\sqrt{-6}$	∞	$\sqrt{-3}$
B_{12}	∞	$-\sqrt{-6}$	∞	$-\sqrt{-3}$
B_{13}	2	∞	$2\sqrt{-10}$	$-5\sqrt{5}$
B_{14}	2	∞	$-2\sqrt{-10}$	$5\sqrt{5}$
B_{19}	-2	0	0	0
B_1	$\frac{262}{125}$	$-16i$	$\frac{32}{5}i$	∞
B_2	$\frac{262}{125}$	$-16i$	$-\frac{32}{5}i$	∞
B_5	$\frac{262}{125}$	$16i$	$-\frac{32}{5}i$	∞
B_{10}	$\frac{262}{125}$	$16i$	$\frac{32}{5}i$	∞
v_6	$\frac{142}{125}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{28}{5}i$	$-\frac{7\sqrt{5}}{5}$
v_3^*	$\frac{142}{125}$	$\frac{14}{3}$	$-\frac{28}{5}i$	$\frac{7\sqrt{5}}{5}$
v_2	$\frac{46}{25}$	12	$-8i\sqrt{\frac{3}{5}}$	$3\sqrt{5}$
v_4^*	$\frac{46}{25}$	-12	$8i\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-3\sqrt{5}$

3. *Les funcions corresponents a cada una de les corbes de l'enunciat tenen*

les derivades schwarzianes següents:

$$\begin{aligned}
\{z,U_{2,3,5}\} &= -\frac{3(15625U_{2,3,5}^4-41500U_{2,3,5}^3+213520U_{2,3,5}^2-882000U_{2,3,5}+994224)}{4(262-125U_{2,3,5})^2(-2+U_{2,3,5})^2(2+U_{2,3,5})^2},\\
\{z,U_{2,3}\} &= \frac{30(23U_{2,3}^4-1824U_{2,3}^2+25728)}{(U_{2,3}^2+6)^2(U_{2,3}^2+256)^2},\\
\{z,U_{2,5}\} &= \frac{24(4325U_{2,5}^4+349312U_{2,5}^2+7055360)}{(25U_{2,5}^2+1024)^2(U_{2,5}^2+40)^2},\\
\{z,U_{6,10}\} &= -\frac{3(U_{6,10}^6+189U_{6,10}^4+27219U_{6,10}^2-116625)}{4(U_{6,10}^2+3)^2(U_{6,10}^2-125)^2},\\
\{z,U_{2,15}\} &= \frac{12(5775U_{2,15}^4-28344U_{2,15}^2-8720)}{(5U_{2,15}-2)^2(5U_{2,15}+2)^2(3U_{2,15}^2+20)^2},\\
\{z,U_{3,10}\} &= \frac{24(3890625U_{3,10}^6-24240000U_{3,10}^4+10291200U_{3,10}^2-2097152)}{U_{3,10}^2(75U_{3,10}^2+1024)^2(25U_{3,10}^2+8)^2},\\
\{z,U_{5,6}\} &= -\frac{6(17625U_{5,6}^6-63328U_{5,6}^4+39808U_{5,6}^2+32768)}{U_{5,6}^2(125U_{5,6}^2-256)^2(U_{5,6}^2-2)^2},\\
\{z,U_{30}\} &= -\frac{12(16U_{30}^8+55U_{30}^6-408U_{30}^4+220U_{30}^2+256)}{U_{30}^2(16U_{30}^4-61U_{30}^2+64)^2},\\
\{z,U_6\} &= -\big(300(191U_6^8-24640U_6^7+810100U_6^6-6904000U_6^5\\
&\quad +24466250U_6^4-863000000U_6^3-12657812500U_6^2\\
&\quad -48125000000U_6+46630859375))\,/\\
&\quad \big((U_6^2-10U_6+125)^2\\
&\quad (7U_6^4-640U_6^3+17450U_6^2-80000U_6+109375)^2\big).
\end{aligned}$$

4. *L'acció de les involucions d'Atkin-Lehner en cadascuna d'aquestes funcions està descrita a través d'una funció racional. Escrivim* $U_I(w_k z) = R_k(U_I(z))$ *per a cadascuna de les funcions de l'enunciat (per a evitar carregar la notació no fem explícita la dependència de* R_k *respecte* I*).*

	$R_2(t)$	$R_3(t)$	$R_5(t)$	$R_6(t)$	$R_{10}(t)$	$R_{15}(t)$	$R_{30}(t)$
$U_{2,3,5}$	t	t	t	t	t	t	t
$U_{2,3}$	t	t	$-t$	t	$-t$	$-t$	$-t$
$U_{2,5}$	t	$-t$	t	$-t$	t	$-t$	$-t$
$U_{6,10}$	$-t$	$-t$	$-t$	t	t	t	$-t$
$U_{2,15}$	t	$-t$	$-t$	$-t$	$-t$	t	t
$U_{3,10}$	$-t$	t	$-t$	$-t$	t	$-t$	t
$U_{5,6}$	$-t$	$-t$	t	t	$-t$	$-t$	t
U_{30}	$-t$	$-2/t$	$2/t$	$2/t$	$-2/t$	$-t$	t
U_6	$\frac{t-25}{t/5-1}$	$\frac{t-25}{t/5-1}$	$\frac{5t-25}{t/5-5}$	t	$\frac{125}{t}$	$\frac{125}{t}$	$\frac{5t-25}{t/5-5}$

$\square$

A partir d'unes quantes de les funcions anteriors podem construir models per a la resta de corbes. En el següent teorema escrivim aquests models i descrivim algunes de les seves propietats. Notem que en alguns casos donem un model hiperel·líptic, que té una singularitat a ∞, en aquests casos hem d'entendre que el model al qual ens referim és la desingularització de la corba donada, o sigui, la corba obtinguda mitjançant blow-ups en el punt.

Per a simplificar l'exposició, definirem els morfismes, que són projectius, mitjançant una sola carta afí, que té sentit allà on cap dels components és ∞ (les altres cartes s'obtenen de manera evident a partir d'aquesta).

Teorema 25. *1. Les corbes $X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}$ i $X(6,5)^{\langle\omega_{10}\rangle}$ són còniques sense punts reals. Els models per a cadascuna d'aquestes corbes està donat per $j_I : \langle\Gamma(6,5), W_I\rangle \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tal com descrivim a continuació:*

(a) $j_2 = [U_{2,5} : U_{2,15} : 1]$ és el model canònic per a $X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}$. Es té que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}, U_{2,15})$ i es té la relació

$$U_{2,5}^2 + 6U_{2,15}^2 + 40 = 0,$$

que dóna una equació per a la corba $X(6,5)^{\langle\omega_2\rangle}$.

(b) $j_{10} = [\frac{5}{32}U_{3,10} : \frac{5}{32}U_{2,5} : 1]$ és el model canònic per a $X(6,5)^{\langle\omega_{10}\rangle}$. Es té que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_{10}\rangle}) = \mathbb{Q}(\frac{5}{32}U_{3,10}, \frac{5}{32}U_{2,5}) = \mathbb{Q}(U_{3,10}, U_{2,5})$ i es té la relació

$$3\left(\frac{5}{32}U_{3,10}\right)^2 + 6\left(\frac{5}{32}U_{2,5}\right)^2 + 1 = 0,$$

que dóna una equació per a la corba $X(6,5)^{\langle\omega_{10}\rangle}$.

2. Les corbes $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}$, $X(6,5)^{\langle\omega_5\rangle}$ i $X(6,5)^{\langle\omega_{15}\rangle}$ són corbes de gènere 1. Els models per a cadascuna d'aquestes corbes són donats per $j_I : \langle\Gamma(6,5), W_I\rangle \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tal com descrivim a continuació:

(a) $j_{3,5} = [\frac{5}{2}U_{2,3}U_{3,10}(U_{2,3,5} - 2) : U_{2,3,5} : 1]$ és el model canònic per a $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}$. Es té que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(\frac{5}{2}U_{2,3}U_{3,10}(U_{2,3,5} - 2), U_{2,3,5}) = \mathbb{Q}(U_{2,3}U_{3,10}, U_{2,3,5})$ i es té la relació

$$\left(\frac{5}{2}U_{2,3}U_{3,10}(U_{2,3,5} - 2)\right)^2 = -(U_{2,3,5}-2)(U_{2,3,5}+2)(125U_{2,3,5}-262),$$

que dóna una equació per a la corba $X(6,5)^{\langle\omega_3,\omega_5\rangle}$, una corba el·líptica sobre $\mathbb{Q}$.

(b) $j_3 = [\frac{50}{\frac{1}{2}U_{3,10}^2+\frac{4}{25}}U_{3,10} : U_{2,3} : 1]$ és el model canònic per a $X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}$. Es té que $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}) = \mathbb{Q}(\frac{50}{\frac{1}{2}U_{3,10}^2+\frac{4}{25}}U_{3,10}, U_{2,3}) = \mathbb{Q}(U_{3,10}, U_{2,3})$ i es té la relació

$$-2\left(\frac{50}{\frac{1}{2}U_{3,10}^2 + \frac{4}{25}}U_{3,10}\right)^2 = (U_{2,3}^2 + 6)(U_{2,3}^2 + 256),$$

que dóna una equació per a la corba $X(6,5)^{\langle\omega_3\rangle}$.

(c) $j_5 = [\frac{12}{25}\frac{U_{5,6}}{1-\frac{1}{2}U_{5,6}^2} : U_{2,5} : 1]$ *és el model canònic per a* $X(6,5)^{\langle\omega_5\rangle}$. *Es té que* $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_5\rangle}) = \mathbb{Q}(\frac{12}{25}\frac{U_{5,6}}{1-\frac{1}{2}U_{5,6}^2}, U_{2,5}) = \mathbb{Q}(U_{5,6}, U_{2,5})$ *i es té la relació*

$$2\left(\frac{12}{25}\frac{U_{5,6}}{1-\frac{1}{2}U_{5,6}^2}\right)^2 = (U_{2,5}^2 + \frac{1024}{25})(U_{2,5}^2 + 40),$$

que dóna una equació per a la corba $X(6,5)^{\langle\omega_5\rangle}$.

(d) $j_{15} = [\frac{2^8 3}{25}\frac{U_{2,15}}{\frac{3}{5}U_{2,15}^2 - \frac{12}{125}} : U_{6,10} : 1]$ *és el model canònic per a* $X(6,5)^{\langle\omega_{15}\rangle}$. *Es té que* $\mathbb{Q}(X(6,5)^{\langle\omega_{15}\rangle}) = \mathbb{Q}(\frac{2^8 3}{25}\frac{U_{2,15}}{\frac{3}{5}U_{2,15}^2 - \frac{12}{125}}, U_{6,10}) = \mathbb{Q}(U_{2,15}, U_{6,10})$ *i es té la relació*

$$\left(\frac{2^8 3}{25}\frac{U_{2,15}}{\frac{3}{5}U_{2,15}^2 - \frac{12}{125}}\right)^2 = (U_{6,10}^2 + 3)(U_{6,10}^2 - 125),$$

que dóna una equació per a la corba $X(6,5)^{\langle\omega_{15}\rangle}$.

3. *La corba* $X(6,5)$ *és una corba de gènere 1 sense punts reals. El model per a aquesta corba és donat per* $j : \Gamma(6,5)\backslash\mathcal{H} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *tal que* $j = [\frac{5}{2}(U_{30}^2 - 2)U_{2,5} : 4U_{30} : 1]$. *Es té que* $\mathbb{Q}(X(6,5)) = \mathbb{Q}(\frac{5}{2}(U_{30}^2 - 2)U_{2,5}, 4U_{30}) = \mathbb{Q}(U_{2,5}, U_{30})$ *i que se satisfà la relació*

$$\left(\frac{5}{2}(U_{30}^2 - 2)U_{2,5}\right)^2 = -(4U_{30})^4 + 61(4U_{30})^2 - 1024,$$

que dóna una equació per a la corba $X(6,5)$. *Donat un punt* (x,y) *de la corba, vista en el pla afí amb les coordenades* $[x : y : 1]$, *l'acció de les involucions d'Atkin-Lehner és*

k	$w_k((x,y))$
2	$(-x, y)$
3	$(-\frac{32}{x}, \frac{32y}{x^2})$
5	$(\frac{32}{x}, -\frac{32y}{x^2})$
6	$(\frac{32}{x}, \frac{32y}{x^2})$
10	$(-\frac{32}{x}, -\frac{32y}{x^2})$
15	$(-x, -y)$
30	$(x, -y)$

Bibliografia

[AB04] Alsina, M. i P. Bayer: *Quaternion orders, quadratic forms, and Shimura curves*, volum 22 de *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004, ISBN 0-8218-3359-6.

[BT07a] Bayer, P. i A. Travesa: *Uniformization of triangle modular curves.* Publ. Mat., 2007.

[BT07b] Bayer, P. i A. Travesa: *Uniformizing functions for certain Shimura curves, in the case $D = 6$.* Acta Arith., 126(4):315–339, 2007, ISSN 0065-1036.

[For29] Ford, L.R.: *Automorphic Functions.* Chelsea, USA, 1929.

[GR06] González, J. i V. Rotger: *Non-elliptic Shimura curves of genus one.* J. Math. Soc. Japan, 58(4):927–948, 2006, ISSN 0025-5645.

[Leh64] Lehner, J.: *Discontinuous groups and automorphic functions.* Mathematical Surveys, No. VIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[Neh75] Nehari, Z.: *Conformal mapping.* Dover Publications Inc., New York, 1975. Reprinting of the 1952 edition.

[Ogg83] Ogg, A. P.: *Real points on Shimura curves.* Dins *Arithmetic and geometry, Vol. I*, volum 35 de *Progr. Math.*, pàgines 277–307. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[Poi82] Poincaré, H.: *Théorie des groupes fuchsiens.* Acta Math., 1(1):1–76, 1882, ISSN 0001-5962.

[SD77] Swinnerton-Dyer, H. P. F.: *Arithmetic groups.* Dins *Discrete groups and automorphic functions (Proc. Conf., Cambridge, 1975)*, pàgines 377–401. Academic Press, London, 1977.

[Shi67] Shimura, G.: *Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves.* Ann. of Math. (2), 85:58–159, 1967, ISSN 0003-486X.

[Shi71] Shimura, G.: *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1971. Kanô Memorial Lectures, No. 1.

[Vig80] Vignéras, M. F.: *Arithmétique des algèbres de quaternions*, volum 800 de *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1980, ISBN 3-540-09983-2.